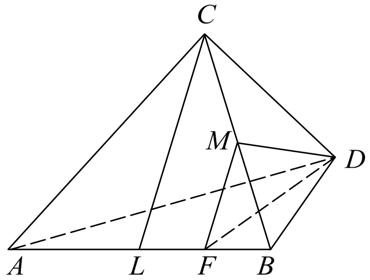
Угол между скрещивающимися прямыми

1. 1. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Найдите угол между прямыми DM и CL, где M — середина ребра BC, L — середина ребра AB.

Решение.
Пусть MF прямая параллельная прямой CL и F точка ее пересечения с AB. Тогда искомый угол между прямыми DM и CL равен углу DMF. Обозначим угол DMF буквой α. MF — средняя линия треугольника BCL, поэтому:



$$MF = \frac{1}{2}CL = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad BF = \frac{1}{2}BL = \frac{1}{4}.$$

Выразим квадрат отрезка DF по теореме косинусов в двух треугольниках: DMF и BDF:

$$DF^2 = DM^2 + MF^2 - 2DM \cdot MF \cos\alpha = BD^2 + BF^2 - 2BD \cdot BF \cos 60^\circ.$$

Поскольку $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $BD = 1$, подставляя числовые данные, получим:

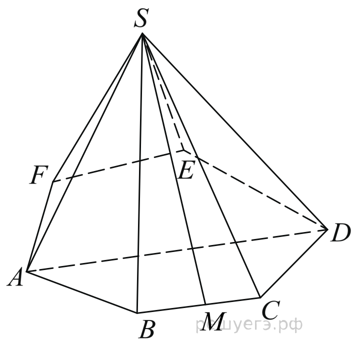
$$\frac{3}{4} + \frac{3}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\alpha = 1 + \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}.$$

Откуда $\cos\alpha = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$.

2. 2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AD.

Решение.
Прямая AD параллельна прямой BC. Следовательно, искомый угол — SBC. В равнобедренном треугольнике SBC проведём медиану и высоту SM. Имеем:



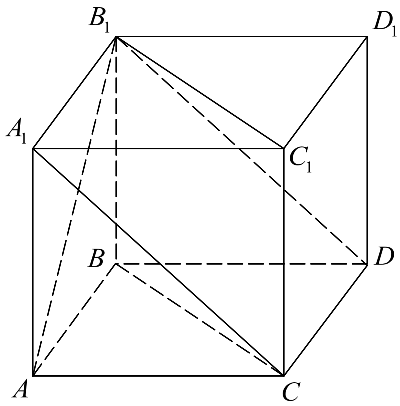
$$BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника SBM получаем: $\cos\angle SBM = \frac{BM}{SB} = \frac{1}{4}.$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

3. 3. Сторона правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6. Найти угол между прямыми CA_1 и AB_1.

Решение.



Достроим треугольную прямую призму до четырехугольной прямой призмы, в основании которой ромб $ABDC$, составленный из двух равносторонних треугольников.

Полученная призма является прямым параллелепипедом. Поэтому $B_1D \parallel A_1C$. Значит, искомый угол AB_1D. Рассмотрим ромб $ABDC$: площадь ромба равна произведению квадрата его стороны на синус угла ромба: $S_{ABDC} = 64\sin 60^\circ = 32\sqrt{3}$. С другой стороны, площадь ромба можно найти как полупроизведение длин его диагоналей: $S_{ABCD} = \dfrac{BC \cdot AD}{2} = 4AD$, следовательно, $AD = 8\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника AA_1B_1 по теореме Пифагора находим: $AB_1 = 10$. Аналогично, $B_1D = 10$. Значит, из равнобедренного треугольника AB_1D, получаем

$$\angle AB_1D = 2\arcsin\frac{AD}{2\cdot AB_1} = 2\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Примечание 1.

Диагональ ромба можно было найти по теореме косинусов для треугольника ABD.

Примечание 2.

Для нахождения угла AB_1D можно применить в треугольнике AB_1D теорему косинусов:

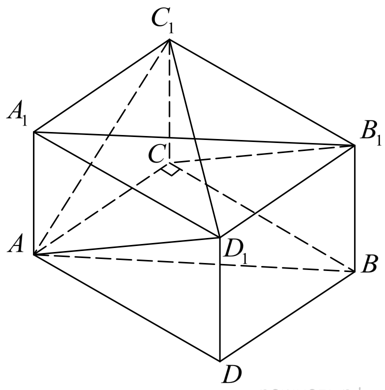
$$AD^2 = AB_1^2 + B_1D^2 - 2AB_1 \cdot B_1D \cdot \cos\angle AB_1D \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 64\cdot 3 = 100 + 100 - 2\cdot 10\cdot 10\cdot \cos\angle AB_1D \Leftrightarrow \cos\angle AB_1D = \frac{1}{25},$$

откуда $\angle AB_1D = \arccos 0,04$.

Ответ: $2\arcsin\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ или $\arccos\dfrac{1}{25}$.

4. 4. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1.

Решение.
Достроим призму до прямоугольного параллелепипеда с основанием $ACBD$ и верхним основанием $A_1C_1B_1D_1$. Прямая AD_1 параллельна прямой CB_1, поэтому искомый угол C_1AD_1. Из прямоугольного треугольника ACB находим: $AC = 8$. Значит, AD тоже равно 8. Из прямоугольных треугольников ACC_1 и ADD_1 получаем: $AC_1 = AD_1 = 10$, а диагональ C_1D_1 квадрата $A_1C_1B_1D_1$ равна $8\sqrt{2}$. Из равнобедренного треугольника C_1AD_1 получаем:



$$\angle C_1AD_1 = 2\arcsin\frac{CD_1}{2AC_1} = 2\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Примечание.
Для нахождения угла можно воспользоваться теоремой косинусов:

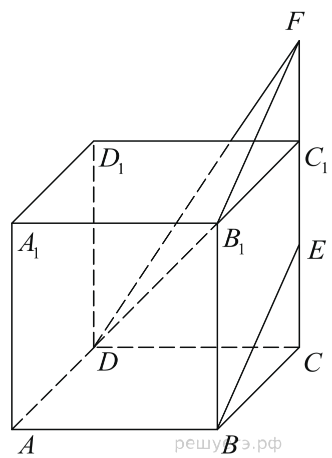
$$C_1D_1^2 = AC_1^2 + AD_1^2 - 2AC_1 \cdot AD_1 \cdot \cos\angle C_1AD_1 \Leftrightarrow 128 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos\angle C_1AD_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\angle C_1AD_1 = \frac{9}{25}.$$

Ответ: $2\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$ или $\arccos\frac{9}{25}$.

5. 5. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и B_1D.

Решение.
Примем ребро куба за a. Тогда $DB_1 = \sqrt{3}a$ Проведём через точку B_1 прямую, параллельную BE. Она пересекает продолжение ребра CC_1 в точке F, причём $C_1F = \frac{1}{2}a$. Искомый угол равен углу DB_1F (или смежному с ним).



В прямоугольном треугольнике B_1C_1F с прямым углом C_1

$$B_1F = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1F^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

В прямоугольном треугольнике DCF с прямым углом C

$$DF = \sqrt{DC^2 + CF^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}a.$$

В треугольнике DB_1F по теореме косинусов

$$DF^2 = DB_1^2 + B_1F^2 - 2 \cdot \cos\angle DB_1F \cdot DB_1 \cdot B_1F,$$

откуда $\cos\angle DB_1F = \frac{DB_1^2 + B_1F^2 - DF^2}{2 \cdot DB_1 \cdot B_1F} = \frac{\sqrt{15}}{15}$, а тогда $\angle DB_1F = \arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$.

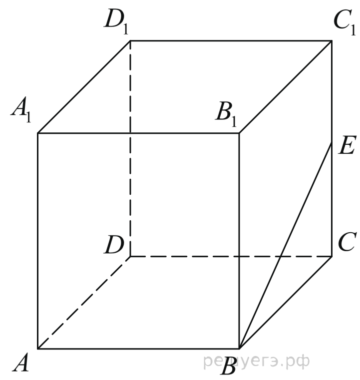
Примечание.
Ответ может быть представлен и в другом виде:

$$\angle DB_1F = \arcsin\frac{\sqrt{210}}{15} = \operatorname{arctg}\sqrt{14}.$$

6. 6. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и AD.

Решение.

Примем ребро куба за единицу. Тогда $CE = \frac{1}{2}$.



Прямая AD параллельна прямой BC, значит, искомый угол равен углу CBE.

Из прямоугольного треугольника CBE с прямым углом C имеем:

$$\operatorname{tg}\angle CBE = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{2},$$

тогда

$$\angle CBE = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

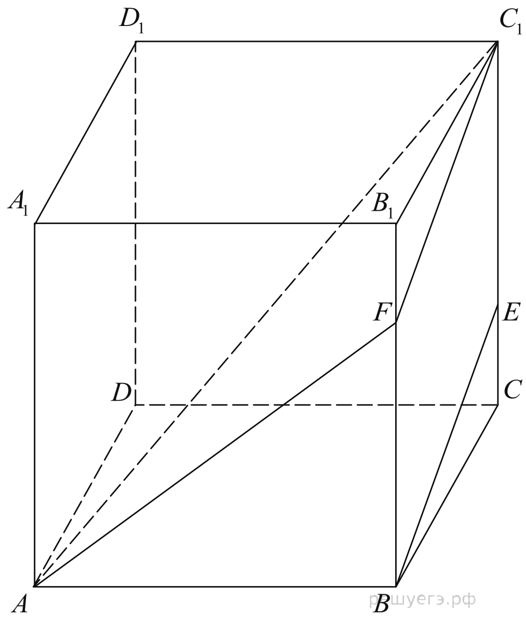
Ответ также может быть представлен в следующем виде: $\angle CBE = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$ или $\angle CBE = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

7. 7. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

Решение.

Примем ребро куба за a. Тогда $AC_1 = a\sqrt{3}$.



Поскольку $CE : EC_1 = 1 : 2$, получаем: $CE = \frac{CC_1}{3} = \frac{1}{3}a$ и $C_1E = CC_1 - CE = \frac{2}{3}a$.

Проведем через точку C_1 прямую, параллельную BE. Она пересекает ребро BB_1 в точке F, причем треугольники BCE и C_1FB_1 равны. Искомый угол равен углу AC_1F (или смежному с ним).

В прямоугольном треугольнике C_1FB_1 с прямым углом B_1

$$C_1F = BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

В прямоугольном треугольнике ABF с прямым углом B

$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{AB^2 + C_1E^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$$

В треугольнике AC_1F

$$AF^2 = AC_1^2 + C_1F^2 - 2\cdot\cos\angle AC_1F \cdot AC_1 \cdot C_1F$$

откуда

$$\cos\angle AC_1F = \frac{AC_1^2 + C_1F^2 - AF^2}{2\cdot AC_1 \cdot C_1F} = \frac{3a^2 + \frac{10a^2}{9} - \frac{13a^2}{9}}{2\cdot a\sqrt{3}\cdot\frac{a\sqrt{10}}{3}} = \frac{4}{\sqrt{30}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

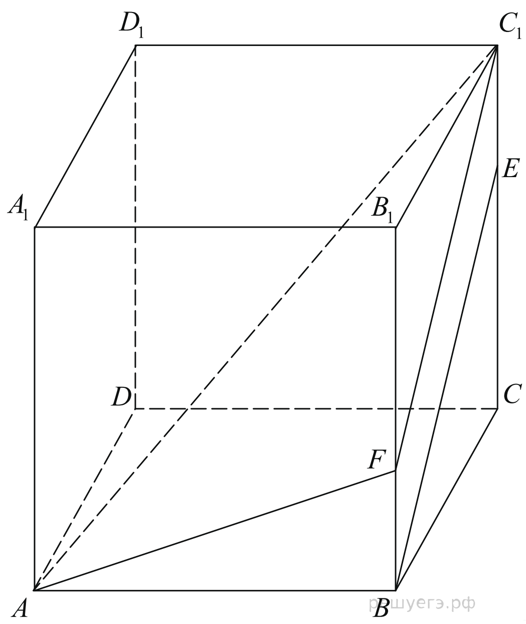
Тогда $\angle AC_1F = \arccos\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

Ответ может быть представлен и в другом виде: $\angle AC_1F = \arcsin\frac{\sqrt{105}}{15}$ или $\angle AC_1F = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Ответ: $\arccos\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

8. 8. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 2 : 1$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

Решение.



Примем ребро куба за a. Тогда $AC_1 = a\sqrt{3}$.

Поскольку $CE : EC_1 = 2 : 1$, получаем: $CE = \dfrac{2CC_1}{3} = \dfrac{2}{3}a$ и $C_1E = CC_1 - CE = \dfrac{1}{3}a$.

Проведем через точку C_1 прямую, параллельную BE. Она пересекает ребро BB_1 в точке F, причем треугольники BCE и C_1FB_1 равны. Искомый угол равен углу AC_1F (или смежному с ним).

В прямоугольном треугольнике C_1FB_1 с прямым углом B_1

$$C_1F = BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

В прямоугольном треугольнике ABF с прямым углом B

$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{AB^2 + C_1E^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

В треугольнике AC_1F

$$AF^2 = AC_1^2 + C_1F^2 - 2 \cdot \cos\angle AC_1F \cdot AC_1 \cdot C_1F$$

откуда

$$\cos\angle AC_1F = \frac{AC_1^2 + C_1F^2 - AF^2}{2 \cdot AC_1 \cdot C_1F} = \frac{3a^2 + \dfrac{13a^2}{9} - \dfrac{10a^2}{9}}{2 \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{13}}{3}} = \frac{5}{\sqrt{39}} = \frac{5\sqrt{39}}{39},$$

тогда $\angle AC_1F = \arccos\dfrac{5\sqrt{39}}{39}$.

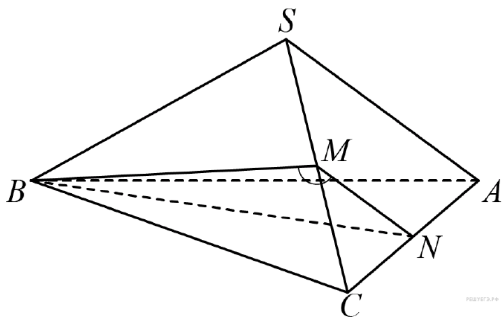
Ответ может быть представлен и в другом виде: $\angle AC_1F = \arcsin\dfrac{\sqrt{546}}{39}$ или $\angle AC_1F = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{14}}{5}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{5\sqrt{39}}{39}$.

9. 9. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ равно 6, а косинус угла ASB при вершине боковой грани равен $\dfrac{1}{9}$. Точка M — середина ребра SC. Найдите косинус угла между прямыми BM и SA.

Решение.

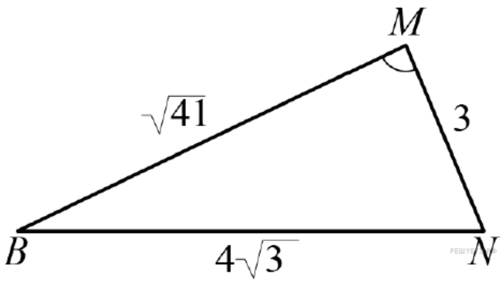
Пусть N — середина AC. Поскольку $MN||SA$ по теореме о средней линии треугольника, угол BMN искомый. Найдём стороны треугольника BMN. По теореме о средней линии треугольника $MN=\frac{SA}{2}=3$. По теореме косинусов из треугольника BSM получаем:



$$BM=\sqrt{36+9-2\cdot 6\cdot 3\cdot \frac{1}{9}}=\sqrt{41}.$$

Чтобы найти BN, найдём сначала сторону основания по теореме косинусов из треугольника BSC:

$$BC=\sqrt{36+36-2\cdot 6\cdot 6\cdot \frac{1}{9}}=\sqrt{64}=8.$$



Теперь $BN=4\sqrt{3}$ как высота в равностороннем треугольнике со стороной 8. Осталось вычислить косинус нужного угла:

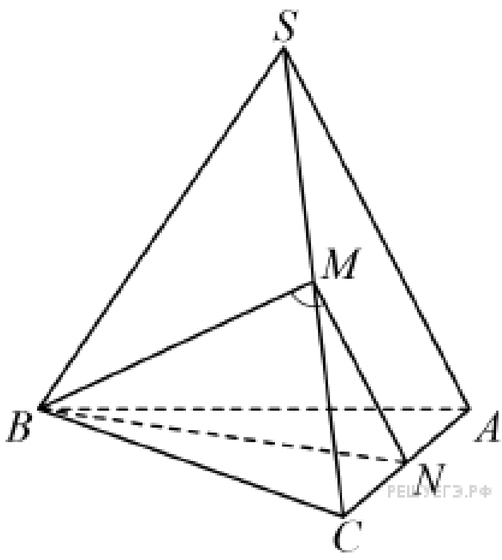
$$\cos\angle NMB=\frac{9+41-48}{2\cdot 3\cdot \sqrt{41}}=\frac{1}{3\sqrt{41}}.$$

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{41}}$.

10. 10. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ равно 10, а косинус угла ASB при вершине боковой грани равен $\frac{17}{25}$. Точка M — середина ребра SC. Найдите косинус угла между прямыми BM и SA.

Решение.

Пусть N — середина AC. Поскольку $MN||SA$ по теореме о средней линии треугольника, угол BMN искомый. Найдём стороны треугольника BMN. По теореме о средней линии треугольника $MN = \frac{SA}{2} = 5$. По теореме косинусов из треугольника BSM получаем:

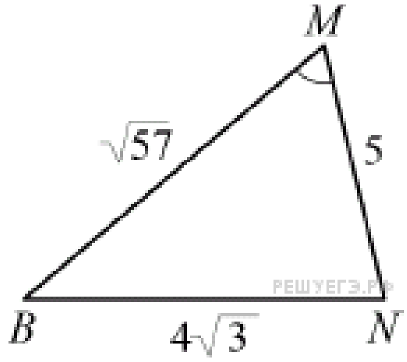


$$BM = \sqrt{100 + 25 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \frac{17}{25}} = \sqrt{57}.$$

Чтобы найти BN, найдём сначала сторону основания по теореме косинусов из треугольника BSC:

$$BC = \sqrt{100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{17}{25}} = \sqrt{64} = 8.$$

Теперь $BN = 4\sqrt{3}$ как высота в равностороннем треугольнике со стороной 8. Осталось вычислить косинус нужного угла:



$$\cos \angle NMB = \frac{25 + 57 - 48}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{57}} = \frac{17}{5\sqrt{57}}.$$

Ответ: $\frac{17}{5\sqrt{57}}$.

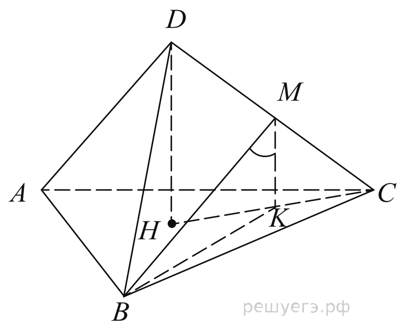
11. 11. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между высотой тетраэдра DH и медианой BM боковой грани BCD.

Решение.

Пусть и MK — средняя линия треугольника CDH. Тогда $MK \parallel DH$, значит, $MK \perp (ABC)$ и, следовательно, $MK \perp BK$. Кроме того, $\angle(DH, BM) = \angle(KM, BM) = \angle BMK$.

Пусть длина ребра тетраэдра равна a, тогда имеем:

$$CH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}},$$



$$DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}, KM = \frac{1}{2} DH = \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

$$BM = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \cos\angle BMK = \frac{KM}{BM} = \frac{a \cdot 2}{\sqrt{6} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

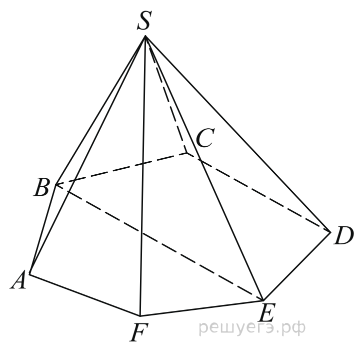
Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$.

12. 12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SB и CD.

Решение.

Вместо прямой CD рассмотрим параллельную ей прямую BE. Искомый угол равен углу SBE. Треугольник SBE равносторонний, поскольку большая диагональ правильного шестиугольника вдвое больше его стороны: $BE = 2CD$. Следовательно, $\widehat{SBE} = 60°$.

Ответ: $60°$.

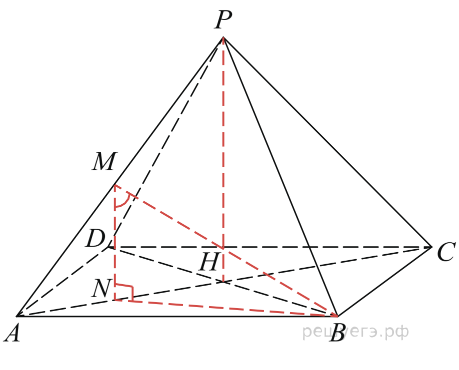


13. 13. Длины всех ребер правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равны между собой. Найдите угол между прямыми PH и BM, если отрезок PH — высота данной пирамиды, точка M — середина ее бокового ребра AP.

Решение.

Пусть отрезок MN — средняя линия треугольника APH, параллельная его стороне PH (см. рисунок).

Поскольку $PABCD$ — правильная пирамида, точка H — центр квадрата $ABCD$. Так как $PH \perp (ABC)$ и $MN || PH$, то $MN \perp (ABC)$, а, значит, $MN \perp BN$, Прямые MN и PH параллельны, следовательно, угол между прямыми PH и BM равен углу между прямыми MN и BM, то есть острому углу BMN прямоугольного треугольника BMN.



Примем длину ребра данной пирамиды за a, тогда $MB = \frac{\sqrt{3}}{2} a, AH = PH = \frac{\sqrt{2}}{2} a, MN = \frac{1}{2} PH = \frac{\sqrt{2}}{4} a$ и, следовательно, $\cos\angle BMN = \frac{MN}{MB} = \frac{\sqrt{6}}{6}, \angle BMN = \arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

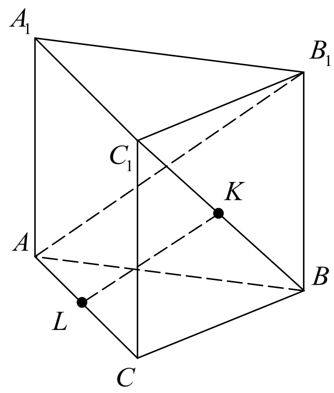
Ответ: $\angle BMN = \arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

14. 14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение.



а) Поскольку $CC_1 = C_1B_1 = B_1B = BC$ и $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, то CC_1B_1B — квадрат. Тогда K — точка пересечения диагоналей CC_1B_1B, так как делит одну из диагоналей на две равные части. Значит, $B_1K = KC$. Тогда KL — средняя линия треугольника AB_1C, поэтому $KL \parallel AB_1$.

б) Поскольку $KL \parallel AB_1$, необходимо найти угол LKB. По теореме Пифагора $AB_1 = C_1B = \sqrt{2}$. Тогда $BK = LK = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Высота LB правильного треугольника ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. По теореме косинусов $LB^2 = KL^2 + KB^2 - 2KL \cdot KB \cos LKB,$ то есть $\cos LKB = \frac{1}{4}$.

Ответ: б) $\frac{1}{4}$.