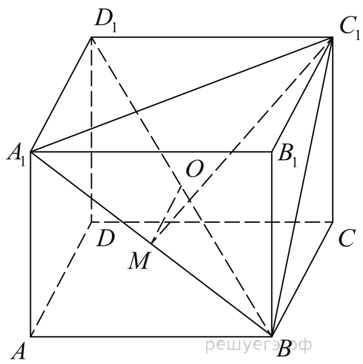
Угол между плоскостями

1. 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

Решение.

Пусть точка O — центр куба, а M — середина A_1B. $A_1D_1 \perp A_1B$, а MO — средняя линия треугольника BA_1D_1, поэтому $MO \perp A_1B$. Треугольник BA_1C_1 — равносторонний, $C_1M \perp A_1B$, следовательно, искомый угол равен углу OMC_1.



Примем длины ребер куба за a. Найдем стороны треугольника OMC_1. Из треугольника BA_1D_1, находим $OM = \frac{a}{2}$, из равностороннего треугольника BA_1C_1 находим

$$MC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

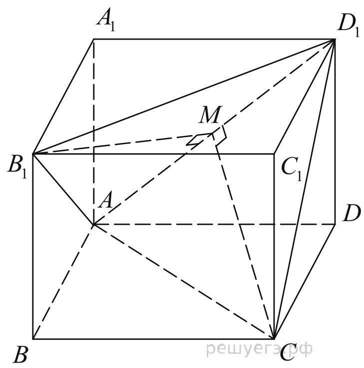
поскольку O — середина диагонали AC_1, то $OC_1 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь применим к треугольнику OMC_1 теорему косинусов:

$$\cos\angle OMC_1 = \frac{OM^2 + MC_1^2 - OC_1^2}{2 \cdot OM \cdot MC_1} = \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2. 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.

Решение.
Пусть точка M — середина отрезка AD_1 Примем длины ребер куба за a. Из прямоугольного треугольника ABB_1 по теореме Пифагора найдём AB_1 :



$$AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1^2}=a\sqrt{2}.$$

Аналогично, $B_1D_1=CD_1=AD_1=AC=B_1C=a\sqrt{2}$. Опустим перпендикуляры B_1H и CK на сторону AD_1 треугольники AB_1D_1 и ACD_1 равносторонние, поэтому перпендикуляры B_1H и CK также являются биссектрисами и медианами, поэтому точки H, K и M совпадают. Угол B_1MC — искомый. Из прямоугольного треугольника AB_1M :

$$B_1M=\sqrt{AB_1^2-AM^2}=\sqrt{AB_1^2-\left(\frac{AD_1}{2}\right)^2}=\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

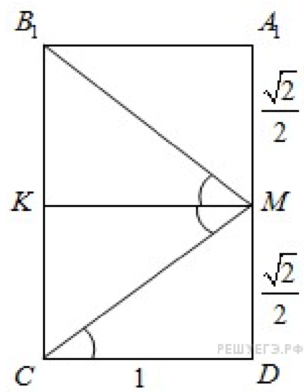
По теореме косинусов из треугольника B_1MC :

$$\cos\angle B_1MC=\frac{B_1M^2+MC^2-B_1C^2}{2B_1M\cdot MC}=\frac{\frac{3a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}-2a^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, угол между плоскостями равен $\arccos\frac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

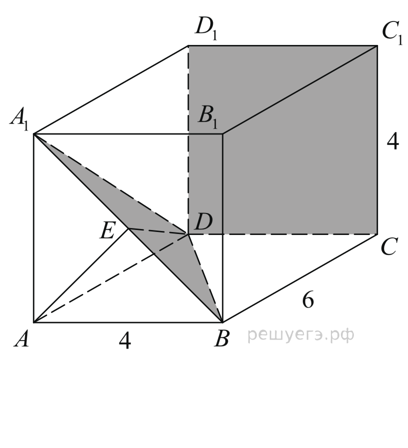
Примечание.
Укажем другой путь нахождения угла B_1MC. В прямоугольнике CDA_1B_1 проведём через точку M — середину боковой стороны DA_1 — отрезок MK, параллельный стороне CD (см. рис.). Тогда:



$$\widehat{B_1MC}=2\widehat{KMC}=2\widehat{MCD}=2\operatorname{arctg}\frac{MD}{DC}=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

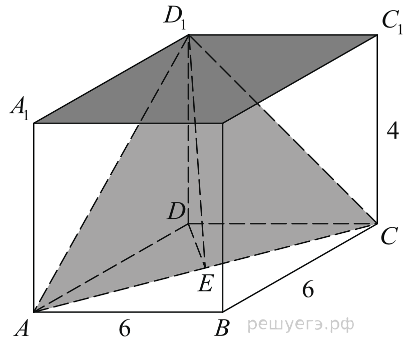
3. 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=4$, $BC=6$, $CC_1=4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.

Решение.
Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1. Пусть E — середина BA_1. $DE\perp BA_1$, $AE\perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим $\operatorname{tg}\angle DEA=\frac{AD}{AE}=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.



Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. 4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.



Решение.

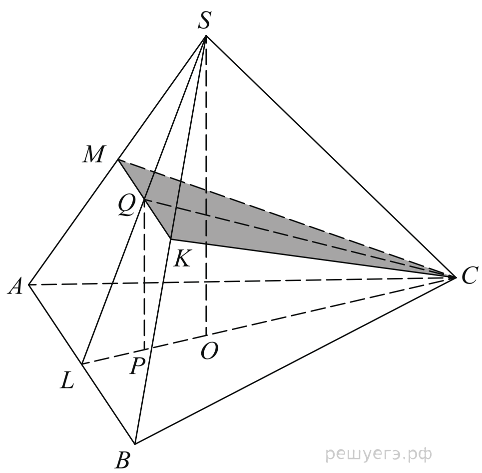
Вместо плоскости $A_1B_1C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC. Пусть E — середина AC. $D_1E \perp AC$, $DE \perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника D_1DE находим $\operatorname{tg}\angle DED_1 = \dfrac{DD_1}{DE} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

5. 5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC = 6$, $BC = 4$.

Решение.

Отрезок MK — средняя линия треугольника SAB, следовательно, $MK \parallel AB$. Значит, через MK можно провести плоскость параллельную плоскости ABC и, так как $MK \subset CMK$, MK параллельна прямой пересечения плоскостей CMK и ABC.



Треугольник CMK — равнобедренный. Проведем перпендикуляр CQ к MK, Q — середина MK. Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на CL — медиане треугольника ABC, P — середина LO. $CL \perp AB$, следовательно, $CL \perp MK$ и $CQ \perp MK$. Таким образом, $\angle QCP$ — линейный угол искомого угла.

Далее находим:

$$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{23}{3}}.$$

Откуда $QP = \dfrac{1}{2}SO = \sqrt{\dfrac{23}{3}}$, $CL = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC = 2\sqrt{3}$.

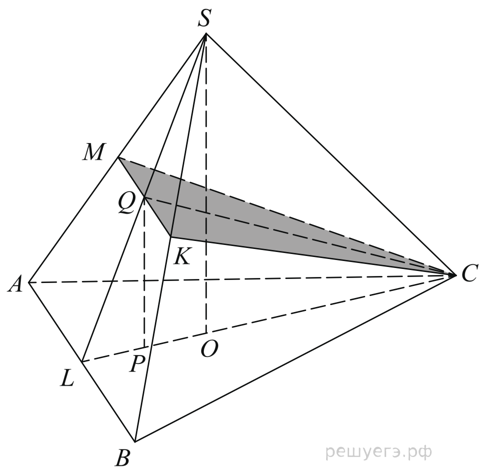
Поскольку $CP = \dfrac{5}{6}CL = \dfrac{5}{3}\sqrt{3} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$, имеем: $\operatorname{tg}\angle QCP = \dfrac{\sqrt{23}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 5} = \dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

6. 6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC = 8$, $AB = 6$.

Решение.

Проведем перпендикуляр CQ к MK, так как треугольник CMK — равнобедренный, то Q — середина MK. Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на медиане CL треугольника ABC. Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей CMK и ABC, $QP \perp MK$ и $CQ \perp MK$. Следовательно, $\angle QCP$ — линейный угол искомого угла между плоскостями.



Далее находим:

$$CO = \frac{2}{3}CL = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}BC = 2\sqrt{3}.$$

$$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{8^2 - (2 \cdot \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}.$$

$$QP = \frac{1}{2}SO = \sqrt{13}, CP = \frac{1}{2}OL + OC = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

Откуда

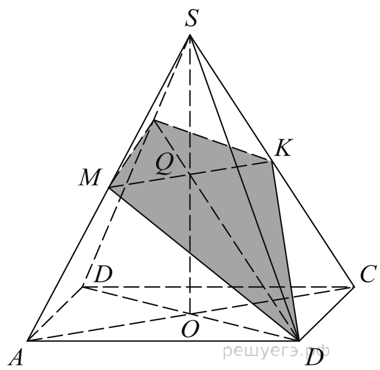
$$\operatorname{tg}\angle QCP = \frac{\sqrt{13} \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 5} = \frac{2\sqrt{39}}{15}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{39}}{15}$.

7. 7. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 4$, $SC = 7$.

Решение.

Проведём из точки B перпендикуляр BQ к MK, Q — середина MK. Точка Q является серединой высоты SO. Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей, $QB \perp MK, OB$. Следовательно, $\angle QBO$ — линейный угол искомого угла. Найдём QO.



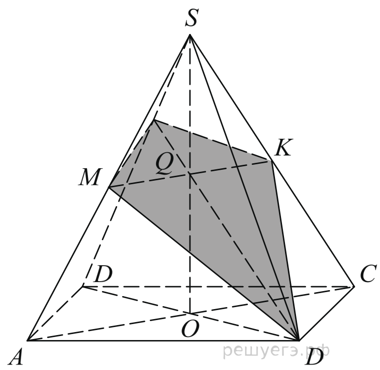
$$BO = 2\sqrt{2},\ SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{7^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{49-8} = \sqrt{41},\ QO = \frac{1}{2}SO = \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Значит, $\operatorname{tg}\angle QBO = \frac{\sqrt{41}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{82}}{8}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{82}}{8}$.

8. 8. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 8$, $SC = 6$.

Решение.
Проведём из точки B перпендикуляр BQ к MK, Q — середина MK. Точка Q является серединой высоты SO. Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей, $QB \perp MK$, $OB \perp MK$. Следовательно, $\angle QBO$ — линейный угол искомого угла. Найдём QO.



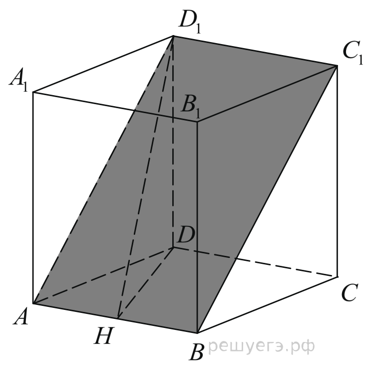
$$BO = 4\sqrt{2};$$
$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{6^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{36 - 32} = 2;$$
$$QO = \frac{1}{2}SO = 1.$$

Значит, $\operatorname{tg}\angle QBO = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}.$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

9. 9. Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание призмы — ромб со стороной 4 и острым углом 60°. Высота призмы равна 5. Найдите угол между плоскостью AC_1B и плоскостью ABD.

Решение.
Построим сечение призмы плоскостью AC_1B. Получим параллелограмм ABC_1D_1. Из точки D проведём перпендикуляр DH к прямой AB. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $D_1H \perp AB$. Плоский угол DHD_1 — искомый. $DH = AD \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$, следовательно,

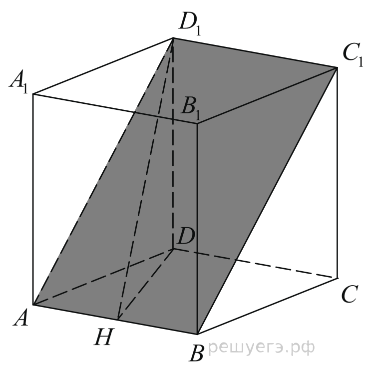


$$\operatorname{tg}\angle DHD_1 = \frac{DD_1}{DH} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

10. 10. Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание призмы — ромб со стороной 8 и острым углом 45°. Высота призмы равна 6. Найдите угол между плоскостью AC_1B и плоскостью ABD.

Решение.
Построим сечение призмы плоскостью AC_1B. Получим параллелограмм ABC_1D_1. Из точки D проведём перпендикуляр DH к прямой AB. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $D_1H \perp AB$. Плоский угол DHD_1 — искомый. $DH = AD \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$. Следовательно,

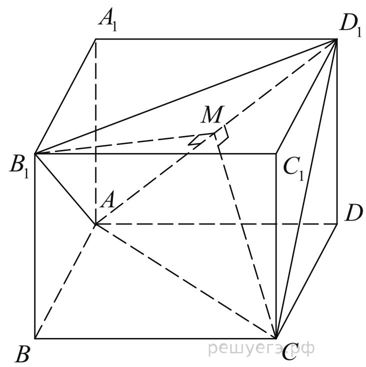


$$\operatorname{tg}\angle DHD_1 = \frac{DD_1}{DH} = \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

11. 11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.

Решение.
Пусть точка M — середина отрезка AD_1 Примем длины ребер куба за a. Из прямоугольного треугольника ABB_1 по теореме Пифагора найдём AB_1 :



$$AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1^2}=a\sqrt{2}.$$

Аналогично, $B_1D_1=CD_1=AD_1=AC=B_1C=a\sqrt{2}$. Опустим перпендикуляры B_1H и CK на сторону AD_1 треугольники AB_1D_1 и ACD_1 равносторонние, поэтому перпендикуляры B_1H и CK также являются биссектрисами и медианами, поэтому точки H, K и M совпадают. Угол B_1MC — искомый. Из прямоугольного треугольника AB_1M :

$$B_1M=\sqrt{AB_1^2-AM^2}=\sqrt{AB_1^2-\left(\frac{AD_1}{2}\right)^2}=\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

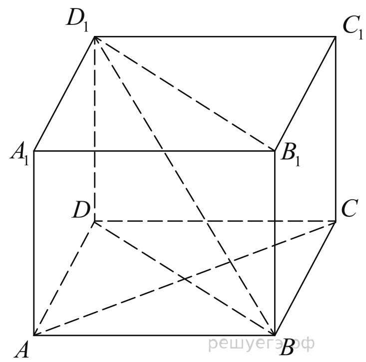
По теореме косинусов из треугольника B_1MC :

$$\cos\angle B_1MC=\frac{B_1M^2+MC^2-B_1C^2}{2B_1M\cdot MC}=\frac{\frac{3a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}-2a^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

12. 12. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=12$, $AD=5$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 13.

Решение.
Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно расстоянию между основаниями, то есть высоте призмы. Значит, высота призмы равна 13.

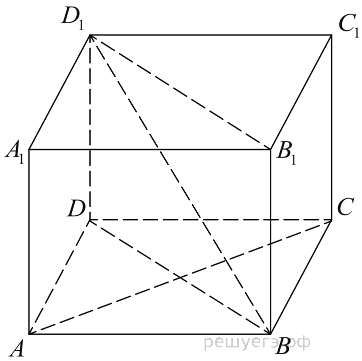


Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Поэтому искомый угол равен углу между ребром DD_1 и прямой BD_1. Рассмотрим прямоугольный треугольник BDD_1. Его катеты равны $DD_1=13, BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=13$. Значит, $\angle BD_1D=45°$.
Ответ: $45°$.

13. 13. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=5$, $AD=\sqrt{11}$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно $2\sqrt{3}$.

Решение.

Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно расстоянию между основаниями, то есть высоте призмы. Значит, высота призмы равна $2\sqrt{3}$. Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Следовательно, искомый угол равен углу между ребром DD_1 и прямой BD_1.



Рассмотрим треугольник BDD_1. Его катеты равны $DD_1 = 2\sqrt{3}$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 6$. Поэтому

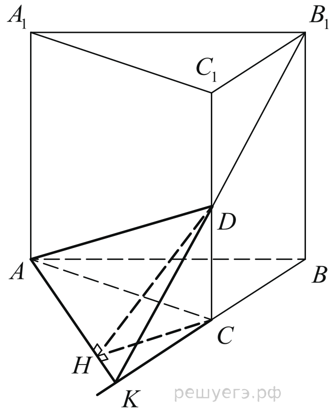
$$\angle BD_1D = \operatorname{arctg}\frac{6}{2\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ.$$

Ответ: 60°.

14. 14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

Решение.

Прямая B_1D пересекает прямую BC в точке K. Плоскости ABC и ADB_1 пересекаются по прямой AK. Из точки D опустим перпендикуляр DH на прямую AK, тогда отрезок CH (проекция DH), по теореме о трех перпендикулярах, перпендикулярен прямой AK. Угол CHD является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и ADB_1.



Точка D — середина ребра CC_1, поэтому $CD = DC_1 = \frac{3}{2}$.

Из равенства треугольников B_1C_1D и KCD получаем: $CK = B_1C_1 = 2$.

В равнобедренном треугольнике ACK угол C равен 120°, $AC = CK = 2$, высота CH является высотой и биссектрисой, откуда $CH = AC \cdot \cos 60^\circ = 1$.

Из прямоугольного треугольника CDH с прямым углом C получаем:

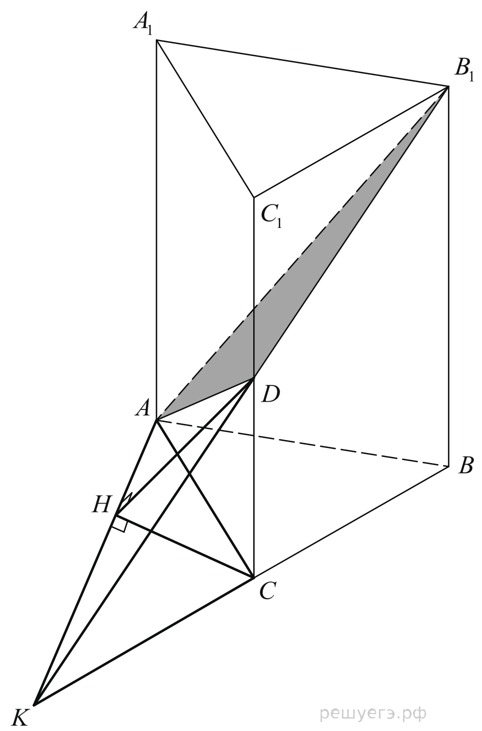
$$\operatorname{tg}\angle CHD = \frac{CD}{CH} = \frac{3}{2}, \text{ тогда } \angle CHD = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$.

Замечание: Ответ может быть представлен и в другой форме: $\sin\angle CHD = \frac{3\sqrt{13}}{13} \Leftrightarrow \angle CHD = \arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\angle CHD = \frac{2\sqrt{13}}{13} \Leftrightarrow \angle CHD = \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

15. 15. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые ребра равны 2, точка D — середина ребра CC_1. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

Решение.



Прямая B_1D пересекает прямую BC в точке K. Плоскости ABC и ADB_1 пересекаются по прямой AK. Из точки D опустим перпендикуляр DH на прямую AK, тогда отрезок CH (проекция DH) перпендикулярен прямой AK. Угол CHD является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и ADB_1.

Точка D — середина ребра CC_1, поэтому $CD = DC_1 = 1$.

Из равенства треугольников B_1C_1D и KCD получаем:

$$CK = B_1C_1 = 1.$$

В равнобедренном треугольнике ACK угол C равен 120°, $AC = CK = 1$, высота CH является биссектрисой, откуда

$$CH = AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника CDH с прямым углом C получаем:

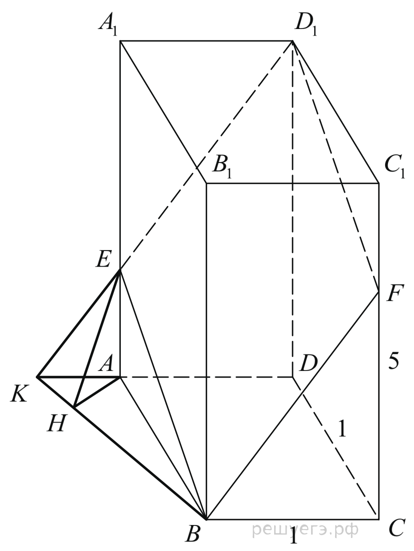
$$\operatorname{tg} \angle CHD = \frac{CD}{CH} = 2, \text{ тогда } \angle CHD = \operatorname{arctg} 2.$$

Ответ может быть представлен и в другой форме: $\sin \angle CHD = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \angle CHD = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos \angle CHD = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \angle CHD = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 2$.

16. 16. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решение.



Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB.

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB по теореме о трех перпендикулярах. Угол EHA является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1.

Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 1$, получаем:

$$A_1E = \frac{AA_1}{3} = \frac{5}{3}, AE = AA_1 - A_1E = \frac{10}{3}.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 2.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом $A:\ AB = 1,\ AK = 2, BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

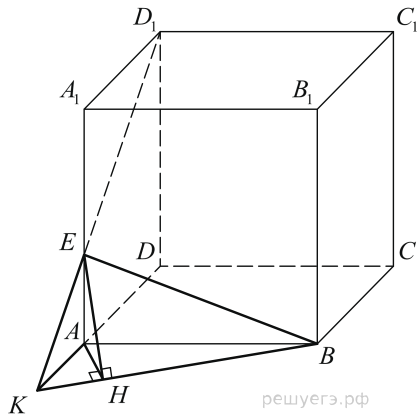
Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{5\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \angle AHE = \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

17. 17. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решение.
Прямая D_1E пересекает прямую АD в точке К. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB.



Из точки Е опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB. Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1.

Поскольку $AE : EA_1 = 1 : 2$, получаем:

$$AE = \frac{AA_1}{3} = 1; EA_1 = AA_1 - AE = 2.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 1.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A: $AB = 2$; $AK = 1$; $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \angle AHE = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

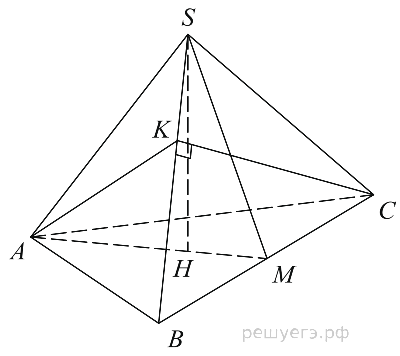
Ответ может быть представлен и в другой форме: $\angle AHE = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}$ или $\angle AHE = \arccos \frac{2}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$.

18. 18. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

Решение.

Пусть $SABC$ — данная пирамида с вершиной S, SH — ее высота, M — середина BC, CK — высота треугольника BSC. Угол SMH — угол между боковой гранью пирамиды и основанием.



Пусть $SM = 4a$. тогда

$$MH = SM\cos\angle SMH = \sqrt{3}a;\ AM = 3\sqrt{3}a;$$

$$BC = 6a;\ SB = \sqrt{BM^2 + SM^2} = 5a.$$

Найдем площадь треугольника BSC. двумя способами: $\frac{1}{2}SM \cdot BC = \frac{1}{2}CK \cdot SB$. Значит, $CK = \frac{24}{5}a$.

Ребро AC перпендикулярно плоскости SBH, поэтому SB и AC перпендикулярны, следовательно, плоскость AKC перпендикулярна ребру SB. Искомый угол между боковыми гранями равен углу при вершине равнобедренного треугольника AKC :

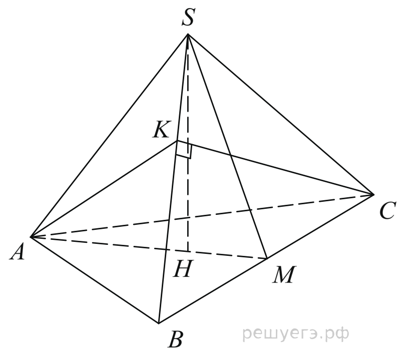
$$\cos\angle AKC = \frac{2KC^2 - AC^2}{2KC^2} = \frac{7}{32}.$$

Ответ: $\arccos\frac{7}{32}$.

19. 19. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

Решение.

Пусть $SABC$ — данная пирамида с вершиной S, SH — ее высота, M — середина BC, CK — высота треугольника BSC. Угол SMH — угол между боковой гранью пирамиды и основанием.



Пусть $SM = 6a$. тогда

$$MH = SM\cos\angle SMH = a\sqrt{6},\ \ AM = 3a\sqrt{6},$$
$$BC = 6a\sqrt{2},\ SB = \sqrt{BM^2 + SM^2} = 3a\sqrt{6}.$$

Найдем площадь треугольника BSC. двумя способами: $\frac{1}{2}SM \cdot BC = \frac{1}{2}CK \cdot SB$. Значит, $CK = 4a\sqrt{3}$.

Ребро AC перпендикулярно плоскости SBH, поэтому SB и AC перпендикулярны, следовательно, плоскость AKC перпендикулярна ребру SB. Искомый угол между боковыми гранями равен углу при вершине равнобедренного треугольника AKC :

$$\cos\angle AKC = \frac{2KC^2 - AC^2}{2KC^2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.

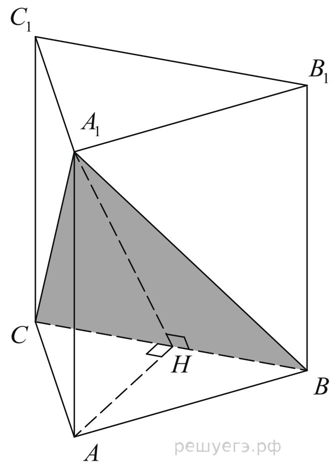
20. 20. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

Решение.

Обозначим H середину ребра BC. Так как треугольник ABC равносторонний, а треугольник A_1BC — равнобедренный, отрезки AH и A_1H перпендикулярны BC. Следовательно, $\angle A_1HA$ — линейный угол двугранного угла с гранями BCA и BCA_1. Из треугольника A_1AB найдем $AA_1=\sqrt{5-4}=1$. В треугольнике AHB найдем высоту $AH=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

Из треугольника HAA_1 найдем: $\operatorname{tg}\angle A_1HA=\frac{AA_1}{AH}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Искомый угол равен 30°.



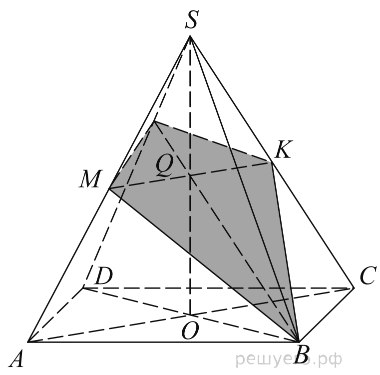
Ответ: 30°.

21. 21. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка S — вершина. Точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 8$, $SC = 10$.

Решение.

Проведем из точки B перпендикуляр BQ к MK, Q — середина MK. Точка Q является серединой высоты SO. Прямая MK параллельна прямой прямой пересечения плоскостей BMK и ABC, $QO\perp MK$, $OB\perp MK$, Следовательно, $\widehat{QBO}$ — искомый линейный угол. Найдем QO:

$$BO=4\sqrt{2};$$
$$SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{10^2-(4\sqrt{2})^2}=2\sqrt{17};$$
$$QO=\frac{1}{2}SO=\sqrt{17}.$$



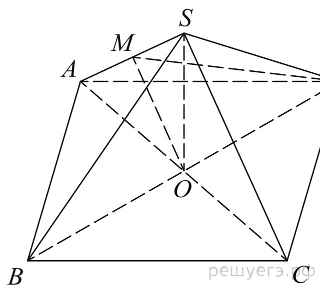
Значит, $\operatorname{tg}\widehat{QBO}=\frac{\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{34}}{8}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{34}}{8}$.

22. 22. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD.

Решение.

Пусть точка O — центр основания, а M — середина ребра AS. Поскольку $AC \perp BD$ и $SO \perp BD$, плоскость SAC перпендикулярна прямой BD. Это значит, что плоскость SAC и есть плоскость, проходящая через точку A перпендикулярно BD.



Проведем отрезки MD и MO. Так как треугольник SAD правильный, $MD \perp AS$. Так как треугольник ASO — равнобедренный, $OM \perp AS$. Следовательно, искомый угол равен углу OMD. Найдем стороны треугольника OMD:

$$OD = \frac{1}{\sqrt{2}},\ OM = \frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},\ MD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По теореме косинусов:

$$\cos\angle OMD = \frac{OM^2 + MD^2 - OD^2}{2 \cdot OM \cdot DM} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

$$\sin\angle OMD = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

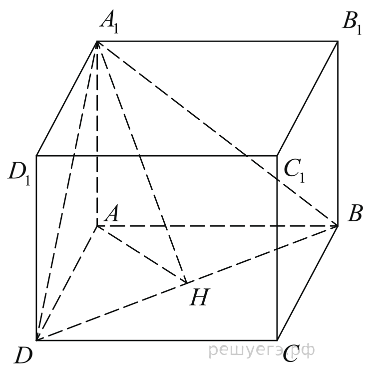
Примечание.

Решение существенно упрощается, если заметить, что треугольник MOD — прямоугольный: $\sin\angle OMD = \dfrac{OD}{MD}$.

23. 23. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB = 6$, $AD = 8$, $CC_1 = 16$. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

Решение.

Плоскости ABC и A_1DB имеют общую прямую BD. Проведем перпендикуляр AH к BD. По теореме о трех перпендикулярах $A_1H \perp BD$. Значит, линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями ABC и A_1DB, — это угол A_1HA. Из прямоугольного треугольника BAD находим:



$$AH = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника A_1AH находим:

$$\operatorname{tg}\angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{16 \cdot 5}{24} = \frac{10}{3}.$$

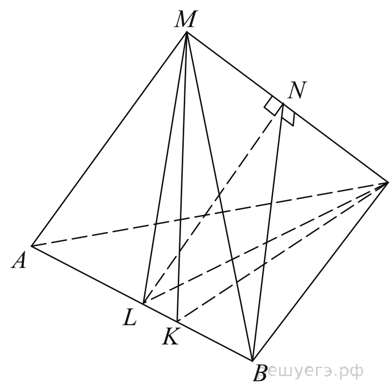
Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{10}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{10}{3}$.

24. 24. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M сторона основания AB равна 6. На ребре AB отмечена точка K. Сечение MKC является равнобедренным треугольником с основанием MC. Найдите угол между плоскостями MLC и MBC, где L — середина AB.

Решение.

В прямоугольных треугольниках MKL и CKL сторона KL — общая и $MK = CK$. Значит, эти треугольники равны и $ML = CL = 3\sqrt{3}$. Прямоугольные треугольники MBL и CBL равны по двум катетам. Значит, $MC = MB = AB = 6$. Пусть N — середина MC. Тогда прямая MC перпендикулярна BN и LN, поэтому искомый угол между плоскостями равен углу BNL. В прямоугольном треугольнике BNL имеем $BL = 3$, $BN = 3\sqrt{3}$. Значит,



$$\sin\angle BNL = \frac{BL}{BN} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

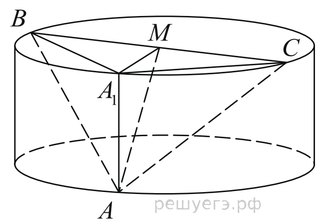
Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

25. 25. Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной 10 и $\angle A = 120°$ расположен так, что его вершина A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины B и C — на окружности верхнего основания. Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра.

Решение.

Пусть AA_1 — образующая цилиндра, M — середина хорды BC. Тогда

$$AM = AB \cdot \cos 60° = 5.$$



Треугольники ABA_1 и ACA_1 равны по гипотенузе и катету. Значит $BA_1 = A_1C$.

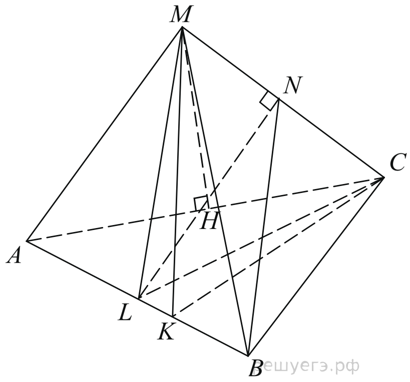
В равнобедренных треугольниках BAC и BA_1C медианы AM и A_1M являются высотами. Поэтому искомый угол между плоскостями равен углу $\angle AMA_1$. В прямоугольном треугольнике AMA_1 имеем:

$$\sin\angle AMA_1 = \frac{AA_1}{MA} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{3}{5}$.

26. 26. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M сторона основания AB равна 6. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK : KB = 5 : 1$. Сечение MKC является равнобедренным треугольником с основанием MK. Найдите угол между боковыми гранями пирамиды.

Решение.
Пусть L — середина AB. Тогда



$$LK = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{6}AB = 2,\ CL = \sqrt{BC^2 - LB^2} = 3\sqrt{3},$$

$$MC = CK = \sqrt{CL^2 + LK^2} = \sqrt{31}.$$

Пусть AN и MH — высоты грани AMC. Посчитаем площадь треугольника AMC двумя способами: $\frac{1}{2}AN \cdot MC = \frac{1}{2}MH \cdot AC$, откуда

$$AN = \frac{MH \cdot AC}{MC} = \frac{\sqrt{MC^2 - CH^2} \cdot AC}{MC} = \frac{6\sqrt{682}}{31}.$$

Искомый угол между гранями равен углу, противолежащему основанию равнобедренного треугольника ANB. Этот угол равен удвоенному углу ANL. В прямоугольном треугольнике ANL имеем:

$$\sin \angle ANL - \frac{AL}{AN} = \frac{\sqrt{682}}{44}.$$

Ответ: $2\arcsin \frac{\sqrt{682}}{44}$.

27. 27. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.

а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

Решение.

а) Обозначим за M_1 середину ребра B_1C_1. Очевидно, $BC \perp AA_1$, $BC \perp A_1M_1$ (так как $BC \parallel B_1C_1$.) Значит, $BC \perp AA_1M_1$. Итак, плоскость A_1BC содержит прямую, перпендикулярную к плоскости AA_1M_1, поэтому плоскости перпендикулярны.

б) Обозначим за M середину BC. Поскольку плоскости пересекаются по прямой BC, нас интересует угол между перпендикулярами к BC, проведенными в этих плоскостях. Очевидно $MM_1 \perp BC$ (так как $MM_1 \parallel BB_1 \perp ABC$) и $A_1M \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах (проекция A_1M на ABC это $AM \perp BC$.) Поэтому

$$\operatorname{tg}\angle(BCA_1, BB_1C_1) = \operatorname{tg}\angle(A_1M, MM_1) = \operatorname{tg}\angle A_1MM_1 = \frac{A_1M_1}{MM_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{AA_1} = \frac{21}{16}.$$

Ответ: $\frac{21}{16}$.

28. 28. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AA_1 = 7$, $AB = 16$, $AD = 6$. Точка K — середина ребра C_1D_1.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку B перпендикулярно прямой AK, пересекает отрезок A_1K.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC.

Решение.

а) Введем координаты с началом в точке A и осями, направленными по ребрам AD, AB, AA_1. Тогда координаты вершин будут $A(0;0;0)$, $B(0;16;0)$, $A_1(0;0;7)$, $K(6;8;7))$. Уравнение прямой A_1K тогда имеет вид $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{z-7}{0}$ (последнее означает, что у всех точек на прямой аппликата равна 7.

Уравнение прямой AK тогда имеет вид $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{z}{7}$, поэтому перпендикулярная к ней плоскость имеет уравнение $6x+8y+7z+D=0$, причем нужно выбрать $D=-128$, чтобы точка B лежала в этой плоскости.

Найдем теперь точку перечения прямой $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{z-7}{0}$ и плоскости $6x+8y+7z-128=0$. Мы знаем, что $z=7$, $x=\frac{3}{4}y$, поэтому $\frac{9}{2}y+8y+49-128=0$, $y=\frac{158}{25}\in(0;8)$, поэтому точка лежит между точками A_1 и K.

б) Найдем по формуле угол между плоскостью $6x+8y+7z-128=0$ и плоскостью $z=0$ (ABC).
Получим

$$\cos\phi=\frac{6\cdot 0+8\cdot 0+7\cdot 1}{\sqrt{36+64+49}\sqrt{0+0+1}}=\frac{7}{\sqrt{149}},$$

поэтому $\sin\phi=\frac{10}{\sqrt{149}}$ и $\operatorname{tg}\phi=\frac{10}{7}$.

Ответ: б) $\frac{10}{7}$.

29. 29. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=12$, $AD=\sqrt{31}$. Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно прямой BD_1, делит отрезок BD_1 в отношении 1 : 7, считая от вершины D_1.

б) Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1, и плоскостью основания призмы.

Решение.

Сразу отметим, что данное в условии расстояние — высота призмы.

а) Введем координаты с началом в точке A и осями, направленными по ребрам AD, AB, AA_1. Тогда координаты вершин будут $B(0,12,0)$, $D_1(\sqrt{31},0,5)$. Значит, прямая BD_1 имеет уравнение $\frac{x}{\sqrt{31}}=\frac{y-12}{-12}=\frac{z}{5}$, а перпендикулярная ей плоскость — уравнение $\sqrt{31}x-12y+5z+D=0$. Для того, чтобы плоскость проходила через точку $D(\sqrt{31},0,0)$, нужно взять $\sqrt{31}x-12y+5z-31=0$.

Точка, делящая BD_1 в отношении $1:7$ имеет координаты $\left(\frac{7}{8}\sqrt{31},\ \frac{3}{2},\ \frac{35}{8}\right)$. Подставляя ее в уравнение плоскости, получаем $\frac{7}{8}\cdot 31-18+\frac{175}{8}-31=-18-\frac{31}{8}+\frac{175}{8}=0$, то есть эта точка лежит и в плоскости, что и требовалось.

б) Уравнение плоскости основания призмы $z=0$. По формуле найдем косинус угла

$$\frac{\sqrt{31}\cdot 0-12\cdot 0+5\cdot 1}{\sqrt{31+144+25}\sqrt{0+0+1}}=\frac{5}{\sqrt{200}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

30. 30. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 2, точка M — середина ребра AB, точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая MF перпендикулярна прямой SC.

б) Найдите угол между плоскостью MBF и плоскостью ABC.

Решение.

а) Введем координаты с началом в точке A и осями, направленными по AB, по прямой, параллельной OM и по прямой, параллельной OS. Тогда координаты точек будут такими $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $M(1;0;0)$, $C(1;\sqrt{3};0)$, $O(1;\frac{\sqrt{3}}{3};0)$, $S(1;\frac{\sqrt{3}}{3};a)$, $F(1;\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{a}{4})$, где a — высота пирамиды. Найдем ее: $2=SA=\sqrt{1+\frac{1}{3}+a^2}$, откуда $a=\sqrt{\frac{8}{3}}$, $\frac{a}{4}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Значит, $\overline{MF}=\left\{0;\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$ и $\overline{SC}=\left\{0;\frac{2\sqrt{3}}{3};-\sqrt{\frac{8}{3}}\right\}$. Значит их скалярное произведение равно $0+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$, поэтому $MF\perp SC$.

б) Пусть уравнение плоскости MBF это $Ax+By+Cz+D=0$. Подставляя туда координаты точек, находим $A+D=0$, $2A+D=0$ (откуда $A=D=0$) и $\frac{\sqrt{3}}{3}B+\frac{1}{\sqrt{6}}C=0$, то есть $\sqrt{2}B+C=0$. Пусть $C=-\sqrt{2}$, $B=1$. Итак, уравнение этой плоскости $y-\sqrt{2}z=0$. Найдем по формуле угол между ней и плоскостью $z=0$ (ABC).

Получим

$$\cos\phi=\pm\frac{0\cdot 0+1\cdot 0-\sqrt{2}\cdot 1}{\sqrt{0+1+2}\sqrt{0+0+1}}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

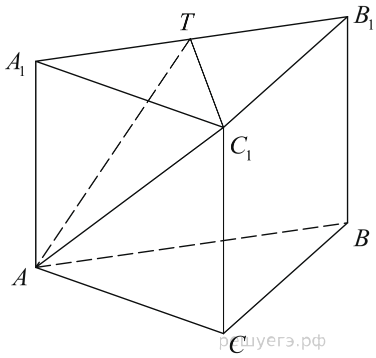
31. 31. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Решение.

а) Прямая C_1T перпендикулярна A_1B_1, поскольку C_1T — медиана равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, прямая C_1T перпендикулярна AA_1, поскольку AA_1 перпендикулярна плоскости основания $A_1B_1C_1$. Значит, прямая C_1T перпендикулярна плоскости AA_1B_1, и потому C_1T перпендикулярна AT. Следовательно, треугольник AC_1T прямоугольный.



б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT, угол A_1TA искомый. Имеем $\operatorname{tg}\angle A_1TA=\frac{AA_1}{A_1T}=\frac{3}{2}$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$.

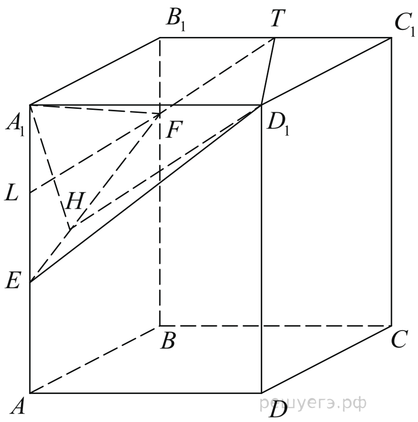
32. 32. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=1:2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F:FB=1:5$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=2$, $AD=6$, $AA_1=6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

Решение.

а) Плоскость EFT пересекает грани BB_1C_1C и AA_1D_1D по параллельным отрезкам. Имеем $TB_1 = 3,\ B_1F = \dfrac{1}{6}\cdot 6 = 1,\ A_1E = \dfrac{1}{3}\cdot 6 = 2$ и $A_1D_1 = 6.$ Значит, треугольники D_1A_1E и TB_1F подобны, причём прямые D_1A_1 и B_1T параллельны, прямые A_1E и B_1F тоже параллельны. Значит, прямая ED_1 лежит в плоскости EFT.



б) Так как прямая A_1D_1 перпендикулярна плоскости AA_1B_1, опустим перпендикуляр A_1H из точки A_1 на прямую EF пересечения этих плоскостей. Угол A_1HD_1 будет искомым. Найдём A_1H. Для этого проведём в трапеции EA_1B_1F высоту $FL = 2$ (L — середина EA_1). Вычисляя двумя способами площадь треугольника EFA_1, найдём $A_1H\cdot EF = A_1E\cdot FL$, то есть $A_1H = \dfrac{FL\cdot A_1E}{FE} = \dfrac{2\cdot 2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$. Тогда тангенс искомого угла равен 6: $\dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.