

Задача на доказательство и вычисление

1. 1. 1. В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.

а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.

б) Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

Решение.

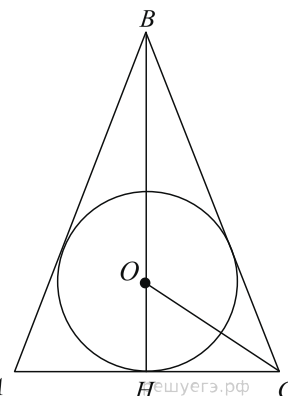
а) Осевым сечением является равнобедренный треугольник ABC , боковые стороны которого являются образующими конуса, а основанием — его диаметр, и вписанная в треугольник окружность, радиус которой равен радиусу шара (см. рис.).

б) Введём обозначения как показано на рисунке. Пусть O — центр вписанной окружности, отрезок CO — биссектриса угла ACB и пусть $\widehat{HCO} = \alpha$, имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OH}{HC} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \widehat{HCB} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$

Тогда $BH = HC \operatorname{tg} \widehat{HCB} = 4$, $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Для площадей поверхностей конуса и шара имеем:
 $S_{\text{кон}} = \pi R^2 + \pi Rl = 9\pi + 15\pi = 24\pi$, $S_{\text{ш}} = 4\pi r^2 = 4\pi(1,5)^2 = 9\pi$. Тем самым, искомое отношение равно $\frac{24}{9}$ или 8:3.

Ответ: 8:3.



2. 2. 2. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1 .

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN .

б) Найдите периметр этого сечения.

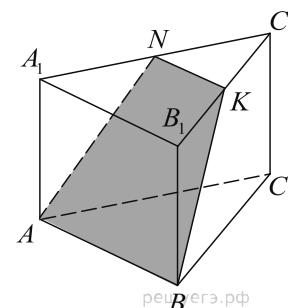
Решение.

а) Проведём через точку N прямую, параллельную прямой AB , до пересечения с прямой B_1C_1 в точке K . Трапеция $ABKN$ — искомое сечение.

б) Имеем $A_1N = 3$, так как точка N — середина ребра A_1C_1 . Значит, $AN = \sqrt{16 + 9} = 5$. Аналогично $BK = 5$.

Далее $NK = 3$, как средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, искомый периметр сечения равен $6 + 5 + 5 + 3 = 19$.

Ответ: 19.



3. 3. 3. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 8. Высота призмы равна 3. Точка N — середина ребра A_1C_1 .

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN .

б) Найдите площадь этого сечения.

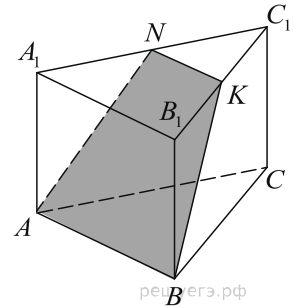
Решение.

а) Проведём через точку N прямую, параллельную прямой AB , до пересечения с прямой B_1C_1 в точке K . Трапеция $ABKN$ — искомое сечение.

б) Имеем $A_1N = 4$, так как точка N — середина ребра A_1C_1 . Значит, $AN = \sqrt{16+9} = 5$, кроме того, $NK = 4$ как средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$.

Опустим из точки N высоту NH на сторону AB . Имеем: $AH = \frac{AB - NK}{2} = 2$. Высота NH равна $\sqrt{AN^2 - AH^2} = \sqrt{21}$. Следовательно, искомая площадь сечения равна

$$\frac{AB + NK}{2} \cdot NH = \frac{8 + 4}{2} \cdot \sqrt{21} = 6\sqrt{21}.$$



Ответ: $6\sqrt{21}$.

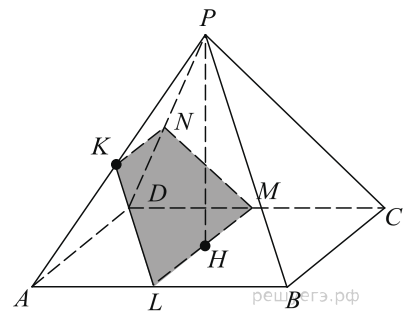
4. 4. 4. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC .

б) Найдите площадь сечения.

Решение.

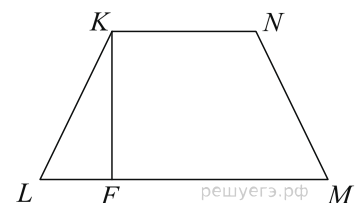
а) В плоскости ABP через точку K проведем прямую, параллельную прямой PB до пересечения ее с прямой AB в точке L , а в плоскости ABC через точку L проведем прямую, параллельную прямой BC до пересечения ее с прямой CD в точке M . По признаку параллельности прямой и плоскости плоскость KLM параллельна прямым PB и BC . Прямая LM параллельна прямой AD , следовательно, она параллельна плоскости APD , а, значит, плоскость KLM пересекает плоскость APD по прямой, параллельной LM . Обозначим через N точку пересечения этой прямой с ребром PD .



Таким образом, искомое сечение — трапеция $KLMN$.

б) Отрезки KL и MN равны, как средние линии равных правильных треугольников ABP и DCP , а отрезок LM — средняя линия квадрата $ABCD$, следовательно, построенное сечение — равнобедренная трапеция, в которой $LM = 4$, $KL = KN = MN = 2$. Проведем высоту KF этой трапеции. Тогда $LF = \frac{LM - KN}{2} = 1$, и из прямоугольного треугольника KLF находим $KF = \sqrt{KL^2 - LF^2} = \sqrt{3}$.

Окончательно получаем $S_{KLMN} = \frac{LM + KN}{2} \cdot KF = 3\sqrt{3}$.



Ответ: $3\sqrt{3}$.

5. 5. 5. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 6, точка K — середина бокового ребра AP .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной плоскости BSP .

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.

Решение.

Таким образом, искомое сечение — трапеция $EFGK$.

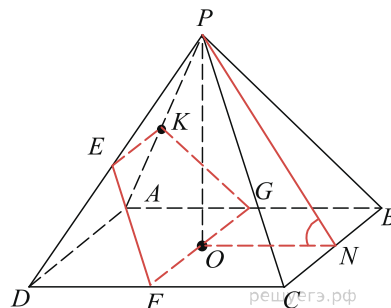
б) Плоскость EFG параллельна плоскости BCP , значит, $\angle((EFG); (ABC)) = \angle((BCP); (ABC))$. Проведем высоту PN треугольника BCP и соединим точку N с основанием O высоты пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах отрезок ON также перпендикулярен BC , а, значит, угол PNO — линейный угол двугранного угла $PBCO$.

Поскольку $ON = \frac{AB}{2} = 3, PN = \frac{PB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ из прямоугольного

треугольника PNO находим $\cos \angle PNO = \frac{ON}{PN} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда

окончательно получаем $\angle((EFG); (ABC)) = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ОТВЕТ: $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.



6. 6. 6. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E = 6EA$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

- а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

Решение.

а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1 . Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F . Точка F лежит в плоскости ETD_1 . Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны. Следовательно,

$$\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{A_1E}{A_1D_1} = \frac{6A_1A}{7AD} = \frac{6 \cdot 14}{7 \cdot 12} = 1.$$

Таким образом, $B_1F = B_1T = \frac{1}{2}B_1C_1 = 6$. Тогда $FB = 14 - 6 = 8$ и $BF : FB_1 = 4 : 3$.

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1 . Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны. Четырёхугольник ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H . Точка T — середина B_1C_1 , поэтому отрезок FT — средняя линия треугольника ED_1H . Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H = EH$, откуда $D_1T = EF$, то есть трапеция ED_1TF — равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1 = EA_1\sqrt{2} = 12\sqrt{2}, \quad FT = FB_1 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2},$$

$$EF = D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + TC_1^2} = 2\sqrt{17}.$$

$$\text{Высота равнобедренной трапеции } FF_1 = \sqrt{EF^2 - EF_1^2} = \sqrt{(2\sqrt{17})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}.$$

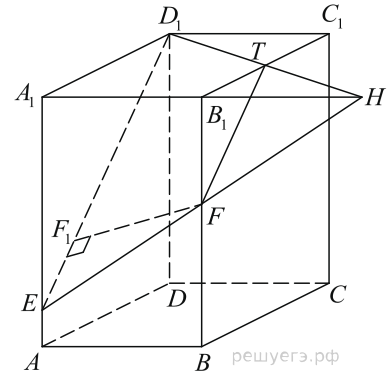
$$\text{Тогда } S_{ETD_1} = 5\sqrt{2} \cdot \frac{12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} = 90.$$

Ответ: б) 90.

7. 7. 7. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C .



Решение.

а) В плоскости BB_1D_1D через точку K проведем прямую параллельно BD_1 . Пусть эта прямая пересекает диагональ B_1D_1 в точке L . В плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$ проведем прямую C_1L , пусть она пересекает сторону A_1B_1 в точке P . Треугольник KPC_1 — сечение, проходящее через точки K и C_1 параллельно прямой BD_1 . Действительно, прямая BD_1 параллельна плоскости сечения, так как параллельна лежащей в нем прямой KL .

В плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$ через точку A_1 проведем прямую параллельно C_1P . Пусть она пересекает D_1B_1 в точке M . По теореме Фалеса имеем: $B_1L : B_1D_1 = B_1K : B_1B = 1 : 4$ и $D_1M : D_1B_1 = 1 : 4$, поэтому $ML : LB_1 = 2 : 1$. Тогда $A_1P : PB_1 = ML : LB_1 = 2 : 1$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть теперь точка N — основание высоты B_1N прямоугольного треугольника KB_1C_1 . B_1N — является проекцией наклонной PN на плоскость BB_1C_1C . Тогда угол PNB_1 — линейный угол искомого двугранного угла. Имеем:

$$PB_1 = \frac{1}{3}A_1B_1 = \frac{4}{3}, \quad S_{B_1C_1K} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2,$$

$$C_1K = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}, \quad B_1N = \frac{2S}{C_1K} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$\operatorname{tg} \angle PNB_1 = \frac{PB_1}{B_1N} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

$$\text{Тем самым, } \angle PNB_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{3}$.

Приведём другое решение.

б) Уравнение плоскости — $ax + by + cz + d = 0$.

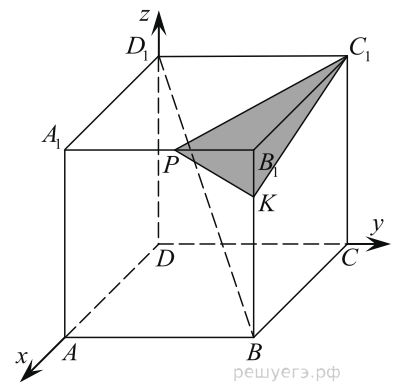
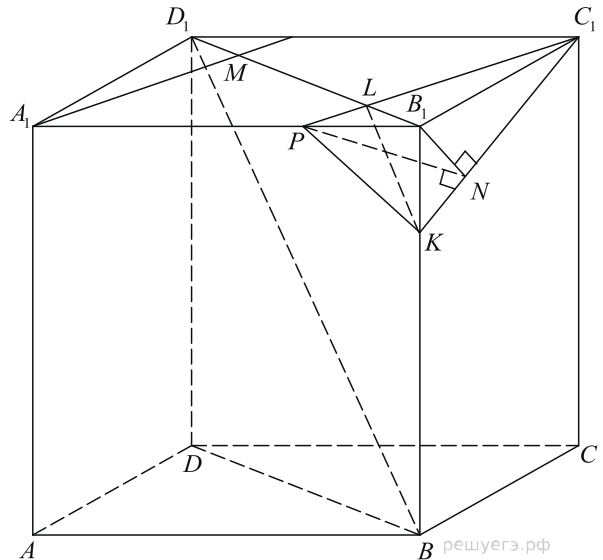
Приведём координаты точек $C_1(0; 4; 4)$, $K(4; 4; 3)$, $P\left(4; \frac{8}{3}; 4\right)$.

Подставив координаты указанных точек в уравнение, получим систему трёх уравнений

$$\begin{cases} 4b + 4c + d = 0, \\ 4a + 4b + 3c + d = 0, \\ 4a + \frac{8}{3}b + 4c + d = 0. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, из первого третье, из второго третье, получим следующую эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} -4a + c = 0, \\ -4a + \frac{4}{3}b = 0, \\ \frac{4}{3}b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}c, \\ b = 3a = \frac{3}{4}c, \\ b = \frac{3}{4}c. \end{cases}$$



Таким образом, вектор нормали плоскости имеет вид $(c; 3c; 4c)$. Откуда имеем: $a = 1, b = 3, c = 4$. Получаем уравнение плоскости: $x + 3y + 4z + d = 0$. Определим теперь коэффициент d , для этого подставим в это уравнение координаты точки C_1 :

$$12 + 16 + d = 0 \Leftrightarrow d = -28.$$

Имеем: $x + 3y + 4z + 28 = 0$ — уравнение плоскости PKC_1 . Координаты вектора нормали к плоскости BB_1C : $\vec{n}_{BB_1C} = (0; 1; 0)$. Координаты вектора нормали к плоскости PKC_1 : $\vec{n}_{PKC_1} = (1; 3; 4)$. Обозначим угол между плоскостями PKC_1 и BB_1C как β . Найдём косинус угла между плоскостями

$$PC_1K \text{ и } BB_1C: \cos \beta = \frac{\vec{n}_{PKC_1} \cdot \vec{n}_{BB_1C}}{|\vec{n}_{PKC_1}| \cdot |\vec{n}_{BB_1C}|} = \frac{3}{\sqrt{26}}.$$

Откуда $\beta = \arccos \frac{3}{\sqrt{26}}$. Может также быть получен ответ и через арктангенс:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{17}}{3}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

8.8.8. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

Решение.

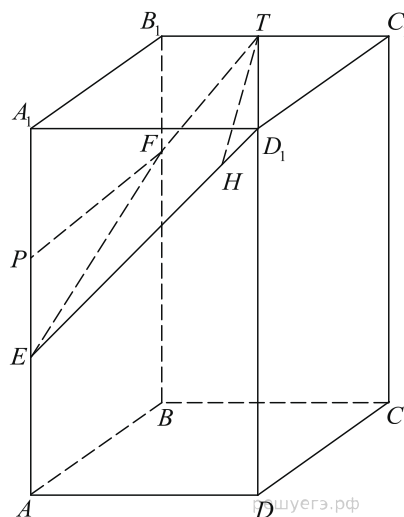
а) Плоскость EFT пересекает грани BB_1C_1C и AA_1D_1D по параллельным отрезкам.

$$TB_1 = 5, B_1F = \frac{5}{16} \cdot 16 = 5, A_1E = \frac{5}{8} \cdot 16 = 10, A_1D_1 = 10.$$

Значит, треугольники D_1A_1E и TB_1F подобны, причём прямые D_1A_1 и B_1C_1 параллельны, прямые A_1E и B_1F тоже параллельны. Поэтому прямые ED_1 и FT также параллельны. Если плоскость EFT не проходит через точку D_1 , то получается, что в плоскости AA_1D_1D через точку E проходят две различные прямые, параллельные прямой FT . Получили противоречие.

б) Сечение параллелепипеда плоскостью EFT — трапеция. Проведём через точку F прямую, параллельную прямой AB . Получим точку P на ребре AA_1 .

$$PE = A_1E - B_1F = 5, PF = 6\sqrt{2}.$$



Тогда

$$EF = \sqrt{PE^2 + PF^2} = \sqrt{25 + 72} = \sqrt{97},$$

$$D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + C_1T^2} = \sqrt{72 + 25} = \sqrt{97}.$$

Следовательно, $EF = D_1T$, и трапеция $EFTD_1$ равнобедренная. Проведём в ней высоту TH .

$$D_1 H = \frac{D_1 E - T F}{2} = \frac{10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$T H = \sqrt{D_1 T^2 - D_1 H^2} = \sqrt{97 - \frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{169}{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $S_{EFTD_1} = \frac{1}{2}(D_1E + TF) \cdot TH = \frac{1}{2}(10\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) \cdot \frac{13\sqrt{2}}{2} = \frac{15 \cdot 13}{2} = \frac{195}{2} = 97,5$.

ОТВЕТ: б) 97,5.

9. 9. 9. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A'B'C'D'$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB' . Через точки K и C' проведена плоскость α , параллельная прямой BD' .

- а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
 б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

Решение.

а) Проведём KE — среднюю линию треугольника $BB'D'$. E — середина $B'D'$, следовательно, точка пересечения диагоналей верхнего основания и сечение содержит диагональ $A'C'$. Треугольник $A'C'K$ является искомым сечением по признаку параллельности прямой и плоскости.

Прямоугольные треугольники $A'B'K$ и $C'B'K$ равны по двум катетам, поэтому $A'K = C'K$, следовательно, треугольник $A'C'K$ — равнобедренный.

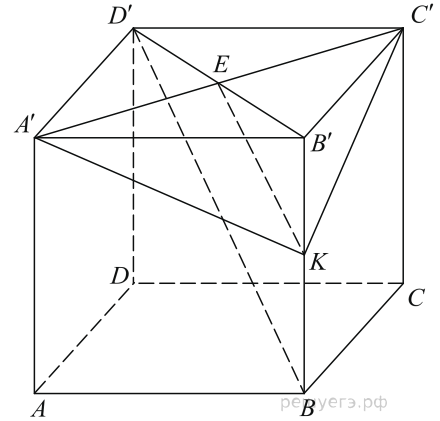
б) Далее имеем:

$$B'K = \frac{1}{2} \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} = \sqrt{7},$$

$$A'K = C'K = \sqrt{B'K^2 + B'C_1^2} = \sqrt{\sqrt{7}^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{7 + 18} = 5,$$

$$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18 + 18} = 6,$$

$$P_{A'KC'} = 5 + 5 + 6 = 16.$$



Ответ: б) 16.

10. 10. 10. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 6 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 3 : 4$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 30$, $AA_1 = 35$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

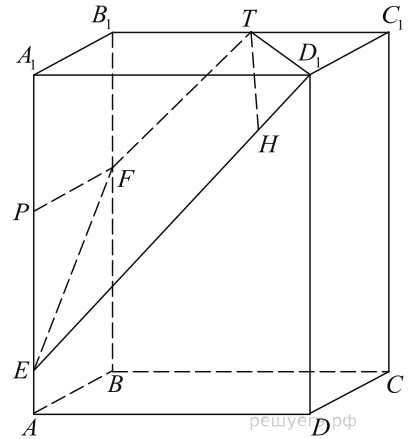
Решение.

а) Плоскость EFT пересекает грани BB_1C_1C и AA_1D_1D по параллельным отрезкам.

$$TB_1 = 15, B_1F = \frac{3}{7} \cdot 35 = 15, A_1E = \frac{6}{7} \cdot 35 = 30, A_1D_1 = 30.$$

Значит, треугольники D_1A_1E и TB_1F подобны, причём прямые D_1A_1 и B_1C_1 параллельны, прямые A_1E и B_1F тоже параллельны. Поэтому прямые ED_1 и FT также параллельны. Если плоскость EFT не проходит через точку D_1 , то получается, что в плоскости AA_1D_1D через точку E проходят две различные прямые, параллельные прямой FT . Получили противоречие.

б) Сечение параллелепипеда плоскостью EFT — трапеция. Проведём через точку F прямую, параллельную прямой AB . Получим точку P на ребре AA_1 .



$$PE = A_1E - B_1F = 15, PF = 4\sqrt{2}.$$

Тогда

$$EF = \sqrt{PE^2 + PF^2} = \sqrt{225 + 32} = \sqrt{257};$$

$$D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + C_1T^2} = \sqrt{32 + 225} = \sqrt{257}.$$

Следовательно, $EF = D_1T$, и трапеция $EFTD_1$ равнобедренная. Проведём в ней высоту TH .

$$D_1H = \frac{D_1E - TF}{2} = \frac{30\sqrt{2} - 15\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2};$$

$$TH = \sqrt{D_1T^2 - D_1H^2} = \sqrt{257 - \frac{225}{2}} = \sqrt{\frac{289}{2}} = \frac{17\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда площадь трапеции равна

$$\frac{1}{2}(D_1E + TF) \cdot TH = \frac{1}{2}(30\sqrt{2} + 15\sqrt{2}) \cdot \frac{17\sqrt{2}}{2} = \frac{45 \cdot 17}{2} = \frac{765}{2} = 382,5.$$

Ответ: б) 382,5.

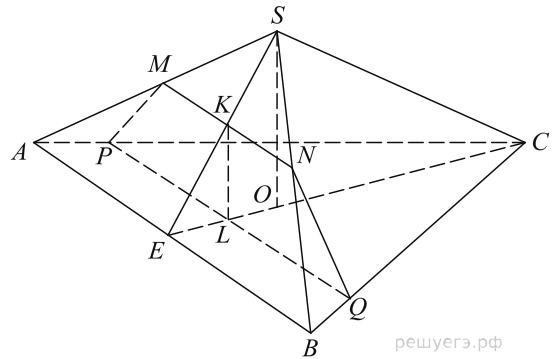
11. 11. 11. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Решение.

а) Прямая MN параллельна плоскости ABC , поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ , параллельной MN . Рассмотрим плоскость SCE . Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN , L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ , O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярна плоскости ABC , поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC , а значит, параллельна прямой SO . Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB , точка K является серединой ES . Значит, L — середина EO . Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении $2 : 1$. Значит, $CL : LE = 5 : 1$.



б) В трапеции $MNPQ$ имеем:

$$MN = \frac{AB}{2} = 6, PQ = \frac{5AB}{6} = 10, KL = \frac{SO}{2} = \frac{\sqrt{SC^2 - CO^2}}{2} = \frac{11}{2}.$$

Значит, площадь трапеции $MNPQ$ равна $\frac{MN + PQ}{2} \cdot KL = 44$.

Ответ: б) 44.

12. 12. 12. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

- а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

Решение.

а) Пусть точка H — середина AC .

Тогда

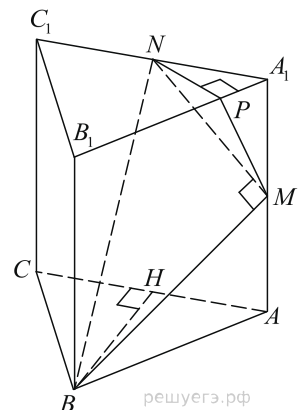
$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем,

$$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M .

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1 , кроме нее $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1 .



Прямая BM перпендикулярна MN , тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому

$$\sin NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}.$$

Следовательно, $NMP = \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.

13. 13. 13. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1 , причём $BE = 1$.

- а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E .
 б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

Решение.

а) Рассмотрим сечение призмы плоскостью ABC_1D_1 . Точка E лежит в этой плоскости вместе с прямой BD_1 . Следовательно, прямые AB и C_1E также лежат в этой плоскости и пересекаются в точке M . Аналогично, BC и A_1E лежат в сечении $B_1C_1D_1$ и пересекаются в точке N . Трапеция A_1C_1NM — искомое сечение.

б) $BD_1 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$, а $BE = 1$. Поэтому $\frac{BE}{ED_1} = \frac{1}{2}$. Из подобия треугольников D_1C_1E и BME

находим, что $\frac{BM}{D_1C_1} = \frac{1}{2}$, откуда $BM = MA = 1$.

Аналогично, $BN = 1$, треугольник BMN — равнобедренный. Опустим перпендикуляр AH на прямую MN . По теореме о трёх перпендикулярах $A_1H \perp MN$, и, значит, $\angle A_1HA$ — искомый угол.

Из треугольника AHM , подобного BMN , находим, что $AH = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда $\operatorname{tg} \angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \sqrt{2}$.

Ответ: б) $\arctg \sqrt{2}$.

14. 14. 14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .
 б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Решение.

а) Прямая MN параллельна плоскости ABC , поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ , параллельной MN . Рассмотрим плоскость SCE . Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN , L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ , O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярна плоскости ABC , поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC , а значит, параллельна прямой SO . Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB , точка K является серединой ES . Значит, L — середина EO . Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении 2 : 1. Значит, $CL : LE = 5 : 1$.

б) В трапеции $MNPQ$ имеем:

$$MN = \frac{AB}{2} = 12, \quad PQ = \frac{5AB}{6} = 20, \quad KL = \frac{SO}{2} = \frac{\sqrt{SC^2 - CO^2}}{2} = \frac{13}{2}.$$

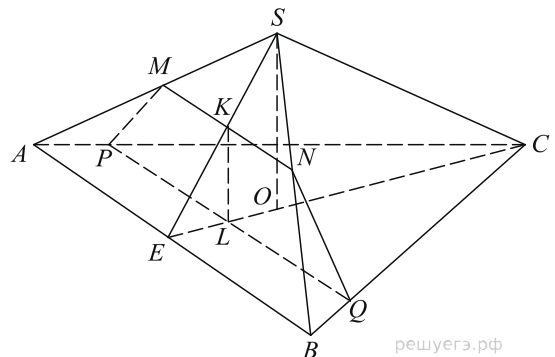
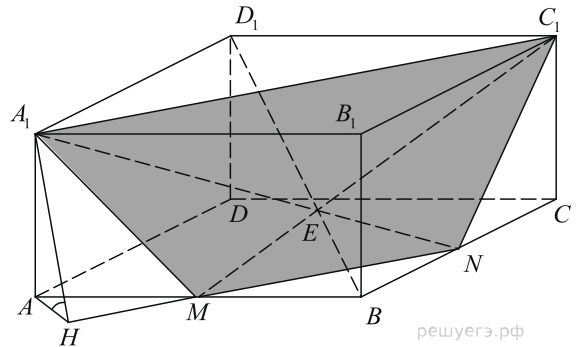
Значит, площадь трапеции $MNPQ$ равна $\frac{MN + PQ}{2} \cdot KL = 104$.

Ответ: б) 104.

15. 15. 15. Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 9.

Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра SB , точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобедренная трапеция.
 б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.



Решение.

а) Проведём медиану S_1M треугольника SS_1B , которая пересекает прямую BB_1 , являющуюся одновременно медианой треугольника SS_1B и основания BCD , в точке T . Тогда $BT : TB_1 = 4 : 5$.

Точка L , в свою очередь, делит отрезок B_1D в отношении $DL : LB_1 = 4 : 5$, так как $LD : LC = 2 : 7$ и отрезок BB_1 — медиана треугольника BCD .

Следовательно, сторона сечения, проходящая через точки L и T , параллельна стороне BD основания BCD . Пусть прямая LT пересекает BC в точке P .

Проведём через точку M среднюю линию в треугольнике SBD , пусть она пересекает сторону SD в точке K . Тогда $PMKL$ — искомое сечение, причём $BP = DL$ и $BM = KD$. Из равенства треугольников BMP и DKL получим $MP = KL$, а значит, $PMKL$ — равнобедренная трапеция.

б) Большее основание PL трапеции равно 7, поскольку треугольник LPC правильный. Второе основание MK равно 4,5, поскольку MK — средняя линия правильного треугольника SBD . Следовательно, средняя линия трапеции равна $\frac{7+4,5}{2} = 5,75$.

Ответ: 5,75.

16. 16. 16. Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 18.

Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра SB , точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

Решение.

Проведём медиану S_1M треугольника SS_1B , которая пересекает медиану BB_1 основания BCD в точке T . Тогда $BT : TB_1 = 4 : 5$, поскольку BB_1 также является медианой треугольника SS_1B .

Точка L , в свою очередь, делит отрезок B_1D в отношении $DL : LB_1 = 4 : 5$, так как $LD : LC = 2 : 7$ и отрезок BB_1 — медиана треугольника BCD .

Следовательно, сторона сечения, проходящая через точки L и T , параллельна стороне BD основания BCD . Пусть прямая LT пересекает BC в точке P .

Проведём через точку M среднюю линию в треугольнике SBD , пусть она пересекает сторону SD в точке K . Тогда $PMKL$ — искомое сечение, причём $BP = DL$ и $BM = KD$. Из равенства треугольников BMP и DKL получим $MP = KL$, а значит, $PMKL$ — равнобокая трапеция.

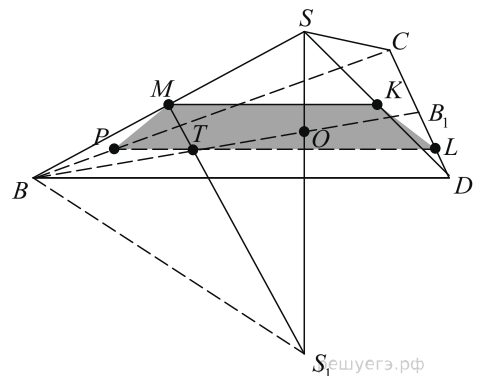
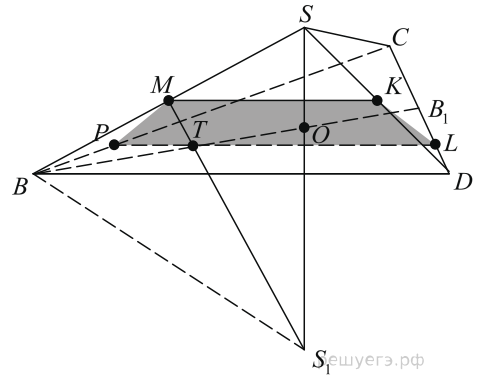
б) Большее основание PL трапеции равно 14, поскольку треугольник LPC правильный. Второе основание MK равно 9, поскольку MK — средняя линия правильного треугольника SBD . Следовательно, средняя линия трапеции равна $\frac{14+9}{2} = 11,5$.

Ответ: 11,5.

17. 17. 17. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.

а) Докажите, что высоты треугольников ABD и A_1BD , проведённые к стороне BD , имеют общее основание.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB .



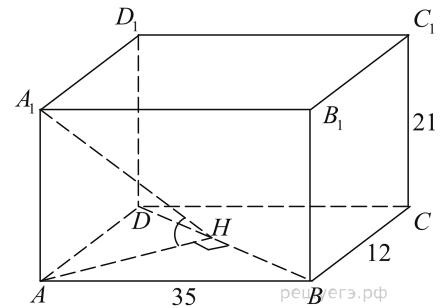
Решение.

а) Проведем высоту AH в треугольнике ABD . Поскольку проекция прямой A_1H на плоскость $ABCD$ это прямая AH , то $A_1H \perp BD$ по теореме о трех перпендикулярах. Что и требовалось.

б) Из треугольника ABD находим

$$AH = \frac{2S_{ABD}}{BD} = \frac{12 \cdot 35}{\sqrt{35^2 + 12^2}} = \frac{420}{37}$$

$$\angle(ABC, A_1BD) = \angle(AH, A_1H) = \arctg \frac{A_1H}{AH} = \arctg \frac{37}{20}.$$



Ответ: б) $\arctg \frac{37}{20}$.

18. 18. 18. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 4, боковые рёбра равны 7, точка D — середина ребра BB_1 .

а) Пусть прямые C_1D и BC пересекаются в точке E . Докажите, что угол EAC — прямой.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADC_1 .

Решение.

а) В треугольнике C_1EC отрезок BD — средняя линия (так как параллелен CC_1 и равен его половине), значит $EB = BC = AB$ и треугольник EBA — равнобедренный. Тогда

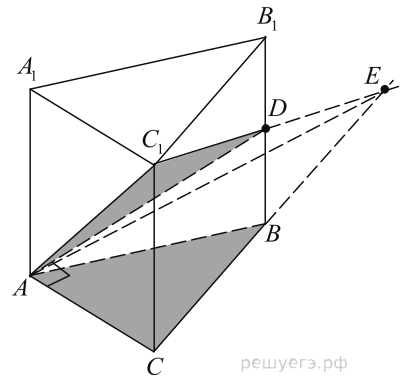
$$\angle EAB = \frac{180^\circ - \angle EBA}{2} = \frac{\angle ABC}{2} = 30^\circ$$

и

$$\angle EAC = \angle EAB + \angle BAC = 90^\circ.$$

б) Поскольку $AE \perp AC$ и $AE \perp AA_1$ (так как $AA_1 \perp ABC$), имеем $AE \perp AA_1C_1C$. Поскольку плоскости ABC и ADC_1 пересекаются по прямой AE , имеем

$$\angle(ABC, ADC_1) = \angle CAC_1 = \arctg \frac{CC_1}{AC} = \arctg \frac{7}{4}.$$



Ответ: $\arctg \frac{7}{4}$.

19. 19. 19. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой стороны основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M — середина ребра AC , а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$.

а) Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.

б) Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.

Решение.

а) Отметим точку M_1 — середину A_1C_1 . Очевидно, $M_1 \in BB_1M$. Проведем MM_1 . Это будет прямая, содержащая среднюю линию треугольника TA_1C_1 , так как $MM_1 \parallel AA_1$ и проходит через середину A_1C_1 . Значит, она проходит и через середину TC_1 (назовем ее K), что и требовалось доказать (эта точка и есть точка пересечения данной прямой и плоскости)

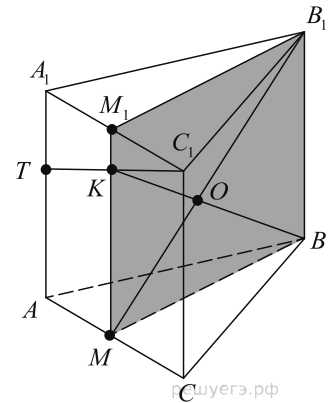
б) Рассмотрим плоскость BB_1M_1M . Отрезок BK лежит в ней и в плоскости BTC_1 , поэтому надо узнать, как отрезок BK делит отрезок B_1M — диагональ прямоугольника BB_1M_1M со сторонами $BB_1 = 9, BM = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. При этом $M_1K = \frac{A_1T}{2} = 2$.

Пусть O точка пересечения BK и B_1M . Тогда

$$\frac{B_1O}{OM} = \frac{S_{B_1BO}}{S_{BOM}} = \frac{B_1B \cdot BO \cdot \sin \angle B_1BO}{MB \cdot BO \cdot \sin \angle MBO} = \frac{9 \cdot \cos \angle MBO}{2\sqrt{3} \cdot \sin \angle MBO} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \angle MBO = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{MB}{MK} = \frac{9}{7}.$$

Поэтому $OM = \frac{7}{16}B_1M = \frac{7}{16}\sqrt{93}$.

Ответ: б) $\frac{7}{16}\sqrt{93}$.



20. 20. 20. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Решение.

а) В основании правильной треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник. Проекция высоты S пирамиды на основание дает точку O , которая лежит на пересечении медиан. Таким образом, точка O делит медианы в отношении $2 : 1$, то есть $OC = \frac{2}{3}CE$.

Рассмотрим высоту SE треугольника SAB . Точка F_1 является ее серединой. Следовательно, ее проекция на медиану CE делит отрезок OE пополам. В свою очередь отрезок $OE = \frac{1}{3}CE$, тогда $EF = OF = \frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$.

В итоге получаем, что точка F делит медиану CE как $CF = \frac{5}{6}CE$ или в соотношении $5 : 1$, начиная от точки C . Что и требовалось доказать.

б) Найдем высоту искомой пирамиды $CF = \frac{5}{6}CE$. Медиану CE найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника BCE :

$$CE = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}, \quad OC = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}, \quad CF = \frac{5}{6} \cdot 6\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

Вычислим площадь основания пирамиды (площадь трапеции $MNZK$). Отрезок $KZ = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10$, отрезок $MN = \frac{12}{2} = 6$ (так как это средняя линия треугольника ABS), высота трапеции $FF_1 = \frac{1}{2}SO$. Найдем высоту SO из прямоугольного треугольника SOC :

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{64 - 48} = 4, \quad FF_1 = \frac{4}{2} = 2.$$

Площадь трапеции (основания пирамиды) равна

$$S = \frac{10+6}{2} \cdot 2 = 16.$$

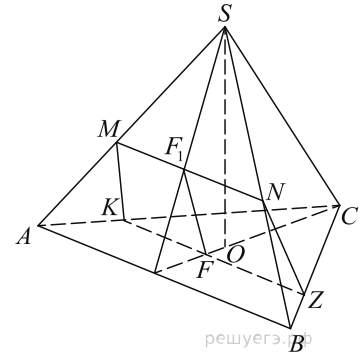
Объем пирамиды найдем по формуле

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{80\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$.

21. 21. 21. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $4\sqrt{3}$. Точки M и N — середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CL основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .
- Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .



Решение.

а) Отметим точку L — середину AB , O — основание высоты пирамиды, опущенной из вершины S (точка пересечения медиан треугольника ABC), K — точку пересечения SL и MN (очевидно, их общую середину) и O_1 — основание перпендикуляра из K на плоскость ABC . Поскольку $KO_1 \parallel SO$ и $KL = \frac{1}{2}SL$, то KO_1 — средняя линия треугольника SOL , поэтому

$$LO_1 = O_1O = \frac{1}{2}LO = \frac{1}{6}LC,$$

откуда $LO_1 : O_1C = 1 : 5$. Осталось заметить, что O_1 это и есть искомая точка пересечения прямой и плоскости.

б) Проведем через O_1 прямую, параллельную AB . Обозначим ее точки пересечения со сторонами AC и BC за M_1 и N_1 соответственно. Тогда MNN_1M_1 — искомое сечение, причем $MN \parallel AB \parallel M_1N_1$, поэтому это трапеция.

Ее основания равны $MN = \frac{1}{2}AB$ и $M_1N_1 = \frac{5}{6}AB$ ($M_1N_1 : AB = M_1C : AC = O_1C : LC$), а высота

$$KO_1 = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{SC^2 - \frac{4}{9}LC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{48 - \frac{4}{9} \cdot 36AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{48 - \frac{1}{3} \cdot 36} = 3.$$

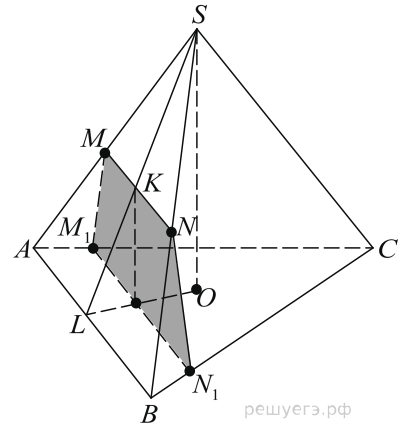
$$\text{Значит } S_{MNN_1M_1} = \frac{3(3+5)}{2} = 12.$$

Ответ: 12.

22. 22. 22. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .



Решение.

Сечение (плоскость α) проходит через точки M и N , причем MN — средняя линия. Это означает, что отрезок $MN \parallel AB$ следовательно, $MN \parallel (ABC)$. По условию секущая плоскость перпендикулярна плоскости ABC , следовательно, она пересекает плоскость ABC по уровню PQ , причем $PQ \parallel MN$. Таким образом, секущая плоскость представляет собой трапецию $PMNQ$. Рассмотрим прямоугольный треугольник SOE , где SO — высота правильной пирамиды. Точка O лежит на пересечении медиан правильного треугольника (в основании пирамиды) и делит их в отношении $2 : 1$, то есть

$$CO = \frac{2}{3}CE.$$

Точка K является серединой отрезка MN , причем $KZ \perp CE$, откуда следует, что $KZ \parallel SO$, следовательно, $ZE = ZO$. Так как $EO = \frac{1}{3}CE$, то

$$ZE = \left(\frac{1}{3} : 2\right) \cdot CE = \frac{1}{6}CE.$$

Таким образом, получаем, что $CZ : ZE = 5 : 1$.

б) Найдем периметр трапеции $MNPQ$: $P = MN + NQ + PQ + NP$, где

$$MN = \frac{1}{2}AB = 3; \quad PQ = \frac{5}{6}AB = \frac{5}{6} \cdot 6 = 5.$$

Для вычисления сторон $MP = NQ$, найдем высоту

$$KZ = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

(величина $SO = 2$ находится по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOC , учитывая, что OC — радиус описанной окружности вокруг равностороннего треугольника и равен $OC = \frac{6}{\sqrt{3}}$. Длину отрезка NQ найдем из прямоугольного треугольника NHQ (смотри рисунок).

Катет $NH = KZ = 1$, а катет HQ равен

$$HQ = \frac{PQ - MN}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1; \quad NQ = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Получаем значение периметра

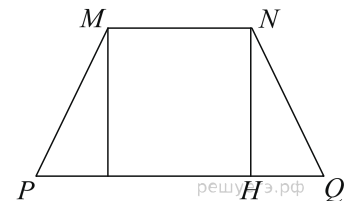
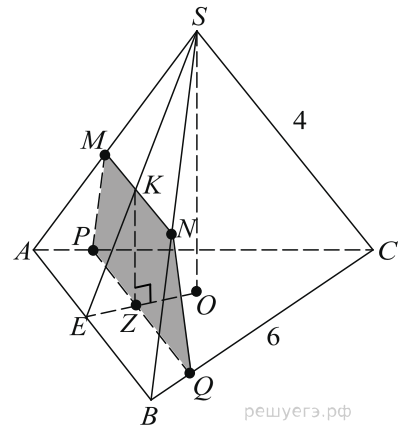
$$P = 5 + 3 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 8 + 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $8 + 2\sqrt{2}$.

23. 23. 23. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

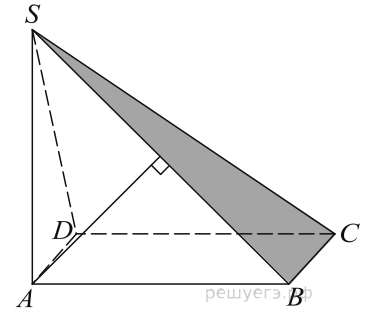


Решение.

а) Заметим, что $AB^2 + SA^2 = SB^2$ и $SA^2 + AD^2 = SD^2$, поэтому $SA \perp AB$, $SA \perp AD$, значит, $SA \perp ABC$.

б) Опустим из A перпендикуляр на SB . Он будет перпендикулярен также BC , поскольку $ASB \perp BC$ ($AS, AB \perp BC$). Поэтому его длина и есть расстояние от A до SBC . Вычислим ее

$$d(A, SB) = \frac{2S_{ASB}}{SB} = \frac{5 \cdot 12}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{60}{13}.$$



Ответ: $\frac{60}{13}$.

24. 24. 24. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

Решение.

а) Рассмотрим треугольник SAB , у которого стороны $SA = \sqrt{11}$, $AB = 4$ и $SB = 3\sqrt{3}$. Значения этих сторон удовлетворяют равенству $SB^2 = SA^2 + AB^2$, следовательно, треугольник SAB прямоугольный, $SA \perp AB$.

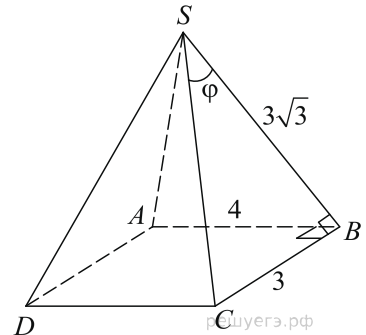
Рассмотрим треугольник SAD со сторонами $SA = \sqrt{11}$, $AD = 3$, $SD = 2\sqrt{5}$. Длины сторон треугольника удовлетворяют равенству $SD^2 = SA^2 + AD^2$, то есть он является прямоугольным, $SA \perp AD$.

Из перпендикулярности $SA \perp AB$ и $SA \perp AD$ следует, что $SA \perp (ABC)$ и, следовательно, SA — высота пирамиды.

б) Проекция SC на плоскость SAB будет прямая SB . Таким образом, нужно найти угол между прямыми SC и SB (смотри рисунок), то есть угол $\varphi = \angle CSB$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник SCB . Тангенс угла φ равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{CB}{SB} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ.$$



Ответ: 30° .

Примечание.

Можно было бы найти косинусы углов DAS и BAS из треугольников DAS и BAS , применив по теореме косинусов. Оба косинуса равны нулю, из чего следует, что прямая SA перпендикулярна двух пересекающимся прямым DA и BA , лежащим в одной плоскости. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая SA перпендикулярна плоскости основания, а ребро SA — высота пирамиды.

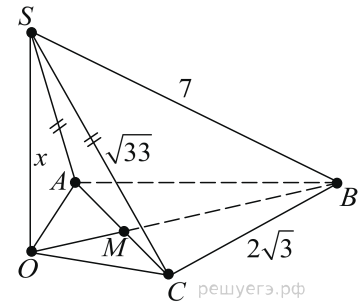
25. 25. 25. В пирамиде $SABC$ в основании лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, $SA = SC = \sqrt{33}$, $SB = 7$. Точка O — основание высоты пирамиды, проведённой из вершины S .

а) Докажите, что точка O лежит вне треугольника ABC .

б) Найдите объём четырёхугольной пирамиды $SABCO$.

Решение.

а) Поскольку $SA = SC$, точка S лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку AC и проходящей через его середину M . Следовательно, O лежит на прямой BM . Обозначим высоту пирамиды за x , тогда $AO = \sqrt{33 - x^2}$, $BO = \sqrt{49 - x^2}$. Следовательно, $x^2 \leq 33$ и $BO \geq \sqrt{49 - 33} = 4$. При этом $BM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3$, поэтому точка O лежит вне треугольника. Более того, поскольку $AO < BO$, она лежит на продолжении BM за точку M .



б) Из треугольника AMO находим $MO = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{30 - x^2}$. Тогда из треугольника BOS имеем

$$(3 + \sqrt{30 - x^2})^2 + x^2 = 49 \Leftrightarrow 6\sqrt{30 - x^2} = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30 - x^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{245}{9} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}\sqrt{5}.$$

Тогда $MO = \frac{5}{3}$, $BO = \frac{14}{3}$ и

$$V_{ABCO} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCO} = \frac{7}{9}\sqrt{5} \cdot AC \cdot BO \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{18}\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{14}{3} = \frac{98\sqrt{15}}{27}.$$

Ответ: $\frac{98\sqrt{15}}{27}$.

26. 26. 26. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

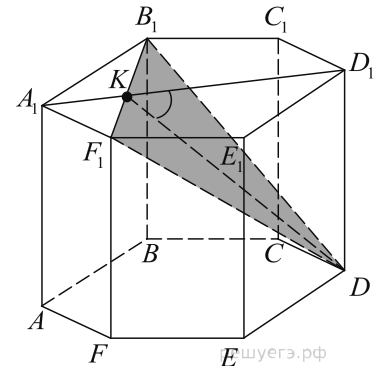
а) Докажите, что плоскости $AA_1 D_1$ и $DB_1 F_1$ перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и $DB_1 F_1$.

Решение.

а) Поскольку $B_1 F_1 \perp A_1 D_1$ (свойство диагоналей правильного шестиугольника) и $B_1 F_1 \perp A_1 A$ (поскольку верхнее основание призмы перпендикулярно боковому ребру), то $B_1 F_1 \perp AA_1 D_1$, а тогда и $DB_1 F_1 \perp AA_1 D_1$ (признак перпендикулярности плоскостей).

б) Отметим середину $B_1 F_1$ (точка K). Тогда $K \in A_1 D_1$, откуда $D_1 K \perp B_1 F_1$. Кроме того $DK \perp B_1 F_1$, поскольку $B_1 F_1 \perp AA_1 D_1$. Тогда



$$\operatorname{tg} \angle(ABC, DB_1 F_1) = \operatorname{tg} \angle(A_1 B_1 C_1, DB_1 F_1) = \operatorname{tg} \angle D_1 K D = \frac{D_1 D}{D_1 K} = \frac{1}{\frac{3}{4} D_1 A_1} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

27. 27. 27. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно $2\sqrt{197}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Решение.

а) Заметим, что хорда длиной 12 находится на расстоянии $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ от центра окружности основания, а хорда длиной 16, аналогично, — на расстоянии 6. Поэтому расстояние между их проекциями на плоскость, параллельную основаниям цилиндров, составляет либо $8 + 6 = 14$, либо $8 - 6 = 2$. Тогда расстояние между хордами составляет либо $\sqrt{28^2 + 14^2}$, либо $\sqrt{28^2 + 2^2}$. По условию реализовался второй случай, в нем проекции хорд лежат по одну сторону от оси цилиндра. Значит, ось не пересекает данную плоскость в пределах цилиндра, то есть основания лежат по одну сторону от нее.

б) Обозначим центры оснований за O_1 и O_2 . Проведем из центра основания с хордой длины 12 серединный перпендикуляр к этой хорде (он имеет длину 8, как уже отмечалось) и из центра другого основания — к другой хорде. Они лежат в одной плоскости β , перпендикулярной этим хордам. Назовем середину меньшей хорды B , большей A и проекцию A на второе основание — H ($H \in \beta$).

Тогда $AB, AH \in \beta$ и значит, AB, AH перпендикулярны хорде, то есть прямой пересечения основания с данной плоскостью.

Значит, искомый угол равен $\angle ABH = \arctg \frac{AH}{BH} = \frac{28}{8-6} = \arctg 14$.

Ответ: $\arctg 14$.

28. 28. 28. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1 .

б) Найдите угол между плоскостями $AD_1 C_1$ и $A_1 D_1 C$.

Решение.

а) Поскольку проекция прямой BD_1 на плоскость $ABCD$ — прямая $BD \perp AC$, то и $BD_1 \perp AC$. Аналогично $BD_1 \perp AB_1$ (надо рассмотреть плоскость $ABB_1 A_1$). Значит, BD_1 перпендикулярно двум пересекающимся прямым в плоскости $AB_1 C$, поэтому $BD_1 \perp AB_1 C$.

б) Будем считать, что ребро куба имеет длину 1. Очевидно, в обеих плоскостях лежит точка B , поэтому прямая пересечения у этих плоскостей BD_1 . Опустим на нее перпендикуляры из точек A и C (они упадут в одну точку из-за равенства треугольников ABD_1 и CBD_1) Пусть их основание — точка H . Рассмотрим треугольник ACH . В нем $AC = \sqrt{2}$,

$$AH = \frac{2S_{ABD_1}}{BD_1} = \frac{AB \cdot AD_1}{BD_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Напишем теперь теорему косинусов для треугольника ACH .

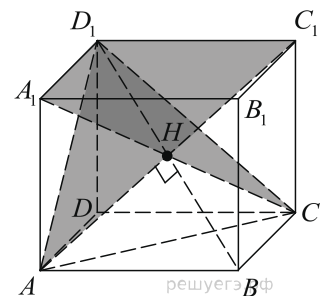
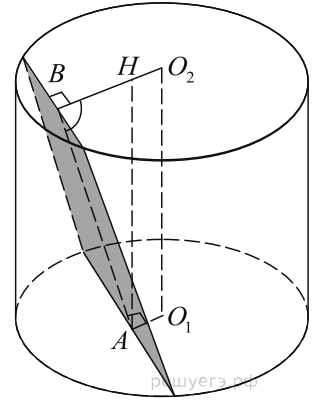
$$2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cos \angle AHC, \text{ откуда } \angle AHC = 120^\circ, \text{ а угол между плоскостями — } 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

29. 29. 29. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины ребер SA и SD и вершину C , делит апофему грани ASB в отношении $2 : 1$, считая от вершины S .

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины ребер SA и SD и вершину C , делит ребро SF , считая от вершины S .

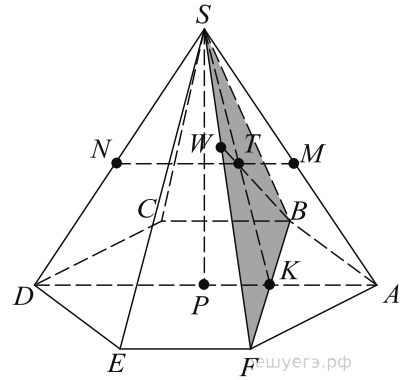


Решение.

а) Обозначим за M, N середины ребер SA и SD . Поскольку MN — средняя линия треугольника SAD , то $MN \parallel AD \parallel BC$, поэтому точка B также лежит в данной плоскости. Поэтому с гранью ABS данная плоскость пересекается по прямой BM — медиане треугольника SAB . Она делит его медиану SQ (Q — середина AB) в отношении $2 : 1$ считая от вершины.

б) Пусть $AD \cap BF = K$, $SK \cap MN = T$. Поскольку MN — средняя линия треугольника SAD , она делит отрезок SK пополам, то есть T — середина SK . Ясно, что T лежит в данной плоскости.

Рассмотрим теперь треугольник SBF . В нем проведена медиана SK и отмечена ее середина T . В данной плоскости лежит прямая BT , пересекающая SF в точке W . Осталось выяснить местоположение точки W .



Напишем теорему Менелая для треугольника FSK и прямой WTB : $\frac{FW}{WS} \cdot \frac{ST}{TK} \cdot \frac{KB}{BF} = 1$, откуда $\frac{FW}{WS} = 2$.

Ответ: $1 : 2$.

30. 30. 30. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 5$.

а) Найдите длину отрезка A_1K , где K — середина ребра BC .

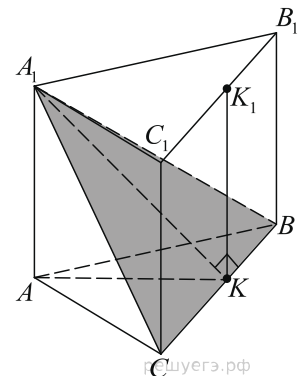
б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1 .

Решение.

а) По теореме Пифагора

$$A_1K = \sqrt{AA_1^2 + AK^2} = \sqrt{25 + (8\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 192 - 48} = 13.$$

б) Отметим точку K_1 — середину B_1C_1 . Поскольку $A_1K \perp BC$ (потому что его проекция на основание ABC — прямая AK — перпендикулярна BC) и $KK_1 \perp BC$ (потому что $KK_1 \parallel C_1C$), то



$$\angle((A_1BC), (BB_1C_1)) = \angle((A_1K), (KK_1)) = \angle A_1KK_1 = \angle KA_1A = \arccos \frac{AA_1}{A_1K} = \arccos \frac{5}{13}.$$

Тангенс найденного угла равен $\frac{12}{5}$.

Ответ: а) 13; б) $\frac{12}{5}$.

31. 31. 31. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

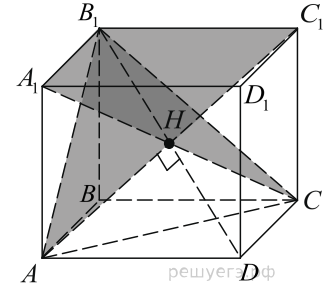
а) Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости A_1BC_1 .

б) Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C .

Решение.

а) Поскольку проекция прямой B_1D на плоскость $A_1B_1C_1D_1$ — прямая $B_1D_1 \perp A_1C_1$, то и $B_1D \perp A_1C_1$. Аналогично $B_1D \perp A_1B$ (надо рассмотреть плоскость ABB_1A_1). Значит, B_1D перпендикулярно двум пересекающимся прямым в плоскости A_1BC_1 , поэтому $B_1D \perp A_1BC_1$.

б) Будем считать, что ребро куба имеет длину 1. Очевидно, в обеих плоскостях лежит точка D , поэтому прямая пересечения у этих плоскостей B_1D . Опустим на нее перпендикуляры из точек A и C (они упадут в одну точку из-за равенства треугольников AB_1D и CB_1D). Пусть их основание — точка H . Рассмотрим треугольник ACH . В нем $AC = \sqrt{2}$,



$$AH = \frac{2S_{AB_1D}}{B_1D} = \frac{AB_1 \cdot AD}{B_1D} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Напишем теперь теорему косинусов для треугольника ACH .

$$2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cos \angle AHC, \text{ откуда } \angle AHC = 120^\circ, \text{ а угол между плоскостями } - 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

32. 32. 32. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L — середина ребра SC . Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

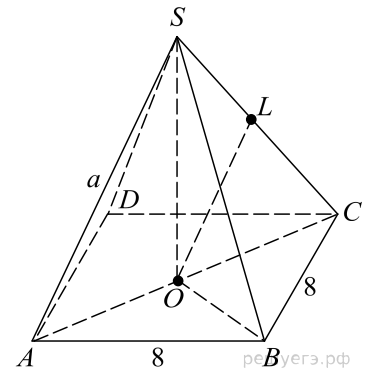
- а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.
б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

Решение.

а) Поскольку OL средняя линия треугольника SAC , $LO \parallel AS$. Но $AS \perp BD$ по теореме о трех перпендикулярах — проекция AS на плоскость основания пирамиды — прямая $AO \perp BD$. Значит и $LO \perp BD$.

б) Пусть $AS = a$. Тогда $BO = \frac{1}{2}BD = 4\sqrt{2}$, $OL = \frac{a}{2}$. Кроме того, $\operatorname{tg} \angle BLO = \frac{BO}{OL} = \frac{8\sqrt{2}}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, откуда $a = 4\sqrt{5}$. Тогда высота боковой грани пирамиды $h = \sqrt{80 - 16} = 8$ и площадь поверхности пирамиды

$$S = 4 \cdot \frac{AB \cdot h}{2} + AB^2 = 4 \cdot \frac{8 \cdot 8}{2} + 8^2 = 192.$$



Ответ: 192.

33. 33. 33. В пирамиде $DABC$ прямые, содержащие ребра DC и AB , перпендикулярны.

- а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку E — середину ребра DB , и параллельно DC и AB . Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.
б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если $DC = 24$, $AB = 10$.

Решение.

а) Построим прямые EK, EM, KF , такие что: $EK \parallel DC, EM \parallel AB, KF \parallel AB$, тогда $MF \parallel DC$ искомого сечения параллелограмм $EKFM$. Покажем, что $EKFM$ прямоугольник:

$$EM \parallel AB, EK \parallel DC, DC \perp AB \Rightarrow EM \perp EK.$$

б) $EK \parallel DC$ и E — середина DB , тогда EK — средняя линия треугольника DBC , значит $EK = \frac{1}{2}DC = 12$, аналогично $ME = \frac{1}{2}AB = 5$. Так как $EKMF$ прямоугольник, получаем:

$$MK^2 = ME^2 + EK^2 \Leftrightarrow MK^2 = 12^2 + 5^2 \Leftrightarrow MK = 13.$$

Пусть прямая MK пересекает прямую EF в точке O , тогда: $MO = OK = EO = OF = \frac{1}{2}MK = \frac{13}{2}$.
Заметим, что $EM < EK$. Применим теорему косинусов в треугольнике EOM :

$$EM^2 = MO^2 + OE^2 - 2MO \cdot OE \cdot \cos \angle EOM, \text{ следовательно, } \cos \angle EOM = \frac{2 \cdot \frac{169}{4} - 25}{2 \cdot \frac{169}{4}} = \frac{119}{169}.$$

Ответ: $\arccos \frac{119}{169}$.

34. 34. 34. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 4$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 9, AD = 6, AA_1 = 14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 ?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью $AA_1 B_1$.

Решение.

а) Так как $A_1 E : EA = 3 : 4$ и $AA_1 = 14$, то $AE = 8$ и $EA_1 = 6$. Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости DAA_1 и BCC_1 по параллельным прямым, поэтому она пересекает ребро BB_1 в такой точке Q , что прямая TQ параллельна прямой ED_1 . Значит, треугольники $EA_1 D_1$ и $QB_1 T$ подобны, а поскольку $EA_1 = A_1 D_1 = 6$, то и $QB_1 = B_1 T = 3$. Значит, $QB = 11$ и $QB_1 : QB = 3 : 11$.

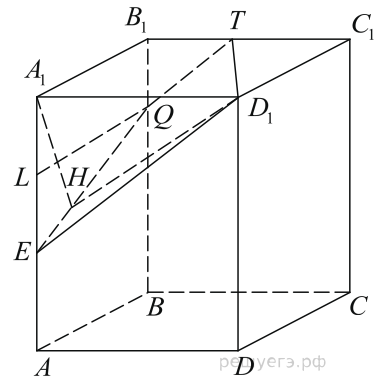
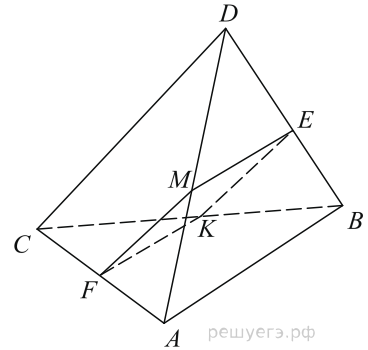
б) Так как прямая $A_1 D_1$ перпендикулярна плоскости $AA_1 B_1$, опустим перпендикуляр $A_1 H$ из точки A_1 на прямую EQ пересечения этих плоскостей. Угол $A_1 H D_1$ будет искомым. Найдём $A_1 H$. Для этого проведём в трапеции $EA_1 B_1 Q$ высоту $QL = 9$ (очевидно, L — середина EA_1). Теперь, вычисляя двумя способами площадь треугольника EQA_1 , найдём $A_1 H \cdot EQ = A_1 E \cdot QL$, то есть $A_1 H = \frac{QL \cdot A_1 E}{QE} = \frac{9 \cdot 6}{\sqrt{9^2 + 3^2}} = \frac{18}{\sqrt{10}}$. Тогда $\operatorname{tg} A_1 H D_1 = \frac{6}{\frac{18}{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Ответ: а) $3 : 11$; б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{10}}{3}$.

35. 35. 35. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3 : 1$, считая от вершины пирамиды.

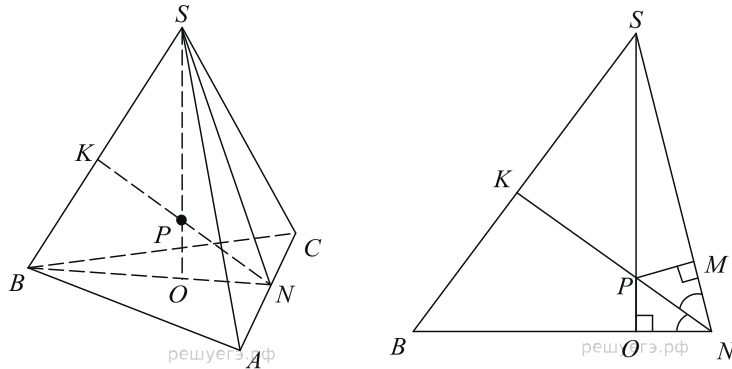
а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS .

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP .



Решение.

а) Точка O принадлежит отрезку BN , значит, точка P , лежащая на отрезке SO , находится в плоскости SBN . Значит, прямая NP также лежит в плоскости SBN и пересекает прямую SB в точке K . Треугольник SNB равнобедренный, поскольку отрезки SN и BN — медианы одинаковых равносторонних треугольников SAC и BAC . Поэтому $SN = BN$. В точке O пересекаются медианы основания, значит, $ON = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}SN$. Опустим перпендикуляр из точки P на сторону SN . Пусть он пересекает SN в точке M . Треугольники SPM и SNO подобны, поэтому $\frac{SP}{PM} = \frac{SN}{ON} = 3$. Значит, $PM = \frac{1}{3}SP = PO$. Следовательно, треугольники NPO и NPM равны и PN — биссектриса угла SNB . В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Значит, $NK \perp BS$.



б) Так как BS перпендикулярно NK , то искомое расстояние равно длине отрезка BK . Так как NK является медианой треугольника SNB , то $BK = \frac{1}{2}BS = 2$.

Ответ: 2.

36. 36. 36. Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.

б) Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если площадь сечения пирамиды плоскостью SAC равна 64.

Решение.

Сторона основания пирамиды равна 8. Тогда диагональ основания $AC = 8\sqrt{2}$.

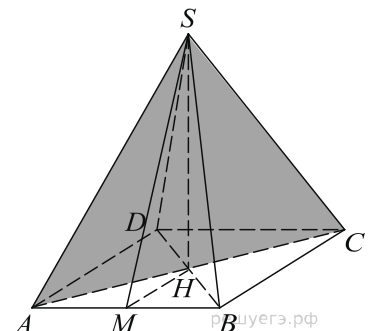
а) Пусть SH — высота пирамиды. Тогда H — середина основания пирамиды. Значит, SH — искомая прямая.

б) Площадь сечения, проходящего через S и диагональ AC , равна $\frac{1}{2}AC \cdot SH = 64$, откуда $SH = \frac{2 \cdot 64}{8\sqrt{2}}$. Пусть SM — высота грани SAB . Тогда

$$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{128 + 16} = 12.$$

Следовательно, $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 = 48$.
 $S_{\text{бок}} = 48 \cdot 4 = 192$.

Поэтому



Ответ: 192.

37. 37. 37. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 6. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра AS , точка L лежит на ребре BC так, что $BL : LC = 1 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

Решение.

Прямая S_1M пересекает медиану AO треугольника ABD в точке T так, что $AT : TO = 2 : 1$, поскольку T — точка пересечения медиан треугольника SAS_1 и O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$, так как пирамида $SABCD$ правильная.

Следовательно, $AT : TC = 1 : 2$. Точка L делит отрезок BC в отношении $BL : LC = 1 : 2$, следовательно, треугольники ACB и TCL подобны с коэффициентом подобия $k = AC : TC = BC : CL = 3 : 2$, так как они имеют общий угол с вершиной C и стороны AC и BC в треугольнике ABC пропорциональны сторонам TC и LC треугольника TCL , заключающим тот же угол. Значит, сторона сечения, проходящая через точки L и T , параллельна стороне AB основания пирамиды $SABCD$. Пусть эта сторона сечения пересекает сторону AD в точке P .

Сторона сечения, проходящая через точку M в плоскости SAB , параллельна прямой AB , так как плоскость S_1LM пересекает плоскость SAB и проходит через прямую PL , параллельную плоскости SAB . Пусть эта сторона сечения пересекает сторону SB в точке K . Тогда сечение $PMKL$ — равнобокая трапеция, поскольку $AP = BL$ и $AM = BK$.

Большее основание LP трапеции равно 6, поскольку $ABCD$ — квадрат. Второе основание MK трапеции равно 3, поскольку MK — средняя линия треугольника SAB . Значит, средняя линия трапеции равна $\frac{3+6}{2} = 4,5$.

Ответ: б) 4,5.

38. 38. 38. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

Решение.

а) Найдём стороны треугольника ATC_1 :

$$\begin{aligned} AT &= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}, \\ TC_1 &= \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}, \\ AC_1 &= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$AC_1^2 = 32 = 12 + 20 = AT^2 + TC_1^2.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ATC_1 является прямоугольным.

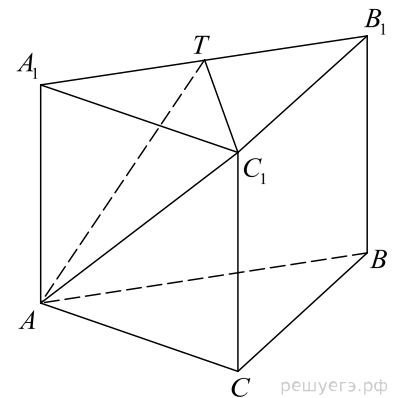
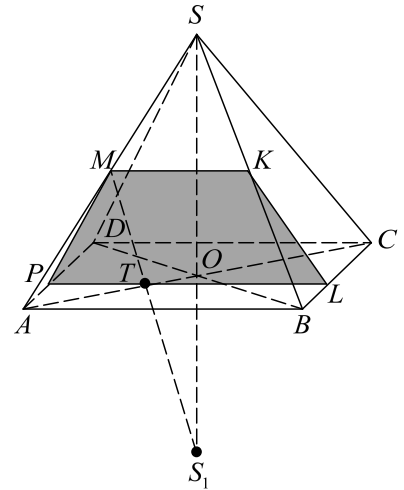
б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT , угол A_1TA искомый. Тангенс угла A_1TA равен

$$\operatorname{tg} A_1TA = \frac{AA_1}{A_1T} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: б) $\arctg 2$.

39. 39. 39. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$. На рёбрах AB , A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

- Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .



решуегэ.рф

Решение.

а) Плоскость MNK пересекает плоскости оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ по параллельным прямым, следовательно, прямые NK и ML параллельны.

Отрезки NK и ML не только параллельны, но и равны, поскольку равны треугольники ND_1K и MBL . Поэтому четырёхугольник $NKLM$ — параллелограмм. Покажем, что его стороны перпендикулярны.

Пусть P — проекция точки N на плоскость нижнего основания, тогда $AM = A_1N = AP = 1$, прямоугольные треугольники PAM и MBL равнобедренные, углы PMA и BML равны по 45° , а значит, $PML = 90^\circ$, то есть прямые PM и ML перпендикулярны. Но PM является проекцией наклонной NM , поэтому стороны параллелограмма NM и ML перпендикулярны по теореме о трех перпендикулярах.

Тем самым, $MNKL$ — квадрат.

б) Заметим, что косинус угла между плоскостью основания и плоскостью сечения равен $\cos \alpha = \frac{PM}{NM} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 0,5$. Площадь сечения связана с площадью проекции сечения на плоскость основания формулой $S_{\text{сеч}} = S_{\text{пр}} / \cos \alpha = 2S_{\text{пр}}$. Площадь проекции равна разности площади лежащего в основании квадрата и двух равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами 2. Тем самым, площадь проекции равна $9 - 4 = 5$, а площадь сечения равна 10.

Ответ: а) доказано; б) 10.

Приведём другое решение.

а) Покажем, что стороны четырёхугольника $MNKL$ равны и диагонали равны:

$$NK = ML = \sqrt{MB^2 + BL^2} = 2\sqrt{2},$$

$$LK = MN = \sqrt{MA^2 + AA_1^2 + A_1N^2} = 2\sqrt{2},$$

$$MK = \sqrt{(MB - KC_1)^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{(BL - NA_1)^2 + AB^2 + AA_1^2} = LN.$$

Поэтому $MNKL$ — квадрат.

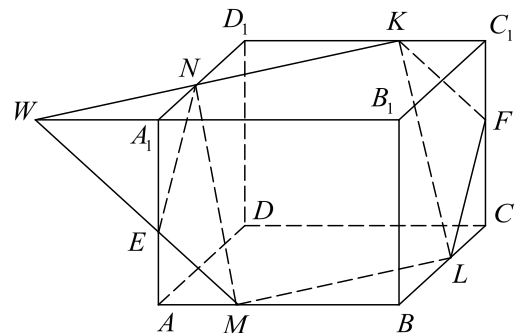
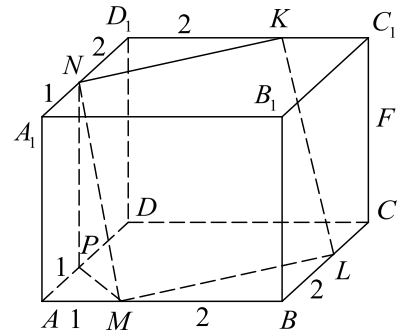
б) Пусть W — точка пересечения прямых NK и A_1B_1 . Тогда $WA_1 = NA_1$ как катеты равнобедренного прямоугольного треугольника. Пусть E — точка пересечения прямой WM с ребром AA_1 . Прямоугольные треугольники WA_1E и EAM подобны, а их катеты MA и WA_1 равны. Поэтому равны и другие катеты, а значит, E — середина AA_1 . Аналогично, плоскость MNK пересекает ребро CC_1 в его середине F . В прямоугольнике $AEFC$ противоположные стороны равны, поэтому $EF = AC = 3\sqrt{2}$.

Сечение — шестиугольник $MENKFL$ — состоит из двух равных трапеций $ENKF$ и $EMLF$, причём прямая MN перпендикулярна их основаниям. Поэтому искомая площадь сечения равна

$$2 \cdot \frac{ML + EF}{2} \cdot \frac{MN}{2} = 10.$$

Приведём другое вычисление.

Площадь сечения состоит является суммой площади квадрата со стороной $2\sqrt{2}$ и двух площадей равных равнобедренных треугольников с основанием $2\sqrt{2}$ и боковыми сторонами $\sqrt{10}$. Площадь квадрата равна 8, площади треугольников находим как половину произведения высоты на основание $\frac{1}{2} \sqrt{2,5 - 2} \cdot 2\sqrt{2} = 2$. Поэтому искомая площадь сечения равна 10.



40. 40. 40. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB=6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

- а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

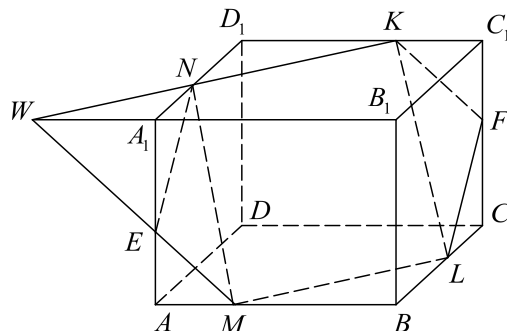
Решение.

а) Плоскость MNK пересекает плоскости оснований $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ по параллельным прямым, следовательно, прямые NK и ML параллельны, а $CL = 1$.

Покажем, что стороны четырёхугольника $MNKL$ равны и диагонали равны:

$$NK = ML = \sqrt{MB^2 + BL^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$LK = MN = \sqrt{MA^2 + AA_1^2 + A_1 N^2} = 5\sqrt{2},$$



$$MK = \sqrt{(MB - KC_1)^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{(BL - NA_1)^2 + AB^2 + AA_1^2} = LN.$$

Поэтому $MNKL$ — квадрат.

б) Пусть W — точка пересечения прямых NK и $A_1 B_1$. Тогда, так как $D_1 K = D_1 N$, получаем $WA_1 = NA_1 = MA = 1$, поэтому прямая WM , а значит и плоскость MWK пересекает ребро AA_1 в его середине E . Аналогично, плоскость MNK пересекает ребро CC_1 в его середине F .

В прямоугольнике $AEFC$ противоположные стороны: $EF = AC = 6\sqrt{2}$. Сечение $MENKFL$ состоит из двух равных трапеций $ENKF$ и $EMLF$, причём прямая MN перпендикулярна их основаниям. Поэтому искомая площадь сечения равна

$$2 \cdot \frac{ML + EF}{2} \cdot \frac{MN}{2} = 55.$$

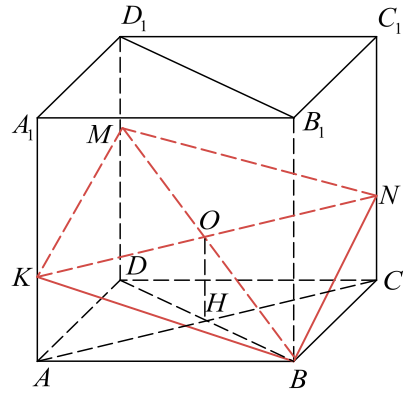
Ответ: а) доказано; б) 55.

41. 41. 41. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки B и K проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM : MD_1 = 2 : 1$.
 б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

Решение.

Пусть четырёхугольник $KBNM$ — сечение данной призмы плоскостью α (см. рисунок). Прямая AC параллельна плоскости α , а плоскость ACK пересекает плоскость α по прямой KN , следовательно $KN \parallel AC$ и, значит, $AKNC$ — прямоугольник. Прямые BD и AC являются соответственно проекциями прямых BM и KN на плоскость ABC , значит, точка пересечения прямых BD и AC (точка H) является проекцией точки пересечения прямых BM и KN (точки O) на эту плоскость. Таким образом, $OH = AK = \frac{1}{3}AA_1$. С другой стороны, отрезок OH — средняя линия треугольника BDM и, следовательно, $DM = 2OH = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}DD_1$, откуда и следует доказываемое утверждение.



б) Так как $AC \perp BD$ и $AC \perp BB_1$, то $AC \perp (BDD_1)$. Но $KN \parallel AC$, значит, и $KN \perp (BDD_1)$. Следовательно, $KN \perp BM$, поскольку $BM \subset (BDD_1)$ и площадь сечения S равна $S = \frac{BM \cdot KN}{2}$. Имеем:

$$KN = AC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$

$$BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{32 + 16} = 4\sqrt{3},$$

$$S = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{6}.$$

Ответ: б) $8\sqrt{6}$.

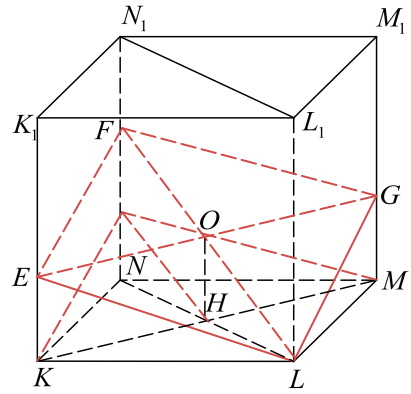
42. 42. 42. В правильной четырехугольной призме $KLMNK_1L_1M_1N_1$ точка E делит боковое ребро KK_1 в отношении $KE : EK_1 = 1 : 3$. Через точки L и E проведена плоскость α , параллельная прямой KM и пересекающая ребро NN_1 в точке F .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро NN_1 пополам.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью грани $KLMN$, если известно, что $KL = 6$, $KK_1 = 4$.

Решение.

Пусть четырёхугольник $ELGF$ — сечение данной призмы плоскостью α (см. рисунок). Прямая KM параллельна плоскости α , а плоскость KMG пересекает плоскость α по прямой EG , следовательно $EG \parallel KM$ и, значит, $KMGE$ — прямоугольник. Прямые NL и KM являются соответственно проекциями прямых FL и EG на плоскость KLM , значит, точка пересечения прямых KM и NL (точка H) является проекцией точки пересечения прямых FL и EG (точки O) на эту плоскость. Таким образом, $OH = EK = \frac{1}{4}KK_1$. С другой стороны, отрезок OH — средняя линия треугольника FLN и, следовательно, $FN = 2OH = 2 \cdot \frac{1}{4}KK_1 = \frac{1}{2}KK_1$, откуда и следует доказываемое утверждение.



б) Пусть точка D — середина отрезка FN . Тогда $EK = FD$ и $EK \parallel FD$, следовательно, $EKDF$ — параллелограмм и, значит, $EF \parallel KD$. Так как и $EG \parallel KM$, то $(KDM) \parallel (EFG)$ и, значит, $\angle((EFG); (KMN)) = \angle((KDM); (KMN))$. Поскольку $KLMN$ — квадрат, то $NH \perp KM$, но тогда, согласно теореме о трех перпендикулярах, и $DH \perp KM$. Таким образом, $\angle DHN = \varphi$ — линейный угол двугранного угла $\angle DKMN$. Из прямоугольного треугольника DNH находим $\operatorname{tg} \varphi = \frac{DN}{NH} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{6}$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{6}$.

43. 43. 43. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

Решение.

а) Найдём стороны треугольника ATC_1 :

$$\begin{aligned} AT &= \sqrt{36+9} = \sqrt{45}, \\ TC_1 &= \sqrt{36-9} = \sqrt{27}, \\ AC_1 &= \sqrt{36+36} = \sqrt{72}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$AC_1^2 = 72 = 45 + 27 = AT^2 + TC_1^2.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ATC_1 является прямоугольным.

б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT , угол A_1TA искомый. Тангенс угла A_1TA равен

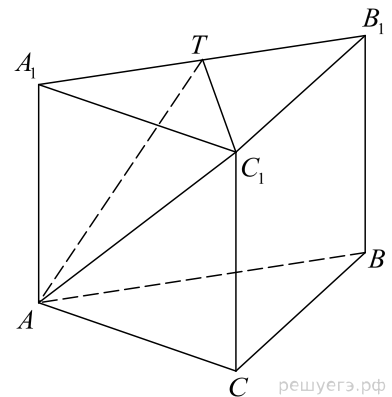
$$\operatorname{tg} A_1TA = \frac{AA_1}{A_1T} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} 2$.

44. 44. 44. В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AD и BC равны $AB = BD = DC = AC = 5$.

а) Докажите, что $AD = BC$.

б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60° .



решуегэ.рф

Решение.

а) Треугольник BAC — равнобедренный. Проведём $AM \perp BC$. M — середина BC , тогда $DM \perp BC$, так как треугольник BDC равнобедренный. $\angle AMD = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при ребре BC . Аналогично $\angle BNC = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при ребре AD . $\triangle ABC = \triangle DCB$ по трём сторонам, тогда $MA = MD$ и

$$\angle MAD = \frac{180^\circ - \varphi}{2} = \alpha.$$

Аналогично $\triangle BAD = \triangle CAD$ и $NB = NC$, а

$$\angle NBC = \frac{180^\circ - \varphi}{2} = \alpha.$$

Треугольники ANM и BMN равны по общему катету MN и острому углу α , тогда $AN = BM$. Но $AN = \frac{1}{2}AD$, $BM = \frac{1}{2}BC$, следовательно, $AD = BC$.

б) По условию $\varphi = 60^\circ$, тогда треугольник AMD равносторонний. Пусть $AD = AM = MD = BC = a$, тогда $BM = \frac{a}{2}$. В треугольнике AMB имеем $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 25$, откуда $a = 2\sqrt{5}$ и $AD = AM = MD = BC = 2\sqrt{5}$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 10;$$

$$DO = AD \cdot \sin \alpha = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{15},$$

тогда

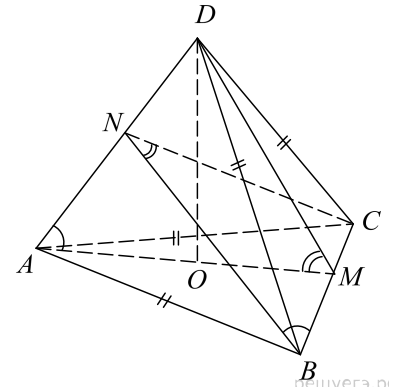
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \sqrt{15} = \frac{10\sqrt{15}}{3}.$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{15}}{3}$.

45. 45. 45. В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

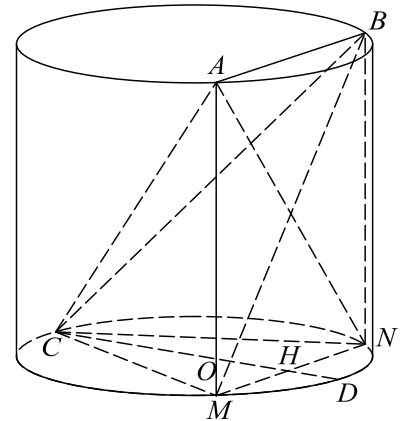


Решение.

а) Для построения сечения опустим перпендикуляры AM и BN на второе основание цилиндра. Отрезки AM и BN параллельны и равны, значит, $ABNM$ — параллелограмм. Так как прямые AM и BN перпендикулярны основаниям цилиндра и, в частности, прямой AB , параллелограмм $ABNM$ является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны, что и требовалось доказать.

б) Площадь прямоугольника $ABNM$ равна $12 \cdot 6 = 72$. Отрезок OH равен $\sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$. Высота CH пирамиды $CABNM$ равна $6 + 3\sqrt{3}$. Следовательно, объём пирамиды $CABNM$ равен

$$\frac{1}{3} \cdot 72 \cdot (6 + 3\sqrt{3}) = 144 + 72\sqrt{3}.$$



Ответ: б) $144 + 72\sqrt{3}$.

46. 46. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 1 : 3$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

Решение.

а) Проведём через точку K прямую, параллельную BD_1 . Пусть эта прямая пересекает плоскость грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ в точке L . Прямая KL лежит в плоскости $BB_1 D_1$, значит, точка L лежит на диагонали $B_1 D_1$. Более того,

$$B_1 L : LD_1 = B_1 K : KB = 3 : 4.$$

Прямая $C_1 L$ пересекает ребро $A_1 B_1$ в точке P , принадлежащей плоскости α .

Треугольники $B_1 L P$ и $D_1 L C_1$ подобны, поэтому

$$B_1 P : D_1 C_1 = B_1 L : D_1 L = 3 : 4.$$

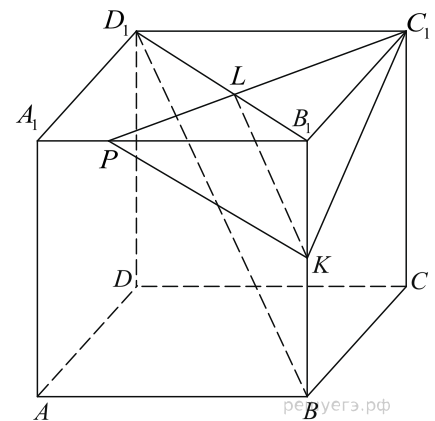
Значит, $A_1 P : PB_1 = 1 : 3$.

б) Объём куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 343. Объём тетраэдра $PKC_1 B_1$ равен

$$\frac{1}{6} B_1 P \cdot B_1 C_1 \cdot B_1 K = \frac{3}{56} B_1 A_1 \cdot B_1 C_1 \cdot B_1 B = \frac{147}{8}.$$

Значит, объём оставшейся части равен $\frac{2597}{8}$.

Ответ: б) $\frac{2597}{8}$.



47. 47. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .

Решение.

а) Стороны треугольника SBD равны 5, 5 и $5\sqrt{2}$, поэтому он прямоугольный, то есть прямая SD перпендикулярна прямой SB . Очевидно, что прямые SB и PQ параллельны как стороны равносторонних треугольников, тогда прямая SD перпендикулярна прямой PQ . Прямая AC перпендикулярна прямой BD , и по теореме о трёх перпендикулярах прямая AC перпендикулярна прямой SD , а значит, и прямая QR перпендикулярна прямой SD . Таким образом, плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .

б) Пусть плоскость PQR пересекает ребро SD в точке E . Из доказанного следует, что прямая PE перпендикулярна прямой SD , откуда

$$SE = SP \cos 60^\circ = \frac{3}{2}.$$

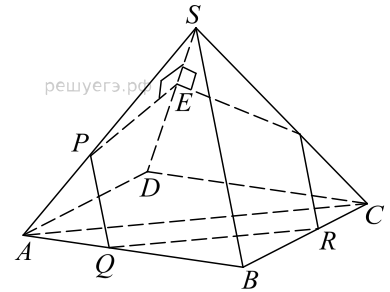
Значит, $DE = SD - SE = \frac{7}{2}$. Поскольку плоскость PQR перпендикулярна ребру SD , искомое расстояние равно DE .

Ответ: б) $\frac{7}{2}$.

48. 48. 48. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ ;

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .



Решение.

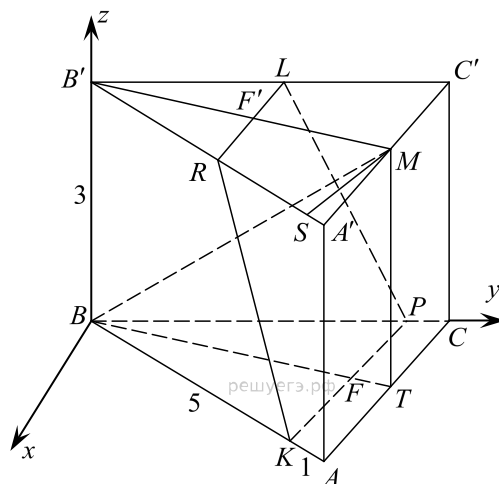
Построим сечение призмы плоскости плоскости γ . Проведём $KP \parallel AC$, $P \in CC'$, $CP = 1$. Проведём PL , проведём $LR \parallel AC$, $R \in A'B'$. Проведём RK . Трапеция $LPLR$ — искомое сечение. Сечение параллельно AC по признаку параллельности прямой к плоскости.

Решение 1. Введём систему координат как показано на рисунке. В этой системе координат:

$$B(0; 0; 0), C(0; 6; 0), B'(0; 0; 3), C'(0; 6; 3),$$

$$A(3\sqrt{3}; 3; 0), A'(3\sqrt{3}; 3; 3), P(0; 5; 0),$$

$$T\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 0\right), \quad M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3\right), \quad K\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; 0\right).$$



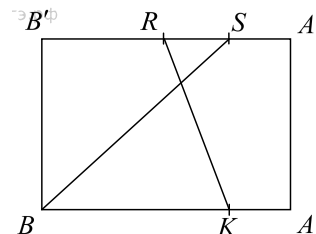
Тогда

$$\overrightarrow{BM} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3 \right); \overrightarrow{KP} = \left(\frac{-5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; 0 \right); \overrightarrow{LP} = (0; 2; -3);$$

Откуда получаем:

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{KP} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3 \right) \cdot \left(\frac{-5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; 0 \right) = -\frac{45}{4} + \frac{45}{4} + 0 = 0.$$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{LP} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3 \right) \cdot (0; 2; -3) = 0 + 9 - 9 = 0.$$



Так как $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{KP}$ и $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{LP}$ получаем, что $BM \perp (KLP)$. Что и требовалось доказать.

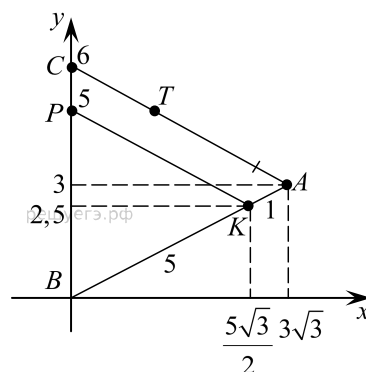
Далее заметим, что плоскость сечения перпендикулярна вектору $\overrightarrow{BM}$, найдем уравнение плоскости и вычислим расстояние от точки до плоскости:

Найдём свободный член D в уравнении плоскости $\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{9}{2}y + 3z + D = 0$, подставив координаты точки К:

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot 0 + D = 0 \Leftrightarrow \frac{45}{4} + \frac{45}{4} + D = \frac{90}{4} + D = \frac{45}{2} + D, \text{ поэтому } D = -\frac{45}{2}.$$

Тогда для искомого расстояния получаем:

$$dist(C; (KLP)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \frac{9}{2} \cdot 6 + 3 \cdot 0 - \frac{45}{2}|}{\sqrt{\frac{27}{4} + \frac{81}{4} + 9}} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{\frac{108}{4} + 9}} = \frac{\frac{9}{2}}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$



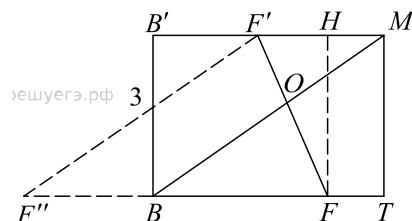
Укажем идею другого решения.

Четырёхугольник $RLPK$ — искомое сечение. Проведём плоскость $B'MTB$.

$$B'M \cap RL = F'; BT \cap KP = F'; (B'MT) \cap \gamma = F'F.$$

Рассмотрим прямоугольник $BB'MT$.

F' — середина $B'M$.



$$F'M = \frac{1}{2}B'M = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{FT}{BT} = \frac{KA}{BA} : (\Delta BKF \sim \Delta BAT).$$

$$\frac{FT}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{6}; FT = \frac{\sqrt{3}}{2}..$$

$$BM = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = 6. \quad F'F = \sqrt{F'H^2 + HF^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}.$$

$$F''F' \parallel BM; F''B = F'M = \frac{3\sqrt{3}}{2}; F''F = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}.$$

$$(F''F')^2 + (F'F)^2 = (F''F)^2; 6^2 + (2\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{3})^2.$$

$36 + 12 = 48$, следовательно, $F''F' \perp F'F$, следовательно, $BM \perp FF'$.

49. 49. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = 4$, $C_1 L = 5$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ ;
- б) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ .

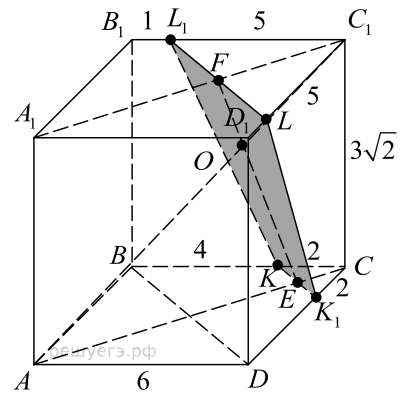
Решение.

а) Так как плоскость γ параллельна диагонали основания BD , то пересекает основание $ABCD$ по прямой KK_1 параллельной BD , K_1 лежит на CD . Так как, $ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$, прямая сечения LL_1 параллельна BD , где L_1 лежит на B_1C_1 . Сечением призмы будет трапеция KK_1LL_1 .

Для того, чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, необходимо, чтобы она была перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Заметим, что проекцией прямой AC_1 на плоскость $ABCD$ является прямая AC . Кроме того, $AC \perp BD$, как диагонали квадрата таким образом по теореме о трех перпендикулярах $AC_1 \perp BD$, следовательно, $AC_1 \perp KK_1$.

Рассмотрим плоскость AA_1C_1C . Пусть эта плоскость пересекает прямые KK_1 и LL_1 в точках E и F соответственно. O — точка пересечения EF и AC_1 . Четырёхугольник AA_1C_1C — прямоугольник, причём



$$AA_1 = 3\sqrt{2}, AC = 6\sqrt{2}, EC = \sqrt{2}, AE = 5\sqrt{2}, FC_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Так как AA_1C_1C — прямоугольник, $\triangle AEO \sim \triangle C_1FO$, $k = \frac{AE}{C_1F} = 2$. Значит, $C_1O = \frac{AC_1}{3}$, $FO = \frac{FE}{3}$.

Таким образом,

$$C_1O = \frac{1}{3}\sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{10}, FO = \frac{1}{3}\sqrt{(FC_1 - CE)^2 + CC_1^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Тогда по обратной теореме Пифагора $C_1O^2 + FO^2 = 10 + \frac{5}{2} = \frac{25}{2} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = C_1F^2$,

следовательно, треугольник C_1FO прямоугольный, $AC_1 \perp EF$. Таким образом, $AC_1 \perp KK_1LL_1$.

б) Расстояние от точки B_1 до плоскости γ равно расстоянию до нее от любой точки параллельной ей прямой B_1D_1 . Из точки M — пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$ в плоскости AA_1C_1C опустим перпендикуляр MH на прямую EF . Так как, по доказанному в п. а) $AC_1 \perp KK_1LL_1$, плоскость $AA_1C_1C \perp KK_1LL_1$, следовательно, указанный перпендикуляр — искомое расстояние. Найдем

$$MF = \frac{A_1C_1}{2} - FC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{Заметим,} \quad \triangle MFH \sim \triangle C_1FO, k = \frac{MF}{FC_1} = \frac{1}{5}. \quad \text{Таким образом,}$$

$$MH = \frac{C_1O}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

50. 50. 50. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

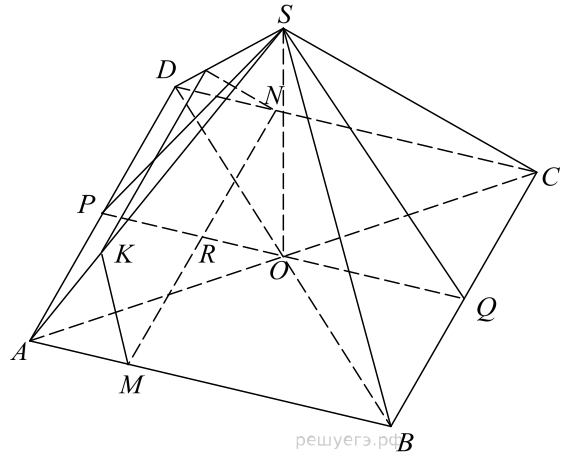
Решение.

а) Пусть O — центр основания пирамиды (рис. 1), тогда

$$AO = 8\sqrt{2}, AS = \sqrt{AO^2 + OS^2} = 12.$$

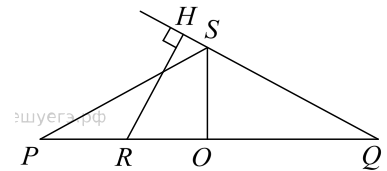
Заметим, что $AM : AB = AK : AS$, значит прямые MK и BS параллельны. Кроме того, прямые MN и BC также параллельны, поэтому плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Пусть точки P , Q и R — середины отрезков AD , BC и MN соответственно. Плоскости MNK и SBC параллельны, а плоскость SPQ перпендикулярна прямой BC , поэтому искомое расстояние равно расстоянию от точки R до прямой QS . Опустим из точки R перпендикуляр RH на прямую SQ (рис. 2). Тогда



$$RH = RQ \cdot \sin \angle PQS = MB \cdot \frac{SO}{SQ} = MB \cdot \frac{SO}{\sqrt{SO^2 + OQ^2}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.



51. 51. 51. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

- а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

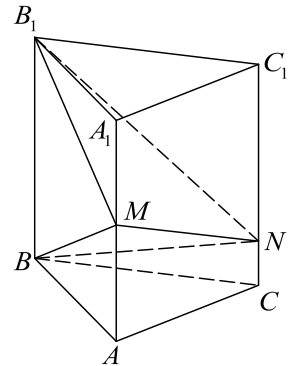
Решение.

Площадь основания призмы равна $9\sqrt{3}$, а объём призмы равен $54\sqrt{3}$.

В четырёхугольной пирамиде $B_1A_1C_1NM$ высота совпадает с высотой основания призмы $A_1B_1C_1$, опущенной на сторону A_1C_1 , и равна $3\sqrt{3}$. Основание A_1C_1NM пирамиды $B_1A_1C_1NM$ является трапецией, площадь которой равна 27. Значит, объём пирамиды $B_1A_1C_1NM$ равен $27\sqrt{3}$, то есть составляет половину объёма призмы. Поэтому объёмы многогранников $B_1A_1C_1NM$ и $ABCMB_1N$ равны.

б) В четырёхугольной пирамиде $BACNM$ высота совпадает с высотой основания призмы ABC , опущенной на сторону AC , и равна $3\sqrt{3}$. Основание пирамиды $BACNM$ является трапецией, площадь которой равна 9. Объём пирамиды $BACNM$ равен $9\sqrt{3}$.

Многогранник $ABCMB_1N$ состоит из двух частей: $BACNM$ и $MNBB_1$. Значит, объём тетраэдра $MNBB_1$ равен $18\sqrt{3}$.



Ответ: $18\sqrt{3}$.

52. 52. 52. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB , соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD .

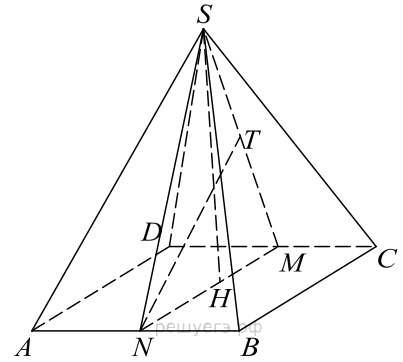
- а) Докажите, что точка T является серединой SM .
б) Найдите расстояние между NT и SC .

Решение.

а) Поскольку пирамида $SABCD$ правильная, точки T и H лежат в плоскости SNM , перпендикулярной плоскости ABC (рис. 1).

$$\begin{aligned}AH &= \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}, \\AS &= \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{15}, \\MN &= AD = 2\sqrt{3}, \\SM = SN &= \sqrt{SA^2 - AN^2} = 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

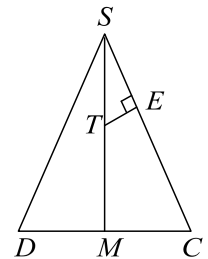
Значит, треугольник SNM равносторонний, а NT — его высота. Следовательно, T — середина SM .



б) Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки T на прямую SC (рис. 2). Прямые NT и TE перпендикулярны, так как NT — высота пирамиды $NSCD$. Поскольку отрезок TE перпендикулярен как прямой SC , так и прямой NT , его длина и есть искомое расстояние.

Прямоугольные треугольники SET и SMC подобны, следовательно, $\frac{ET}{MC} = \frac{ST}{SC}$, откуда

$$ET = \frac{ST \cdot CM}{SC} = \frac{SM \cdot CD}{4SC} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$



Ответ: б) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

53. 53. 53. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L , соответственно, причём $AK = 2$, а $B_1L = 4$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна ребру AC и содержит точки K и L .

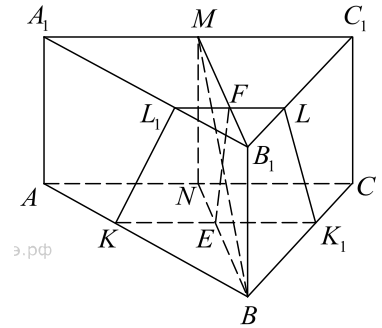
- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

Решение.

а) Проведём через точки K и L прямые, параллельные AC . Пусть эти прямые пересекают рёбра BC и A_1B_1 в точках K_1 и L_1 соответственно (рис. 1). Тогда трапеция KL_1LK_1 является сечением исходной призмы плоскостью γ . Рассмотрим плоскость BB_1M . Пусть эта плоскость пересекает прямые AC , KK_1 и LL_1 в точках N , E и F соответственно. Четырёхугольник BB_1MN — прямоугольник, причём

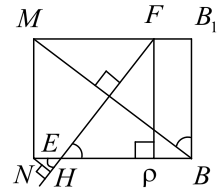
$$BB_1 = 3\sqrt{6},$$

$$B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1B_1 = 6\sqrt{3}.$$



Кроме того, $NE : EB = AK : KB = 1 : 5$,
 $B_1F : FM = B_1L : LC_1 = 1 : 2$, откуда $MF = 4\sqrt{3}$, $NE = \sqrt{3}$. Пусть FP — высота трапеции EFB_1B (рис. 2), тогда

$$EP = MF - NE = 3\sqrt{3}.$$



Поскольку $\operatorname{tg} \angle BEF = \frac{FP}{EP} = \sqrt{2} = \frac{MB_1}{BB_1} = \operatorname{tg} \angle MBB_1$, $\angle BEF = \angle MBB_1 = 90^\circ - \angle MBE$,
 то есть прямые EF и BM перпендикулярны.

Прямая KK_1 параллельна прямой AC , которая перпендикулярна плоскости BB_1M . Значит, прямые KK_1 и EF перпендикулярны прямой BM , поэтому прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Поскольку прямая AC параллельна плоскости γ , расстояние от точки C до плоскости γ равно расстоянию от точки N до прямой EF . Тогда

$$NH = NE \cdot \sin \angle NEH = NE \cdot \sin \angle BEF = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Ответ: б) $\sqrt{2}$.

54. 54. 54. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L , соответственно, причём $AK = B_1L = 3$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна ребру AC и содержит точки K и L .

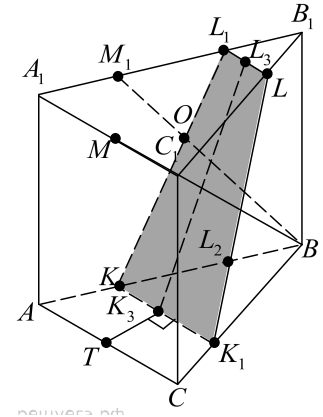
а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

Решение.

а) Отметим точки L_1 и K_1 на ребрах A_1B_1 и CB соответственно так чтобы $LL_1 \parallel A_1C_1$, $KK_1 \parallel AC$. Тогда плоскость γ это плоскость LL_1KK_1 .

Очевидно $BM \perp KK_1$, поскольку проекция BM на плоскость ABC — высота треугольника ABC . Она перпендикулярна AC , а значит и KK_1 . По теореме о трех перпендикулярах $BM \perp KK_1$. Рассмотрим теперь проекцию M_1 точки M на плоскость AA_1B_1B . Поскольку проекция C_1 на эту плоскость — середина ребра A_1B_1 , то $A_1M_1 = \frac{1}{4}A_1B_1 = 3$. Докажем теперь, что прямая BM_1 перпендикулярна KL_1 . Тогда по теореме о трех перпендикулярах окажется что $BM \perp KL_1$, а тогда и $BM \perp \gamma$. Обозначим за O точку пересечения отрезков B_1M_1 и KL_1 , за L_2 — проекцию точки L_1 на прямую AB . Тогда



$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \angle OBK &= \operatorname{tg} \angle M_1BK = \frac{M_1K}{KB} = \frac{AA_1}{9} \\ \operatorname{tg} \angle OKB &= \operatorname{tg} \angle L_1KL_2 = \frac{LL_2}{L_2K} = \frac{AA_1}{6} \\ \frac{AA_1}{9} \cdot \frac{AA_1}{6} &= \frac{AA_1^2}{54} = 1\end{aligned}$$

Итак, тангенсы этих углов обратны друг другу, поэтому углы в сумме дают 90° и $\angle KOB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

б) Пусть T — середина AC . Тогда $d(C, \gamma) = d(T, \gamma)$, поскольку $AC \parallel \gamma$.

Соединим середины LL_1 и KK_1 (точки L_3 и K_3). Опустим из T перпендикуляр на L_3K_3 — это и будет искомое расстояние. В самом деле, все эти точки лежат в плоскости TBB_1 , перпендикулярной к KK_1 , поэтому и описанный выше перпендикуляр тоже перпендикулярен KK_1 . Рассмотрим прямоугольную трапецию TML_3K_3 . В ней $TK_3 = \frac{1}{4} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $ML_3 = \frac{3}{4} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$, поскольку отрезки KK_1 и LL_1 делят высоты оснований призмы в отношениях $3:1$ и $1:3$ считая от вершины соответственно, а высоты равны $6\sqrt{3}$.

$$MT = 3\sqrt{6}, \text{ тогда } K_3L_3 = \sqrt{MT^2 + (L_3M - K_3T)^2} = \sqrt{54 + 27} = 9.$$

Наконец,

$$d(T, K_3L_3) = \frac{2S_{TK_3L_3}}{K_3L_3} = \frac{d(L_3, TK_3) \cdot TK_3}{9} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

55. 55. 55. Есть правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания 12 и высотой 3. Точка K — середина BC , точка L лежит на стороне A_1B_1 так, что $B_1L = 5$. Точка M — середина A_1C_1 .

Через точки K и L проведена плоскость таким образом, что она параллельна прямой AC .

а) Доказать, что указанная выше плоскость перпендикулярна прямой MB .

б) Найти объем пирамиды с вершиной в точке B и у которой основанием является сечение призмы плоскостью.

Решение.

а) Отметим точки L_1 и K_1 на ребрах B_1C_1 и AB соответственно так чтобы $LL_1 \parallel A_1C_1$, $KK_1 \parallel AC$. Тогда плоскость γ это плоскость LL_1KK_1 .

Очевидно $BM \perp KK_1$, поскольку проекция BM на плоскость ABC — высота треугольника ABC . Она перпендикулярна AC , а значит и KK_1 . По теореме о трех перпендикулярах $BM \perp KK_1$.

Рассмотрим теперь проекцию M_1 точки M на плоскость AA_1B_1B . Поскольку проекция C_1 на эту плоскость — середина ребра A_1B_1 , то $A_1M_1 = \frac{1}{4}A_1B_1 = 3$. Докажем теперь, что прямая BM_1 перпендикулярна K_1L . Тогда по теореме о трех перпендикулярах окажется что $BM \perp K_1L$, а тогда и $BM \perp \gamma$.

Обозначим за O точку пересечения отрезков BM_1 и K_1L , за M_2 и L_2 — проекции точек M_1 и L на прямую AB . Тогда

$$\operatorname{tg} \angle OBK_1 = \operatorname{tg} \angle M_1BM_2 = \frac{M_1M_2}{M_2B} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \angle OK_1B = \operatorname{tg} \angle LK_1L_2 = \frac{LL_2}{L_2K_1} = \frac{3}{6-5} = 3.$$

Итак, тангенсы этих углов обратны друг другу, поэтому углы в сумме дают 90° и угол $K_1OB_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

б) Очевидно $LL_1 = 5$, так как BLL_1 — равносторонний треугольник.

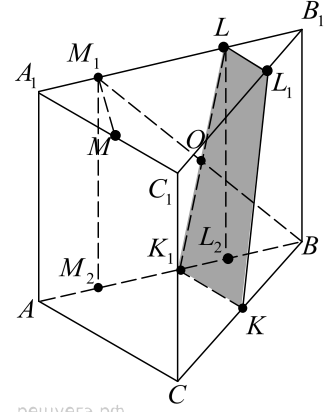
$$\begin{aligned} V_{BLL_1KK_1} &= V_{L_1BKK_1} + V_{LK_1BL_1} = \frac{1}{3}d(L_1, K_1BK) \cdot S_{K_1BK} + \frac{1}{6}K_1B \cdot LL_1 \cdot d(K_1B, LL_1) \cdot \sin \angle(K_1B, LL_1) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 5 \cdot d(ABC, A_1B_1C_1) \cdot \sin \angle(LB_1, LL_1) = \\ &= 9\sqrt{3} + 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{33\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{33\sqrt{3}}{2}$.

56. 56. 56. На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .



Решение.

а) Пусть прямые AP и BC пересекаются в точке R (см. рисунок). Тогда точка M — точка пересечения прямых QR и CC_1 .

Треугольники ARB и PRC подобны, откуда $\frac{RC}{RB} = \frac{PC}{AB} = \frac{2}{3}$; $RC = 2BC = 24$.

Треугольники QRB и MRC подобны, откуда $\frac{MC}{QB} = \frac{RC}{RB}$, следовательно, $MC = \frac{2}{3}QB = 6$. Значит, M — середина CC_1 .

б) Расстояние от точки C до плоскости APQ равно высоте h пирамиды $CPRM$, опущенной из вершины C . Объём пирамиды $CPRM$, с одной стороны, равен

$$\frac{1}{3} \cdot RC \cdot S_{MPC} = \frac{1}{3} \cdot RC \cdot \frac{1}{2} PC \cdot CM = 192.$$

С другой стороны, объём пирамиды $CPRM$ равен $\frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{RPM}$. Значит,

$$h = \frac{3 \cdot 192}{S_{RPM}}.$$

В треугольнике RPM находим стороны: $RP = 8\sqrt{10}$, $RM = 6\sqrt{17}$, $MP = 10$. По теореме косинусов

$$\cos \angle MRP = \frac{MR^2 + RP^2 - MP^2}{2MR \cdot RP} = \frac{12}{\sqrt{170}},$$

откуда $\sin \angle MRP = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{170}}$.

Площадь треугольника RPM равна $S_{RPM} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{170}} = 24\sqrt{26}$.

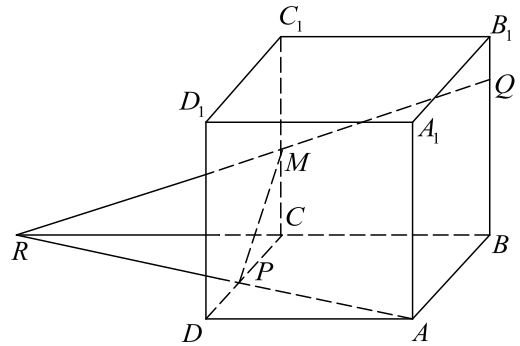
Следовательно, $h = \frac{3 \cdot 192}{24\sqrt{26}} = \frac{12\sqrt{26}}{13}$.

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$.

57. 57. 57. На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 8 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 7$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость $A_1 P Q$ пересекает ребро CC_1 в точке M .

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости $A_1 P Q$.



Решение.

а) Пусть K и N — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно. Прямая KN лежит одновременно в ACC_1A_1 и BDD_1B_1 , пусть O — точка пересечения PQ и KN . Заметим, что

$$ON = \frac{PD_1 + B_1Q}{2} = 2.$$

В треугольнике A_1C_1M отрезок ON — средняя линия, $C_1M = 2ON = 4$, значит, M — середина CC_1 .

б) Расстояние от C_1 до A_1PQ — высота h пирамиды C_1PQM , опущенная из вершины C_1 . Выразим объём двумя способами:

$$V_{C_1PQM} = \frac{1}{3} \cdot C_1D_1 \cdot S_{QMC_1} = \frac{1}{3} AB \cdot \frac{1}{2} \cdot C_1M \cdot BC = \frac{128}{3}.$$

С другой стороны,

$$V_{C_1PQM} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{PQM},$$

откуда $h = \frac{128}{S_{PQM}}.$

Заметим, теперь, что $D_1P = 1$, По теореме Пифагора:

$$MQ = A_1P = \sqrt{A_1D_1^2 + D_1P^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65},$$

$$PM = A_1Q = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1Q^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73},$$

$$PQ = \sqrt{B_1D_1^2 + (B_1Q - D_1P)^2} = \sqrt{128 + 4} = 2\sqrt{33}.$$

Далее из теоремы косинусов:

$$\cos \angle PMQ = \frac{PM^2 + MQ^2 - PQ^2}{2PM \cdot MQ} = \frac{3}{\sqrt{73}\sqrt{65}},$$

$$\sin \angle PMQ = \frac{8\sqrt{74}}{\sqrt{73}\sqrt{65}},$$

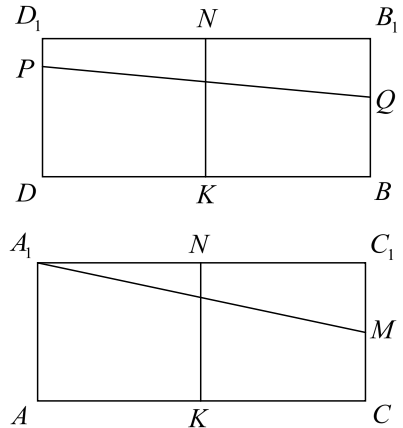
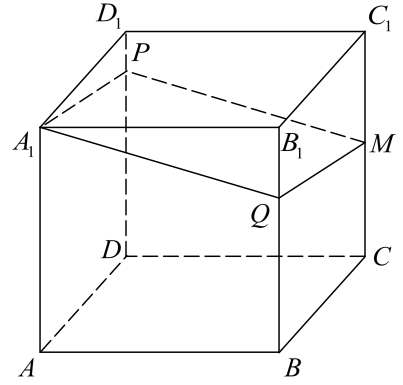
тогда $S_{PQM} = 4\sqrt{74}$, откуда $h = \frac{32}{\sqrt{74}}.$

Ответ: $\frac{32}{\sqrt{74}}.$

58. 58. 58. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах B_1C_1 и AB отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M .

а) Докажите, что точка M является серединой ребра BC .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ .



Решение.

а) Пусть прямые A_1Q и BB_1 пересекаются в точке R (см. рисунок). Тогда точка M — точка пересечения прямых PR и BC .

Треугольники A_1B_1R и QBR подобны, откуда

$$\frac{BR}{B_1R} = \frac{QB}{A_1B_1} = \frac{2}{3};$$

$$RB = 2BB_1 = 4.$$

Треугольники PB_1R и MBR подобны, откуда

$$\frac{BM}{B_1P} = \frac{BR}{B_1R} = \frac{2}{3};$$

$$BM = \frac{2}{3}B_1P = 6.$$

Значит, M — середина BC .

б) Расстояние от точки B до плоскости A_1PQ равно высоте h пирамиды $BRQM$, опущенной из вершины B . Значит, с одной стороны, объём пирамиды $BRQM$

$$V_{BRQM} = \frac{1}{3} \cdot RB \cdot S_{QMB} = \frac{1}{3} \cdot RB \cdot \frac{1}{2} BQ \cdot BM \cdot \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}.$$

С другой стороны, $V_{BRQM} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{QMR}$. Таким образом,

$$h = \frac{3 \cdot 16\sqrt{3}}{S_{QMR}}.$$

Найдем стороны треугольника QMR :

$$QM = \sqrt{BQ^2 + BM^2 - 2 \cdot BQ \cdot BM \cdot \cos 60^\circ} = 2\sqrt{13},$$

$$MR = \sqrt{BM^2 + DR^2} = 2\sqrt{13},$$

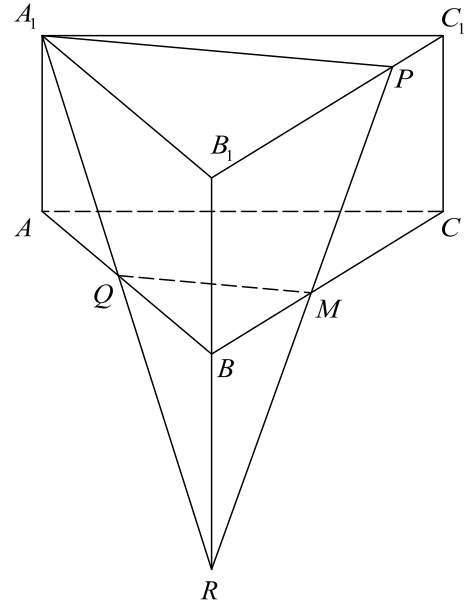
$$QR = \sqrt{BQ^2 + BR^2} = 4\sqrt{5}.$$

Площадь равнобедренного треугольника QMR равна

$$S_{QMR} = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot \sqrt{QM^2 - \frac{QR^2}{4}} = 8\sqrt{10}.$$

$$\text{Следовательно, } h = \frac{3 \cdot 16\sqrt{3}}{8\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{30}}{5}$.



59. 59. 59. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

Решение.

а) Проведём через точки K и L прямые, параллельные BD . Пусть эти прямые пересекают рёбра CD и B_1C_1 в точках K_1 и L_1 соответственно (рисунок 1). Тогда трапеция KL_1LK_1 является сечением исходной призмы плоскостью γ . Рассмотрим плоскость ACC_1 . Пусть эта плоскость пересекает прямые KK_1 и LL_1 в точках E и F соответственно. Четырёхугольник AA_1C_1C — прямоугольник, причём

$$AA_1 = 4\sqrt{2}, \\ AC = 8\sqrt{2}.$$

Кроме того, $\frac{AC}{EC} = \frac{2BC}{KC} = \frac{8}{3}$, $\frac{A_1C_1}{FC_1} = \frac{2d_1C_1}{LC_1} = 8$, откуда

$EC = 3\sqrt{2}$, $C_1F = \sqrt{2}$. Пусть FP — высота трапеции EFC_1C (рисунок 2), тогда $EP = EC - C_1F = 2\sqrt{2}$.

Поскольку $\operatorname{tg} \angle CEF = \frac{FP}{EP} = 2 = \frac{A_1C_1}{CC_1} = \operatorname{tg} \angle A_1CC_1$,

$$\angle CEF = \angle A_1CC_1 = 90^\circ - \angle A_1CA,$$

то есть прямые EF и A_1C перпендикулярны.

Прямая KK_1 параллельна прямой BD , которая перпендикулярна плоскости AA_1C . Значит, прямые KK_1 и EF перпендикулярны прямой A_1C , поэтому прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ .

б) Пусть N — точка пересечения AC и BD . Поскольку прямая BD параллельна плоскости γ , расстояние от точки B до плоскости γ равно расстоянию от точки N до прямой EF . Опустим из точки N перпендикуляр NH на прямую EF . Тогда

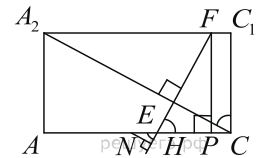
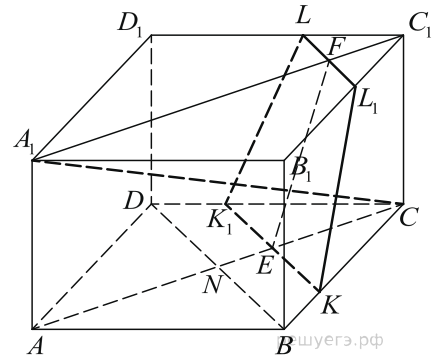
$$NH = NE \angle NEH = \left(\frac{AC}{2} - EC \right) \cdot \sin \angle CEF = \sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

60. 60. 60. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке U .

а) Докажите, что $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .



Решение.

а) Пусть прямые AP и BB_1 пересекаются в точке X (см. рисунок).

Тогда точка U — точка пересечения прямых XQ и B_1C_1 .

Треугольники AXB и PXB_1 подобны, откуда

$$\frac{XB_1}{XB} = \frac{PB_1}{AB} = \frac{1}{2};$$

$$B_1X = BB_1 = 2.$$

Треугольники B_1XU и C_1QU подобны, откуда

$$\frac{B_1U}{C_1U} = \frac{B_1X}{C_1Q} = 2;$$

$$B_1U = 2C_1U.$$

Значит, $B_1U : UC_1 = 2 : 1$.

б) Пусть Y — точка пересечения прямых QX и BC , а V — точка пересечения прямых CD и AY . Тогда пятиугольник $APUQV$ — сечение, площадь которого надо найти.

Треугольники C_1UQ и CYQ равны, откуда $CY = C_1U = 1$.

Треугольники AYB и VYC подобны, откуда $\frac{VC}{AB} = \frac{CY}{BY} = \frac{1}{4}$, $VC = \frac{AB}{4} = 1$. Четырёхугольник $APUY$ — равнобедренная трапеция, в которой

$$AP = PU = UY = 2\sqrt{2}$$

$$AY = 4\sqrt{2}.$$

Треугольник QYV — равносторонний со стороной $\sqrt{2}$, нетрудно вычислить, что его площадь $S_{QYV} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Вычислим высоту трапеции $APUY$, $h = \sqrt{AP^2 - \left(\frac{AY - PU}{2}\right)^2} = \sqrt{6}$. Таким образом, её

площадь $S_{APUY} = \frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{3}$. Значит, искомая площадь равна

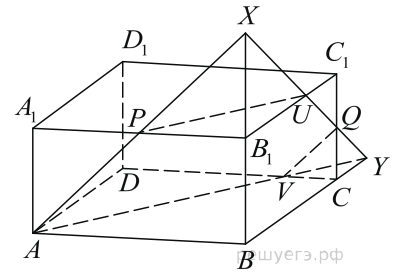
$$S_{APUY} - S_{QYV} = 6\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

61. 61. 61. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , $AC = 4$, $BC = 16$, $AA_1 = 4\sqrt{2}$. Точка Q — середина ребра A_1B_1 , а точка P делит ребро B_1C_1 в отношении $1 : 2$, считая от вершины C_1 . Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ .



Решение.

а) Пусть R — точка пересечения прямых PQ и A_1C_1 , а K — середина B_1C_1 (см. рисунок). Тогда точка M — точка пересечения прямых AR и CC_1 .

Треугольники PKQ и PC_1R подобны, откуда

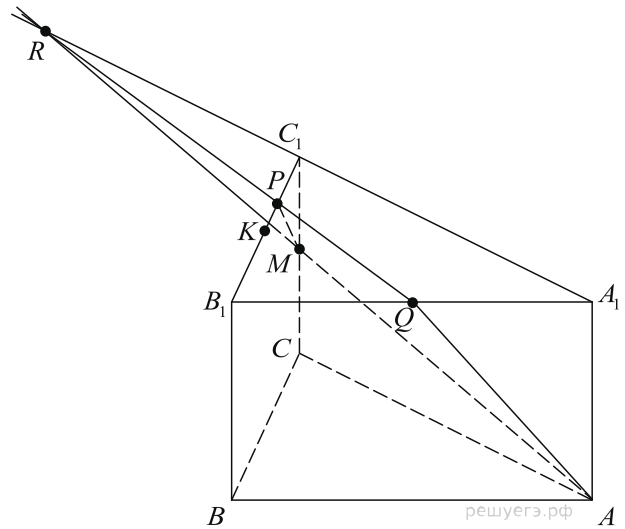
$$\frac{C_1R}{KQ} = \frac{C_1P}{KP} = 2;$$

$$C_1R = 2KQ = A_1C_1 = 4.$$

Отрезок C_1M — средняя линия треугольника AA_1R , поскольку $A_1C_1 = C_1R$ и прямые AA_1 и CC_1 параллельны. Значит,

$$C_1M = \frac{A_1A}{2} = \frac{C_1C}{2}.$$

то есть M — середина CC_1 .



б) Расстояние от точки A_1 до плоскости APQ равно высоте h пирамиды A_1AQR , опущенной из вершины A_1 .

С одной стороны, объём пирамиды A_1AQR равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{B_1C_1}{2} S_{AA_1R} = \frac{1}{3} \cdot \frac{B_1C_1}{2} \cdot \frac{1}{2} AA_1 \cdot A_1R = \frac{128\sqrt{2}}{3}.$$

С другой стороны, объём пирамиды A_1AQR равен $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{AQR}$. Значит,

$$h = \frac{128\sqrt{2}}{S_{AQR}}.$$

В треугольнике AQR находим стороны:

$$AQ = QR = 10,$$

$$AR = 4\sqrt{6}.$$

Площадь равнобедренного треугольника AQR равна

$$S_{AQR} = \frac{1}{2} \cdot AR \sqrt{AQ^2 - \frac{AR^2}{4}} = 4\sqrt{114}.$$

Следовательно,

$$h = \frac{128\sqrt{2}}{4\sqrt{114}} = \frac{32\sqrt{57}}{57}.$$

Ответ: $\frac{32\sqrt{57}}{57}$.

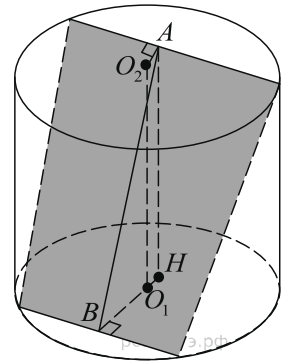
62. 62. 62. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Решение.

а) Заметим, что хорда длиной 24 находится на расстоянии $\sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ от центра окружности основания, а хорда длиной 10, аналогично, — на расстоянии 12. Поэтому расстояние между их проекциями на плоскость, параллельную основаниям цилиндров, составляет либо $5+12=17$, либо $12-5=7$. Тогда расстояние между хордами составляет либо $\sqrt{21^2 + 17^2}$, либо $\sqrt{21^2 + 7^2}$. По условию реализовался первый случай, в нем проекции хорд лежат по разные стороны от оси цилиндра. Значит, ось пересекает данную плоскость в пределах цилиндра, то есть центры оснований лежат по разные стороны от нее.



б) Обозначим центры оснований за O_1 и O_2 . Проведем из центра основания с хордой длины 24 серединный перпендикуляр к этой хорде (он имеет длину 5, как уже отмечалось) и из центра другого основания — к другой хорде. Они лежат в одной плоскости β , перпендикулярной этим хордам. Назовем середину меньшей хорды B , большей A и проекцию A на второе основание — H ($H \in \beta$).

Тогда $AB, AH \in \beta$ и значит AB, AH перпендикулярны хорде, то есть прямой пересечения основания с данной плоскостью.

Значит искомый угол это $\angle ABH$.

$$\operatorname{tg} \angle ABH = \frac{AH}{BH} = \frac{21}{5+12}$$

Ответ: $\frac{21}{17}$.

63. 63. 63. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.

а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1 .

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1 .

Решение.

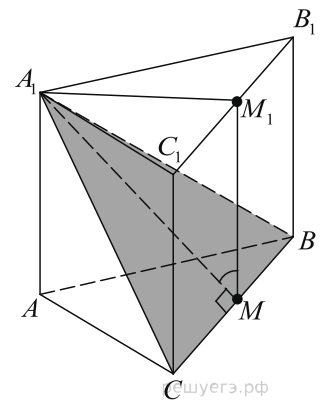
а) Обозначим середину B_1C_1 за M_1 , а середину BC за M . Тогда $CB \perp A_1M_1$, поскольку $B_1C_1 \parallel BC$. Кроме того, $BC \perp AA_1$, поэтому $BC \perp AA_1M_1$. Тогда и $BCA_1 \perp AA_1M_1$.

б) Рассмотрим треугольник A_1MM_1 . Заметим что $A_1M \perp BC$ как медиана равнобедренного треугольника CA_1B и $MM_1 \parallel BB_1$, то

$$\angle(A_1CB, C_1B_1BC) = \angle(A_1M, MM_1) = \angle A_1MM_1.$$

$$\text{Значит } \operatorname{tg} \angle(A_1CB, C_1B_1BC) = \frac{A_1M_1}{MM_1} = \frac{7\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{8} = \frac{21}{16}.$$

Ответ: $\frac{21}{16}$.



64. 64. 64. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 4. Точка L — середина ребра SC . Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

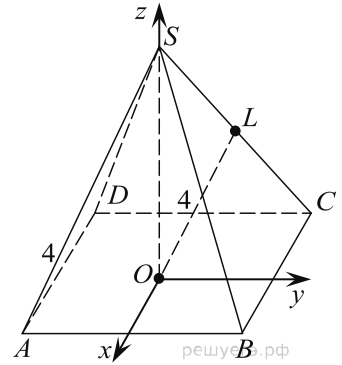
а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

Решение.

а) Заметим, что при проецировании на плоскость $ABCD$ точка S проецируется в точку O . Поэтому проекция SC это OC , значит проекция L тоже лежит на OC и проекция LO тоже прямая OC . Поскольку $OC \perp OB$ как диагонали квадрата, по теореме о трех перпендикулярах $LO \perp OB$.

б) Сразу отметим, что $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, поэтому $\cos \angle(BL, SA) = \frac{\sqrt{17}}{5}$. Введем координаты, направив оси из точки O параллельно сторонам квадрата и через вершину S . Обозначая высоту пирамиды за $2h$, находим координаты точек $B(2, 2, 0)$, $C(-2, 2, 0)$, $A(2, -2, 0)$, $S(0, 0, 2h)$, $L(-1, 1, h)$. Тогда $\overrightarrow{BL} = \{-3, -1, h\}$, $\overrightarrow{AS} = \{-2, 2, 2h\}$.



Посчитаем угол между этими векторами:

$$\cos \varphi = \frac{4 + 2h^2}{\sqrt{10 + h^2} \sqrt{8 + 4h^2}} = \frac{\sqrt{2 + h^2}}{\sqrt{10 + h^2}} = \frac{\sqrt{17}}{5}.$$

Решая уравнение, находим $h^2 = 15$ и высота пирамиды $SO = 2\sqrt{15}$. Тогда апофема $SH = \sqrt{60 + 4} = 8$ и площадь поверхности $S_{\text{пов}} = 4^2 + 4 \cdot \frac{8 \cdot 4}{2} = 80$.

Ответ: 80.

65. 65. 65. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды 144.

а) Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен 45° .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC .

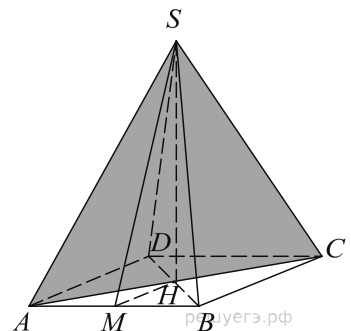
Решение.

Площадь основания пирамиды равна $144 - 108 = 36$, поэтому $AB = 6$. Площадь боковой грани равна $\frac{108}{4} = 27$. Пусть SM — высота грани SAB . Тогда

$$S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot 3 = 27,$$

поэтому $SM = 9$.

а) Пусть SH — высота пирамиды. Тогда H — середина основания пирамиды. Значит, SH — прямая, по которой пересекаются данные плоскости. Прямая SH перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости основания пирамиды, в том числе и прямым AH и MH . Значит, угол между плоскостями SAC и SMH — это угол AHM , который равен 45° .



б) Имеем $SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$. Тогда $S_{SAC} = \frac{SH \cdot AC}{2} = 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 36$.

Ответ: 36.

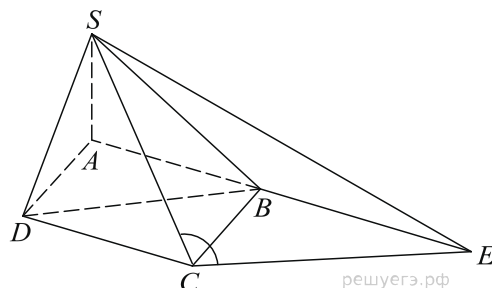
66. 66. 66. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

Решение.

В треугольнике SAB имеем:
 $SB^2 = 85 = 21 + 64 = SA^2 + AB^2$, поэтому треугольник SAB прямоугольный с гипотенузой SB и прямым углом SAB .
 Аналогично, из равенства $SD^2 = 57 = 21 + 36 = SA^2 + AD^2$ получаем, что $\angle SAD = 90^\circ$. Так как прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD , прямая SA перпендикулярна плоскости ABD .



б) На прямой AB отметим такую точку E , что $BDCE$ — параллелограмм, тогда $BE = DC = AB$ и $DB = CE$. Найдём угол SCE . По теореме Пифагора:

$$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 11 \text{ и } SE^2 = SA^2 + AE^2 = 277.$$

По теореме косинусов:

$$SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cdot \cos \angle SCE \Leftrightarrow 277 = 121 + 100 - 220 \cos \angle SCE \Leftrightarrow \cos \angle SCE = -\frac{14}{55}.$$

Искомый угол равен $\arccos \frac{14}{55}$.

Ответ: б) $\arccos \frac{14}{55}$.

67. 67. 67. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M середина ребра $C_1 D_1$, а точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 3$. Через точки K и M проведена плоскость α , параллельная прямой BD и пересекающая диагональ $A_1 C$ в точке O .

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ $A_1 C$ в отношении $A_1 O : OC = 3 : 5$.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC) , если дополнительно известно, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб.

Решение.

а) Поскольку плоскость α параллельна прямой BD , она параллельна и прямой B_1D_1 , а, значит, плоскость α , пересекает плоскость $B_1D_1C_1$ по некоторой прямой MN , параллельной прямой B_1D_1 . Пусть точка $N \in B_1C_1$ и прямая MN пересекает прямую A_1C_1 в точке L , а прямая KL пересекает прямую CC_1 в точке P . Тогда точка пересечения прямых A_1C и KL есть точка пересечения плоскости α с диагональю A_1C (см. рис. 1).

Прямая MN параллельна B_1D_1 и точка M середина ребра C_1D_1 . Значит, отрезок MN — средняя линия треугольника $B_1C_1D_1$ и, следовательно, $LC_1 = \frac{1}{4}A_1C_1$.

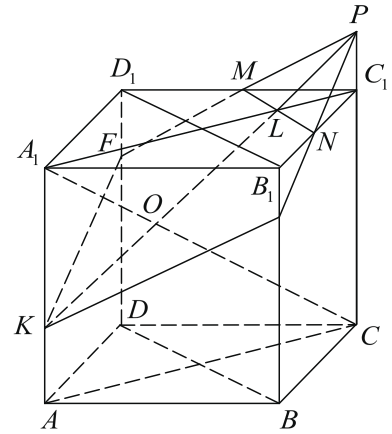


Рис. 1 решуегз.рф

Положим $AA_1 = a$, тогда $A_1K = \frac{3}{4}a$. Далее имеем (см. рис. 2):

1) $\triangle PC_1L \sim \triangle KA_1L$, откуда $\frac{PC_1}{KA_1} = \frac{LC_1}{LA_1} = \frac{1}{3}$. Отсюда находим:

$$PC_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}a = \frac{1}{4}a, \text{ и тогда } PC = \frac{5}{4}a.$$

2) $\triangle A_1OK \sim \triangle COP$, откуда

$$\frac{A_1O}{OC} = \frac{A_1K}{PC} = \frac{3a \cdot 4}{4 \cdot 5a} = \frac{3}{5},$$

что и требовалось доказать.

б) Из того, что $MN \parallel B_1D_1$ и $A_1C_1 \perp B_1D_1$, получаем, что $MN \perp A_1C_1$. А значит, согласно теореме о трех перпендикулярах, $MN \perp LC_1$. Кроме того, $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$. Таким образом, угол PLC_1 — линейный угол искомого двугранного угла.

Далее имеем: $A_1C_1 = \sqrt{2}a$, $LC_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}a$, $PC_1 = \frac{1}{4}a$. Из

треугольника PLC_1 находим: $\operatorname{tg} \angle PLC_1 = \frac{PC_1}{LC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда

$$\angle PLC_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

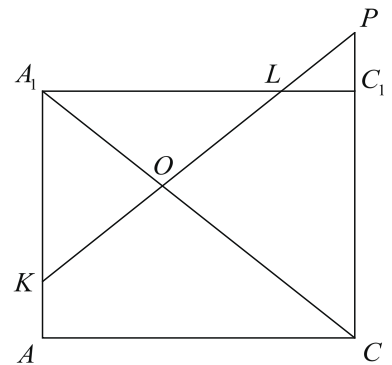


Рис. 2 решуегз.рф

68. 68. 68. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка F середина ребра AB , а точка E делит ребро DD_1 в отношении $DE : ED_1 = 6 : 1$. Через точки F и E проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая диагональ B_1D в точке O .

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ DB_1 в отношении $DO : OB_1 = 2 : 3$.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC) , если дополнительно известно, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная четырехугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.

Решение.

а) Поскольку плоскость α параллельна прямой AC , то она пересекает грань $ABCD$ по некоторой прямой FL , параллельной прямой AC . Пусть точка $L \in BC$ и прямая FL пересекает прямую BD в точке K а прямая KE пересекает прямую BB_1 в точке P . Тогда точка пересечения прямых B_1D и KE есть точка пересечения плоскости α с диагональю B_1D (см. рис. 1).

Прямая FL параллельна AC , значит точка F середина ребра AB . Тогда, отрезок FL — средняя линия треугольника ABC и, следовательно, $BK = \frac{1}{4}BD$.

Положим $DD_1 = a$, тогда $DE = \frac{6}{7}a$.

Далее имеем (см. рис. 2):

1) Треугольники BKP и DKE — подобны, откуда $\frac{BP}{DE} = \frac{BK}{DK} = \frac{1}{3}$. Таким образом $BP = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7}a = \frac{2}{7}a$, $PB_1 = \frac{9}{7}a$.

2) Треугольники DOE и B_1OP — подобны, откуда $\frac{DO}{OB_1} = \frac{DE}{PB_1} = \frac{6a \cdot 7}{7 \cdot 9a} = \frac{2}{3}$, что и требовалось доказать.

б) Из того, что $FL \parallel AC$ и $AC \perp BD$, получаем, что $FL \perp BD$. Значит, согласно теореме о трех перпендикулярах, $FL \perp BK$. Таким образом, угол PKB — линейный угол искомого двугранного угла.

Учитывая, что $PB = \frac{2}{7}BB_1 = 2$ и $BK = \frac{1}{4}BD = \sqrt{2}$, из треугольника PBK находим: $\operatorname{tg} \angle PKB = \frac{PB}{BK} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, откуда $\angle PKB = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

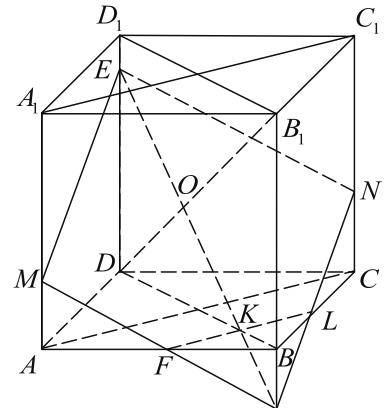


Рис. 1

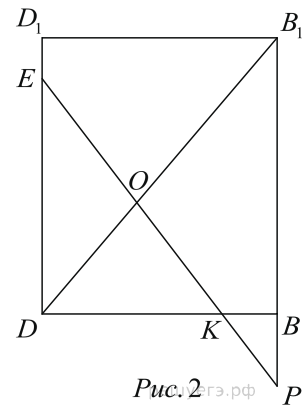


Рис. 2

Примечание.

На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед, соответствующий условию пункта б).

Решение пункта а) справедливо для произвольного параллелепипеда.

69. 69. 69. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

Решение.

Плоскость α проходит через точку B , лежащую в плоскости основания, и параллельна прямой AC , лежащей в плоскости основания. Следовательно, плоскость α пересекает плоскость основания по прямой, содержащей точку B и параллельной AC . Пусть эта прямая пересекает продолжения сторон DA и DC основания в точках E и F соответственно. Тогда α пересекает плоскость боковых граней по прямым D_1E и D_1F . Пусть M и N — точки пересечения этих прямых с боковыми рёбрами параллелепипеда, тогда BMD_1N — сечение параллелепипеда плоскостью α .

Поскольку плоскость сечения проходит через прямую EF , параллельную плоскости ACC_1A_1 и пересекает её по прямой MN , прямая MN параллельна EF , а значит, параллельна AC .

По условию, сечение является ромбом, диагонали ромба перпендикулярны, поэтому $D_1B \perp MN$ и $D_1B \perp AC$. По теореме о трёх перпендикулярах, из перпендикулярности наклонной D_1B и прямой AC следует перпендикулярность прямой AC проекции наклонной — прямой DB . Этим показано, что диагонали лежащего в основании прямоугольника взаимно перпендикулярны. Следовательно, этот прямоугольник является квадратом, что и требовалось доказать.

Приведем другое рассуждение. Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, поэтому MN проходит через середину D_1B . Кроме того, прямая MN параллельна прямой AC , а значит, и прямой EF . Из этого следует, что MN — средняя линия треугольника ED_1F , а тогда точки M и N — середины рёбер параллелепипеда. Прямоугольные треугольники ABM и A_1D_1M равны по гипотенузе и катету: $AM = A_1M$, $BM = D_1M$. Значит, $AB = A_1D_1 = AD$, а $ABCD$ является квадратом.

б) Пусть K — середина ребра BB_1 , а KH — высота треугольника BKN . Тогда плоскость MKN перпендикулярна прямой BN . Значит, угол MHK — линейный угол искомого двугранного угла. (Или: проведём перпендикуляры MK и KH , по теореме о трёх перпендикулярах MH — также перпендикуляр к BN , поэтому MHK — линейный угол искомого двугранного угла).

В прямоугольном треугольнике BKN имеем: $BN = \sqrt{BK^2 + KN^2} = 5$, $KH = \frac{BK \cdot KN}{BN} = \frac{12}{5}$, откуда

$$\angle MHK = \arctg \frac{MK}{KH} = \arctg \frac{5}{3}.$$

Иначе. Сечение является ромбом, площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S_{MD_1N} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{68} = 4\sqrt{34}$. Проекцией ромба сечения на боковую грань BCC_1B_1 является параллелограмм BKC_1N , площадь которого равна половине площади прямоугольника BCC_1B_1 то есть 12. Поскольку $S_{пр} = S \cos \alpha$, для искомого угла между плоскостями получаем:

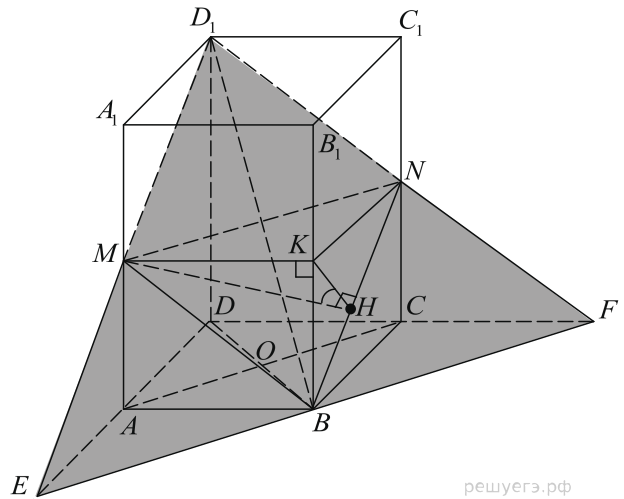
$$\alpha = \arccos \frac{S_{пр}}{S} = \arccos \frac{12}{4\sqrt{34}} = \arccos \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Ответ: $\arctg \frac{5}{3}$ (или $\arccos \frac{3}{\sqrt{34}}$).

70. 70. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .



Решение.

а) Имеем $DE = 7 - BE = 4$. Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке M . Треугольники BME и DCE подобны, поэтому $\frac{BM}{DC} = \frac{BE}{DE} = \frac{3}{4}$, откуда $BM = 3$. Тогда $AM = 1$. Треугольники ABS и AMF подобны, значит, $FM \parallel SB$. Поэтому прямая SB параллельна плоскости CEF .

0

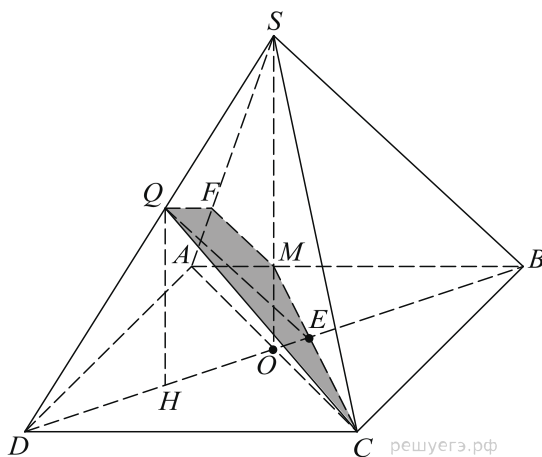
б) Из доказанного в предыдущем пункте следует, что $QE \parallel SB$. Тогда $\frac{DQ}{QS} = \frac{DE}{EB} = \frac{4}{3}$. Пусть O — центр основания $ABCD$. Так как все боковые ребра пирамиды равны, SO — высота пирамиды. Имеем:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{16 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Плоскость SDB перпендикулярна плоскости основания, и проекция H точки Q на плоскость основания лежит на отрезке DO . Из подобия треугольников DQH и DSO находим

$$QH = \frac{4}{7} \cdot SO = \frac{2\sqrt{15}}{7}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{15}}{7}$.



71. 71. Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4$.

а) Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка AP .

Решение.

а) Введём систему координат как показано на рисунке. Поскольку ребро куба в корень $\sqrt{3}$ меньше его диагонали, ребро данного куба равно $\sqrt{3}$. Тогда точки B, D, C_1 имеют координаты $(0; \sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; 0; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \sqrt{3}; 0)$ соответственно.

Поскольку P лежит на продолжении A_1C , отрезок A_1P можно рассматривать как диагональ куба с ребром $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Тогда точка P имеет координаты $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

Найдём расстояние от P до точек D_1, B и C_1 :

$$PD = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{6}.$$

Отрезки C_1B, DB и DC_1 — диагонали граней куба, поэтому по теореме Пифагора $C_1B = DB = DC_1 = \sqrt{6}$. Тогда $PD = PC_1 = PB = C_1B = DB = DC_1$. Значит, все рёбра тетраэдра DBC_1P равны, поэтому он правильный.

б) Координаты точки A : $(0; 0; \sqrt{3})$. Расстояние от точки P до точки A равно

$$\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{11}.$$

Ответ: $\sqrt{11}$.

Приведём другое решение.

а) Диагональ куба в $\sqrt{3}$ больше его ребра: $A_1C = \sqrt{3}AB$.

Следовательно, $AB = \frac{A_1C}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Заметим, что $BC_1 = C_1D = BD = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ как диагонали квадратов со стороной AB . Тогда треугольник BC_1D — правильный.

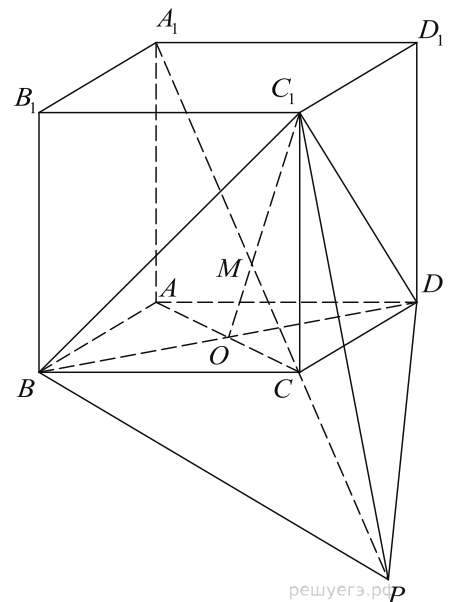
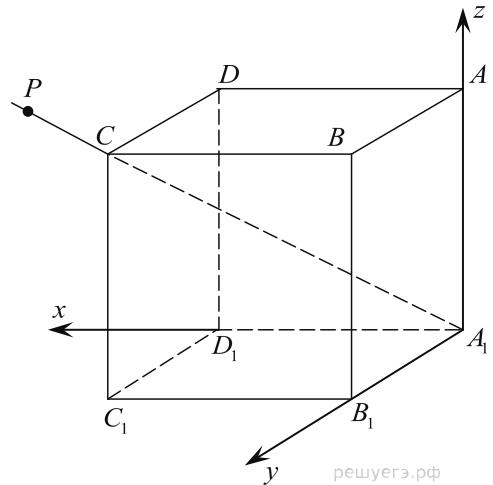
Пусть $BD \cap AC = O$, $C_1O \cap A_1C = M$. Поскольку $ABCD$ — квадрат имеем: $AO = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Поскольку $\angle C_1A_1C = \angle A_1CA$ как накрест лежащие, и $\angle A_1MC_1 = \angle OMC$ как вертикальные, получаем: $\Delta A_1MC_1 \sim \Delta CMO$ по двум углам, тогда $\frac{OM}{C_1M} = \frac{OC}{A_1C_1} = \frac{A_1M}{CM} = \frac{1}{2}$.

Заметим, что треугольник C_1CO — прямоугольный, тогда $C_1O = \sqrt{\frac{6}{4} + 3} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, откуда

$$OM = \frac{1}{3}C_1O = \frac{1}{\sqrt{2}}; C_1M = \frac{2}{3}C_1O = \sqrt{2}; CM = \frac{1}{3}A_1C = 1.$$

В треугольнике OMC имеем: $OC^2 = OM^2 + MC^2$, так как $\frac{6}{4} = \frac{1}{2} + 1$ — верно. Тогда, по теореме, обратной теореме Пифагора, ΔOMC — прямоугольный, $\angle M = 90^\circ$.



Так как $BO = OD$ (C_1O — медиана), $\frac{C_1M}{OM} = \frac{2}{1}$ и $\triangle BDC_1$ — правильный, то M — точка пересечения медиан, биссектрис и высот $\triangle BDC_1$, то есть центр описанной окружности.

Так как M — центр описанной окружности треугольника BC_1D и $\angle C_1MC = 90^\circ$, то проекция точки P — точка M , тогда $PB = PC_1 = PD$.

Заметим, что $\cos \angle C_1A_1C = \frac{\sqrt{6}}{3}$, по теореме косинусов

$$PC_1^2 = A_1C_1^2 + A_1P^2 - 2A_1C_1 \cdot A_1P \cos \angle C_1A_1C \Leftrightarrow PC_1 = \sqrt{16 + 6 - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot 4} = \sqrt{22 - 16} = \sqrt{6}.$$

Так как $PD = PC_1 = BP = BC_1 = C_1D = BD = \sqrt{6}$, значит, PBC_1D — правильный тетраэдр, что и требовалось доказать.

б) $\cos \angle AA_1C = \frac{AA_1}{A_1C} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, по теореме косинусов

$$AP^2 = AA_1^2 + A_1P^2 - 2AA_1 \cdot A_1P \cos \angle AA_1C \Leftrightarrow AP = \sqrt{3 + 6 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 4} = \sqrt{19 - 8} = \sqrt{11}.$$

Ответ: $\sqrt{11}$.

72. 72. На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : BM = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q — середины сторон DA и DC соответственно.

а) Докажите, что P, Q, M и N лежат в плоскости.

б) Найти отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

Решение.

а) Треугольник ABC подобен треугольнику MBN по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Тогда углы BAC и BMN равны, и $AC \parallel MN$. Далее, $PQ \parallel AC$ поскольку является средней линией треугольника ADC . Значит, $MN \parallel PQ$ и поэтому P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Пусть объём $ABCD$ равен V . Пятигранник $APMCQN$ состоит из четырёхугольной пирамиды $PACNM$ с основанием $ACNM$ и треугольной пирамиды $PQCN$ с основанием QCN . Выразим их объёмы через V .

Расстояние от P до (BCD) вдвое меньше расстояния от A до (BCD) , а площади треугольников QCN и BCD относятся как $1 : 6$.

Значит, $V_{PQCN} = \frac{V}{12}$.

Площадь треугольника MBN составляет $\frac{4}{9}$ площади ABC .

Значит, $\frac{S_{ACNM}}{S_{ABC}} = \frac{5}{9}$. Расстояние от точки P до (ABC) вдвое меньше

расстояния от D до (ABC) , поэтому $V_{PACNM} = \frac{5V}{18}$.

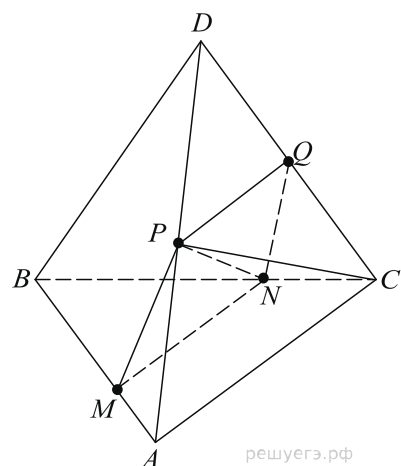
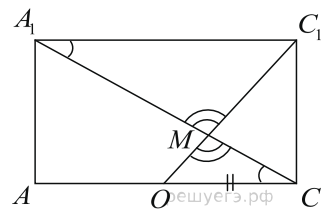
Таким образом, $V_{APMCQN} = \frac{13V}{36}$, то есть $\frac{V_{APMCQN}}{V_{BMNDPQ}} = \frac{13}{23}$.

Ответ: $13 : 23$.

73. 73. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 6$, $BC = 3$.

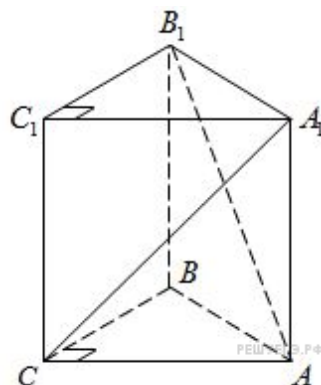


Решение.

а) Спроектируем наклонную AB_1 на плоскость CAA_1 , получим проекцию AC_1 . По теореме о трех перпендикулярах из перпендикулярности CA_1 и AB_1 следует перпендикулярность CA_1 и AC_1 . Таким образом, в прямоугольнике ACC_1A_1 диагонали перпендикулярны, поэтому он является квадратом. Следовательно, $AA_1 = AC$.

б) Пусть M — середина AC_1 , тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки M до прямой AB_1 , поскольку прямая A_1C перпендикулярна AB_1C_1 . Это расстояние равно половине высоты прямоугольного треугольника AB_1C_1 , проведённой к гипотенузе:

$$\frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{2AB_1} = \frac{\sqrt{2}AC \cdot BC}{2\sqrt{2AC^2 + BC^2}} = \sqrt{2}.$$



Ответ: б) $\sqrt{2}$.

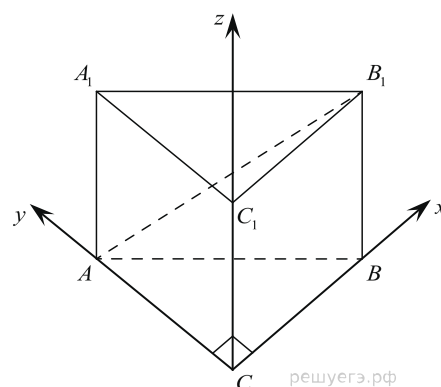
Приведем второй способ решения для первого пункта.

Если $CA_1 \perp AB_1$, то скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ будет равно 0. Введем систему координат.

Пусть $CA = C_1A_1 = a, CC_1 = AA_1 = BB_1 = b, CB = C_1B_1 = c,$

тогда $C(0;0;0), A(0;a;0), A_1(0;a;b), B_1(c;0;b),$

получим координаты векторов $\overrightarrow{CA_1}(0;a;b)$ и $\overrightarrow{AB_1}(c;-a;b)$. По условию $\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0$, а значит, что $c \cdot 0 + (-a) \cdot a + b \cdot b = 0$, это возможно, когда $a^2 = b^2$, то есть при $a = b$ или $a = -b$, однако, ввиду того, что отрицательной длина быть не может, имеем $a = b$, тогда $CA_1 = AA_1$, что и требовалось доказать.



74. В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 12.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

Решение.

а) Пусть SH — высота пирамиды $SABC$. Треугольник ASB равнобедренный, поэтому прямые AB и SM перпендикулярны. Прямая AB перпендикулярна плоскости SMC , поскольку она перпендикулярна прямым SM и SH . Значит, CM является не только медианой, но и высотой треугольника ABC , то есть треугольник ABC равнобедренный.

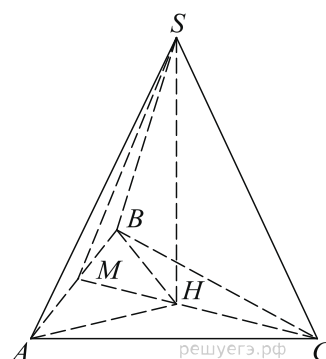
б) В пирамиде $SABC$:

$$MH = CH = \sqrt{SC^2 - SH^2} = 3,$$

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = 5;$$

$$BM = AM = \sqrt{AH^2 - MH^2} = 4.$$

Значит, объём пирамиды равен $\frac{1}{3}SH \cdot \frac{AB \cdot CM}{2} = 96$.



ОТВЕТ: б) 96.

75. 75. В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 7$, $SC = 5$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 4.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

Решение.

а) Пусть SH — высота пирамиды $SABC$. Треугольник ASB равнобедренный, поэтому прямые AB и SM перпендикулярны. Прямая AB перпендикулярна плоскости SMC , поскольку она перпендикулярна прямым SM и SH . Значит, CM является не только медианой, но и высотой треугольника ABC , то есть треугольник ABC равнобедренный.

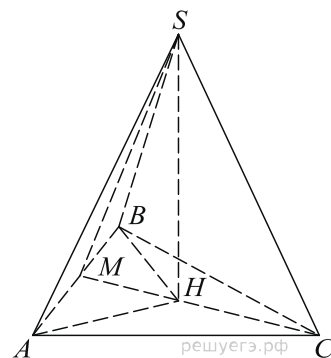
б) В пирамиде $SABC$:

$$MH = CH = \sqrt{SC^2 - SH^2} = 3,$$

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{33};$$

$$BM = AM = \sqrt{AH^2 - MH^2} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Значит объём пирамиды равен } \frac{1}{3}SH \cdot \frac{AB \cdot CM}{2} = 16\sqrt{6}.$$



Ответ: б) $16\sqrt{6}$.

76. 76. Ребро куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K , L и M — центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

а) Докажите, что B_1KLM — правильная пирамида.

б) Найдите объём B_1KLM .

Решение.

а) Рассмотрим правильный тетраэдр B_1AD_1C . В нём $B_1K = B_1L = B_1M$ — апофемы боковых граней — равных равносторонних треугольников. Следовательно, боковые рёбра пирамиды B_1KLM равны. Кроме того, в основании этой пирамиды лежит равносторонний треугольник KLM . Следовательно, пирамида правильная. Что и требовалось доказать.

б) Заметим, что

$$V_{B_1KLM} = \frac{1}{4}V_{B_1AD_1C},$$

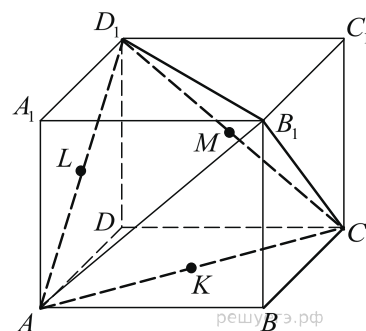
так как $S_{\triangle KLM} : S_{\triangle AD_1C} = 1 : 4$, высота общая.

Куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ состоит из пирамид B_1AD_1C , $AA_1B_1D_1$, $CB_1C_1D_1$, B_1ABC и D_1ACD .

Объём куба равен 216. Тогда

$$V_{AA_1B_1D_1} = V_{CB_1C_1D_1} = V_{B_1ABC} = V_{D_1ACD} = \frac{V}{6},$$

$$V_{B_1AD_1C} = \frac{V}{3}; \quad V_{B_1KLM} = \frac{V}{12} = 18.$$



Ответ: б) 18.

77. 77. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды AA_1C_1B .

Решение.

а) Прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BB_1C_1 , поскольку она перпендикулярна прямым C_1B_1 и CC_1 . Значит, прямые A_1C_1 и BC_1 перпендикулярны.

б) Пусть V — объём призмы $ABCA_1B_1C_1$. Тогда объём треугольной пирамиды C_1ABC равен $\frac{V}{3}$, поскольку её высота CC_1 и основание ABC совпадают с высотой и основанием призмы соответственно. Аналогично объём треугольной пирамиды $BA_1B_1C_1$ равен $\frac{V}{3}$. Призма $ABCA_1B_1C_1$ составлена из трёх пирамид: $BA_1B_1C_1$, C_1ABC и AA_1C_1B . Значит, объём пирамиды AA_1C_1B равен $\frac{V}{3}$.

В призме $ABCA_1B_1C_1$:

$$A_1C_1 = \sqrt{A_1B^2 - BC_1^2} = 12, B_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1C_1^2} = 5,$$

$$CC_1 = \sqrt{CB_1^2 - B_1C_1^2} = 2\sqrt{14}, V = CC_1 \cdot \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{2} = 60\sqrt{14}.$$

Таким образом, объём пирамиды AA_1C_1B равен $20\sqrt{14}$.

Ответ: б) $20\sqrt{14}$.

78. 78. $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной S . Точка M расположена на SD так, что $SM : SD = 2 : 3$. P — середина ребра AD , а Q середина ребра BC .

а) Доказать, что сечение пирамиды плоскостью MPQ — равнобедренная трапеция.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

Решение.

а) Пусть плоскость MPQ пересекает SC в точке N . Так как $PD = CQ$, $PD \parallel CQ$, то $PDCQ$ — параллелограмм, $PQ \parallel CD$. Поскольку $PQ \parallel CD$, $PQ \subset MPQ$, то $MN \parallel PQ \parallel CD$.

Тогда $\frac{SM}{MD} = \frac{SN}{NC}$, то есть $MD = NC$. Так как $MD = NC$, $CQ = PD$ и $\angle SCB = \angle SDA$, так как пирамида правильная, то $\triangle NCQ = \triangle PDM$, следовательно, $NQ = MP$.

Поскольку $NQ = MP$ и $MN \parallel PQ$, то $MNQP$ — равнобедренная трапеция, что и требовалось доказать.

б) Заметим, что $S_{DPQC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, расстояние от точки M до плоскости

ABC втрое меньше расстояния от точки S до плоскости ABC . Тогда $\frac{V_{MPDCQ}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{6}$.

По теореме об отношении площадей треугольников с равными углами $\frac{S_{\triangle CQN}}{S_{\triangle CSB}} = \frac{CN}{CS} \cdot \frac{CQ}{CB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, расстояние от точки D до плоскости SBC , в 1,5 раза больше чем от

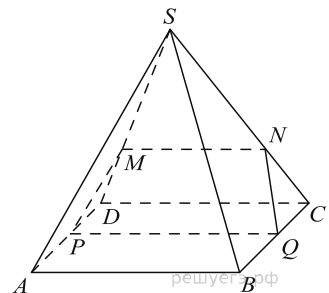
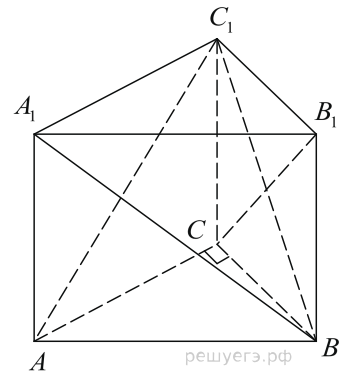
точки M . Значит, $\frac{V_{MNCQ}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{MNCQ}}{2V_{SBCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$, из чего следует, что

$$V_{CQPDMN} = \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{6}\right)V_{SABCD} = \frac{2}{9}V_{SABCD}, \text{ тогда } \frac{V_{CQPDMN}}{V_{PQNMSBA}} = \frac{2}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{2}{7}$.

79. 79. Дана пирамида $PABCD$, в основании — трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90° , а плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

а) Доказать, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD .



б) Найдите объём $PKBC$, если $AB = BC = CD = 2$, а высота равна 12.

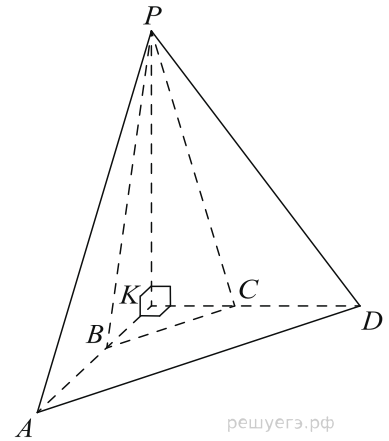
Решение.

а) Поскольку $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$, то $\angle AKD = 90^\circ$. $(PAB) \perp (ABC)$ и $(PDC) \perp (ABC)$, значит, $PK \perp (ABC)$, тогда $AK \perp PK$ и $AK \perp DK$, откуда $(PAB) \perp (PCD)$, что и требовалось доказать.

б) Поскольку $AB = CD$, то трапеция $ABCD$ — равнобокая. Так как сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, то $\angle BAD = \angle ADC = 45^\circ$, тогда треугольники AKD и BKC прямоугольные и равнобедренные. В $\triangle BKC$: $BK = KC = x$, тогда $BC^2 = BK^2 + KC^2 \Leftrightarrow 4 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

$$V_{PKBC} = \frac{1}{3} S_{BKC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 = 4.$$

Ответ: б) $V_{PKBC} = 4$.



80. 80. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна 4, а BC равна $4\sqrt{2}$. Вершина пирамиды S проектируется в центр пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ .

а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ .

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если ребро SD равно 8.

Решение.

а) Пусть $AS = BS = CS = DS = x$ (т. к. S проектируется в центр).

По теореме косинусов в треугольнике ABC :

$$AB^2 = AS^2 + SB^2 - 2AS \cdot SB \cdot \cos ASB \Leftrightarrow \cos ASB = \frac{x^2 - 8}{x^2}.$$

В треугольнике ASP : $\cos ASB = \frac{x - PB}{x}$, тогда $\frac{x - PB}{x} = \frac{x^2 - 8}{x^2}$, откуда

$$PB = \frac{8}{x}.$$

Аналогично находим $QB = \frac{16}{x}$.

Тогда $\frac{PQ}{QB} = \frac{\frac{8}{x}}{\frac{16}{x}} = \frac{1}{2}$, откуда $QP = PB$, что и требовалось доказать.

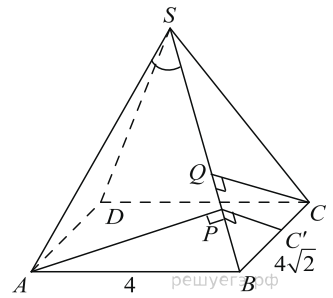
б) Из пункта а) следует, что $PB = \frac{8}{8} = 1$, $QB = \frac{16}{8} = 2$. Проведем PC' параллельно QC , C' принадлежит BC , тогда угол APC' — искомый. Поскольку PC' параллельно QC и P — середина QB , то PC' — средняя линия, тогда $PC' = \frac{1}{2}QC$, $CC' = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{2}$. В треугольнике CBQ : угол Q — прямой, $QC = \sqrt{CB^2 - QB^2} = \sqrt{28}$, тогда $PC' = \sqrt{7}$. В треугольнике APB : угол P — прямой, $AP = \sqrt{AB^2 - PB^2} = \sqrt{15}$. В треугольнике ABC' : угол B — прямой, $AC' = \sqrt{AB^2 + BC'^2} = \sqrt{24}$.

По теореме косинусов в треугольнике APC' :

$$AC'^2 = AP^2 + PC'^2 - 2AP \cdot PC' \cdot \cos APC' \Leftrightarrow \cos APC' = -\frac{1}{\sqrt{105}}.$$

Тогда угол между плоскостями SBA и SBC равен $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{105}}\right)$.

Ответ: б) $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{105}}\right)$.



81. 81. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна $3\sqrt{2}$, а BC равна 6. Выста пирамиды проектируется в центр пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ .

а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ .

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если ребро SD равно 9.

Решение.

а) Пусть $AS = BS = CS = DS = x$ (т. к. S проектируется в центр).

По теореме косинусов в треугольнике ABS :

$$AB^2 = AS^2 + SB^2 - 2AS \cdot SB \cdot \cos ASB \Leftrightarrow \cos ASB = \frac{x^2 - 9}{x^2}.$$

В треугольнике ASP : $\cos ASB = \frac{x - PB}{x}$, тогда $\frac{x - PB}{x} = \frac{x^2 - 9}{x^2}$, откуда

$$PB = \frac{9}{x}.$$

Аналогично находим $QB = \frac{18}{x}$.

Тогда $\frac{PQ}{QB} = \frac{\frac{9}{x}}{\frac{18}{x}} = \frac{1}{2}$, откуда $QP = PB$, что и требовалось доказать.

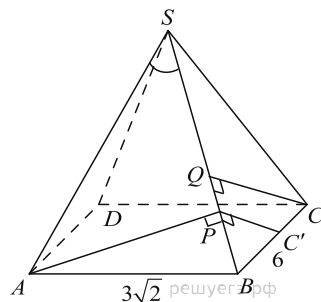
б) Из пункта а) следует, что $PB = \frac{9}{9} = 1$, $QB = \frac{18}{9} = 2$. Проведем PC' параллельно QC , C принадлежит BC , тогда угол APC' — искомый. Поскольку PC' параллельно QC и P — середина QB , то PC' — средняя линия, тогда $PC' = \frac{1}{2}QC$, $CC' = \frac{1}{2}BC = 3$. В треугольнике CBQ : угол Q — прямой, $QC = \sqrt{CB^2 - QB^2} = \sqrt{32}$, тогда $PC' = \sqrt{8}$. В треугольнике APB : угол P — прямой, $AP = \sqrt{AB^2 - PB^2} = \sqrt{17}$. В треугольнике ABC' : угол B — прямой, $AC' = \sqrt{AB^2 + BC'^2} = \sqrt{27}$.

По теореме косинусов в треугольнике APC' :

$$AC'^2 = AP^2 + PC'^2 - 2AP \cdot PC' \cdot \cos APC' \Leftrightarrow \cos APC' = -\frac{1}{\sqrt{136}}.$$

Тогда угол между плоскостями SBA и SBC равен $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{136}}\right)$.

Ответ: б) $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{136}}\right)$.



82. 82. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Грань ACC_1A_1 является квадратом.

а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 4$, $BC = 7$.

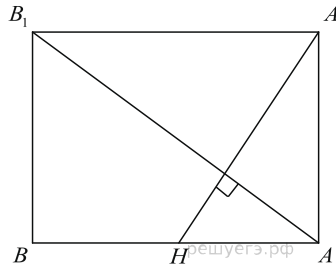
Решение.

а) Проведем высоту CH треугольника ABC .

Из пропорциональности сторон $\frac{A_1H}{AB_1} = \frac{AA_1}{AB} = \frac{AA_1}{A_1B_1}$ и равенства углов: $\angle A = \angle A_1 = 90^\circ$ следует, что треугольники AA_1H и AB_1A_1 подобны по двум пропорциональным сторонам и углу, следовательно, $\angle A_1HA = \angle B_1AA_1$. Углы A_1HA и BB_1A равны как накрест лежащие. Так как $\angle A_1HA = \angle B_1AA_1$ и $\angle HAB_1 = \angle AB_1A_1$ как накрест лежащие, а $\angle BB_1A + \angle AB_1A_1 = 90^\circ$, то $\angle A_1HA + \angle B_1AB = 90^\circ$, тогда $\angle HOA = 90^\circ$.

Прямая A_1H перпендикулярна AB_1 , A_1H — проекция A_1C , следовательно, $A_1C \perp AB_1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть M — середина AC_1 , тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки M до прямой AB_1 , поскольку прямая A_1C перпендикулярна AB_1C_1 . Это расстояние равно половине высоты прямоугольного треугольника AB_1C_1 , проведенной к гипотенузе:



$$\frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{2AB_1} = \frac{\sqrt{2}AC \cdot BC}{2\sqrt{2}AC^2 + BC^2} = \frac{14\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: б) $\frac{14\sqrt{2}}{9}$.

83. 83. В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды $PABC$.

Решение.

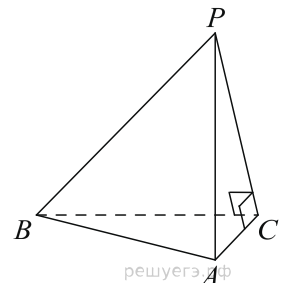
а) Прямая BC перпендикулярна плоскости APC , поскольку она перпендикулярна прямым PA и PC . Значит, прямые AC и BC перпендикулярны.

б) По теореме косинусов $PA = \sqrt{PB^2 + BA^2 - 2PB \cdot BA \cdot \cos \angle PBA} = \sqrt{106}$.

По теореме Пифагора:

$$AC^2 + BC^2 = 169, \quad AC^2 + PC^2 = 106, \quad BC^2 + PC^2 = 225, \quad PC^2 = 81, \quad BC^2 = 144, \\ AC^2 = 25; \quad PC = 9, \quad BC = 12, \quad AC = 5.$$

Значит, объем пирамиды равен $\frac{1}{3}PC \cdot \frac{AC \cdot BC}{2} = 90$.



Ответ: б) 90.

84. 84. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 5. На ребрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .

Решение.

а) Стороны треугольника SBD равны 5, 5 и $5\sqrt{2}$, поэтому он прямоугольный, то есть прямая DS перпендикулярна прямой SB . Поскольку прямые SB и PQ параллельны, прямая DS перпендикулярна прямой PQ . Прямая AC перпендикулярна прямой BD , и по теореме о трех перпендикулярах прямая AC перпендикулярна прямой SD , а значит, и прямая QR перпендикулярна прямой SD .

Таким образом, плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .

б) Пусть плоскость PQR пересекает ребро SD в точке E . Из доказанного следует, что прямая PE перпендикулярна прямой SD , откуда $SE = SP \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$.

Значит, $DE = SD - SE = \frac{7}{2}$. Поскольку плоскость PQR перпендикулярна ребру SD , искомое расстояние равно DE .

Ответ: б) $\frac{7}{2}$.

85. 85. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $A_1C = BD = 2$.

Решение.

а) Поскольку $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямая призма, прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC , то есть AC — проекция A_1C на плоскость ABC . Так как $ABCD$ — ромб, прямые AC и BD перпендикулярны. Тогда по теореме о трех перпендикулярах прямая A_1C перпендикулярна прямой BD .

б) Пусть $AB = AA_1 = a$, $AC \cap DB = O$. По теореме Пифагора в треугольнике A_1AC имеем:

$$A_1C^2 = AA_1^2 + AC^2 \Leftrightarrow 4 = a^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC = \sqrt{4 - a^2}.$$

По теореме Пифагора в треугольнике DOC имеем:

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 \Leftrightarrow a^2 = 1 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{a^2 - 1}.$$

Найдем a :

$$\sqrt{4 - a^2} = 2\sqrt{a^2 - 1} \Leftrightarrow 4 - a^2 = 4(a^2 - 1) \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{8}{5}}.$$

Тогда AC равно: $AC = 2\sqrt{\frac{8}{5} - 1} = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$. Отсюда объем призмы равен:

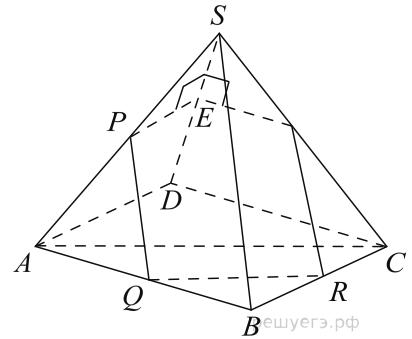
$$V = AA_1 \cdot S_{ABCD} = \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

86. 86. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = 4\sqrt{2}$, $AA_1 = 4$. Точка M — середина ребра BC .

а) Докажите, что прямые B_1C и C_1M перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой C_1M и плоскостью грани ABB_1A_1 .



Решение.

а) Поскольку

$$\operatorname{tg} \angle CMC_1 = \frac{CC_1}{CM} = \sqrt{2} = \frac{B_1C_1}{CC_1} = \operatorname{tg} \angle B_1CC_1,$$

получаем

$$\angle B_1CC_1 = \angle CMC_1 = 90^\circ - \angle MC_1C,$$

то есть прямые B_1C и C_1M перпендикулярны.

б) Пусть M_1 — середина B_1C_1 , тогда угол между прямой C_1M и плоскостью грани ABB_1A_1 равен углу между этой плоскостью и прямой BM_1 .

Обозначим через M_1H перпендикуляр, опущенный на A_1B_1 . Прямая M_1H перпендикулярна плоскости грани ABB_1A_1 , поскольку она перпендикулярна прямым A_1B_1 и BB_1 . Поэтому искомый угол равен углу M_1BH .

В прямоугольном треугольнике M_1BH :

$$M_1B = \sqrt{BB_1^2 + B_1M_1^2} = 2\sqrt{6}, \quad M_1H = M_1B_1 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{6},$$

откуда $\angle M_1BH = 30^\circ$.

Ответ: б) 30° .

87. 87. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA . Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M .

а) Докажите, что $AM = AD$.

б) Точка N — середина AM . Найдите SN , если $AD = 6$.

Решение.

а) Обозначим через x длину ребра пирамиды. Пусть SE — медиана треугольника BSC , тогда

$$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{5}}{2}.$$

Рассмотрим треугольник ASE :

$$AE = \frac{x\sqrt{5}}{2}, \quad AS = x, \quad SE = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

По теореме косинусов для треугольника ASE ,

$$\cos \angle ASE = \frac{AS^2 + SE^2 - AE^2}{2AS \cdot SE} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Точка M является точкой пересечения медиан и потому делит отрезок SE в отношении 2:1. По теореме косинусов для треугольника ASM ,

$$AM^2 = AS^2 + SM^2 - 2AS \cdot SM \cdot \cos \angle ASM = x^2.$$

Таким образом, $AM = AD$.

б) Стороны равнобедренного треугольника SAM : $SA = AM = 6$, $SM = 2\sqrt{3}$.

По формуле медианы,

$$SN = \frac{\sqrt{2SA^2 + 2SM^2 - AM^2}}{2} = \sqrt{15}.$$

Ответ: б) $\sqrt{15}$.

