

Расстояние от точки до прямой и до плоскости

1. 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1 .

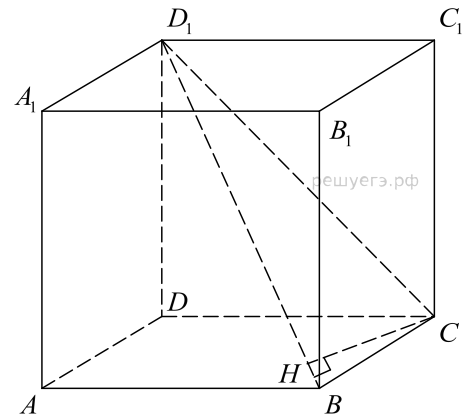
Решение.

Проведем отрезок CD_1 и опустим перпендикуляр CH на BD_1 .

Искомое расстояние равно высоте CH прямоугольного треугольника BCD_1 с прямым углом C :

$$CH = \frac{2S_{BCD_1}}{BD_1} = \frac{CD_1 \cdot BC}{BD_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



2. 2. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D . Боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{43}$, высота равна $\sqrt{31}$. Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT , где точки M и T — середины ребер AC и AD соответственно.

Решение.

Пусть P — середина ребра BD , Q — середина ребра BC . По теореме о средней линии треугольника $MT \parallel CD \parallel QP$, следовательно, точки M, T, P, Q лежат в одной плоскости.

$MT = \frac{1}{2}CD = QP$, следовательно, $MTPQ$ — параллелограмм. Кроме того, $PT \parallel AB$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AB \perp CD$ (так как $AB \perp CO$), поэтому этот параллелограмм — прямоугольник. Значит, искомое расстояние есть длина отрезка PT . По теореме Пифагора

$$AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = 2\sqrt{3}.$$

Тогда

$$AB = \sqrt{3} \cdot AO = 6, \text{ а } PT = \frac{1}{2}AB = 3.$$

Ответ: 3.

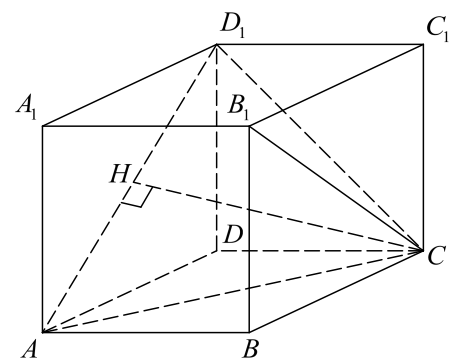
3. 3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой AD_1

Решение.

Проведем отрезки CD_1 и AC . Искомое расстояние равно длине перпендикуляра CH , проведенного к прямой AD_1 . Этот перпендикуляр является медианой равностороннего треугольника ACD_1 со стороной $\sqrt{2}$.

$$CH = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.



4. 4. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, у которого $AB = 10$, $BD = 12$. Высота призмы равна 6. Найдите расстояние от центра грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ до плоскости BDC_1 .

Решение.

Пусть O_1 — центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$. Плоскость $AA_1 C_1$ пересекает плоскость BDC_1 по прямой $C_1 O$, где O — середина отрезка BD . Прямая BD перпендикулярна плоскости $AA_1 C_1$ поскольку перпендикулярна прямым OO_1 и AC . Следовательно, плоскости $AA_1 C_1$ и BDC_1 перпендикулярны. Поэтому расстояние от точки O_1 до плоскости BDC_1 равно высоте $O_1 H$ прямоугольного треугольника $OO_1 C_1$.

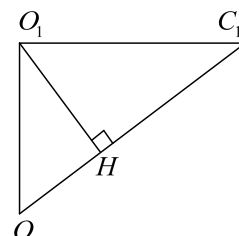
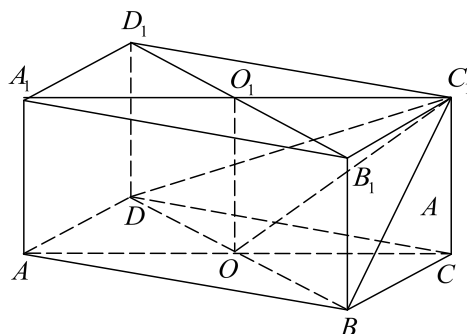
Из условия следует, что

$$OO_1 = 6, O_1 D_1 = 6, O_1 C_1 = \sqrt{C_1 D_1^2 - O_1 D_1^2} = 8.$$

Откуда:

$$O_1 H = \frac{O_1 C_1 \cdot OO_1}{\sqrt{O_1 C_1^2 + OO_1^2}} = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4,8.$$

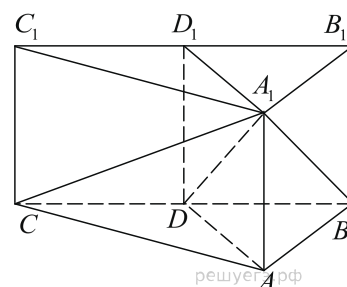
Ответ: 4,8.



5. 5. Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC = 5$, $BC = 6$. Высота призмы равна 3. Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до плоскости BCA_1 .

Решение.

Пусть $A_1 D_1$ — высота треугольника $A_1 B_1 C_1$, тогда D_1 — середина стороны $B_1 C_1$. Прямая $C_1 D_1$ параллельна плоскости BCA_1 , поэтому расстояние от точек C_1 и D_1 до плоскости BCA_1 равны. Плоскость $AA_1 D_1$ пересекает плоскость BCA_1 по прямой $A_1 D$, где D — середина отрезка BC . Прямая BC перпендикулярна плоскости $AA_1 D_1$ поскольку перпендикулярна прямым DD_1 и $A_1 D_1$. Следовательно, плоскости $AA_1 D_1$ и BCA_1 перпендикулярны. Поэтому расстояние от точки D_1 до плоскости BCA_1 равно высоте $D_1 H$ прямоугольного треугольника $A_1 D_1 D$.

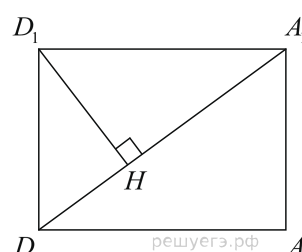


Из условия следует, что $DD_1 = 3$, $C_1 D_1 = 3$, $A_1 D_1 \sqrt{A_1 C_1^2 - C_1 D_1^2} = 4$.

Откуда:

$$D_1 H = \frac{A_1 D_1 \cdot DD_1}{\sqrt{A_1 D_1^2 + DD_1^2}} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2,4.$$

Ответ: 2,4.

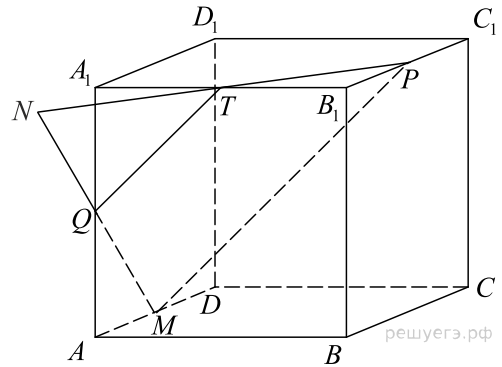
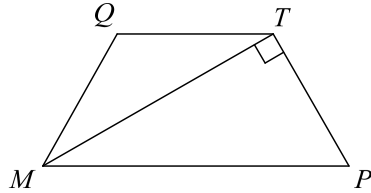


6. 6. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до прямой MT , где точки M и T — середины ребер AD и $A_1 B_1$ соответственно.

Решение.

Пусть P — середина ребра B_1C_1 , а Q — середина ребра AA_1 . Заметим, что $PMQT$ — трапеция, так как $QT \parallel B_1A \parallel PM$.

Получаем:



$$TQ = QM = PT = \frac{1}{2}B_1A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}AB = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2.$$

Заметим, что $MP = 4$. Продлим прямые MQ и PT и обозначим точку их пересечения N . В треугольнике MNP $QT \parallel MP$, $QT = \frac{1}{2}MP$ значит QT является средней линией, и T — середина NP . Треугольник MNP — правильный. MT — медиана и высота. Значит, PT — перпендикуляр к MT и искомое расстояние равно $PT = 2$.

Ответ: 2.

7. 7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости $A_1 BT$, где T — середина ребра AD .

Решение.

Пусть h — искомое расстояние. Найдём двумя способами объём пирамиды $A_1 ATB$. С одной стороны, он равен $\frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot S_{ATB} = \frac{1}{12}$. С другой стороны, он равен $\frac{1}{3} h \cdot S_{A_1 TB}$. Треугольник $A_1 BT$ — равнобедренный, его основание $A_1 B$ равно $\sqrt{2}$, а боковые стороны равны $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Если

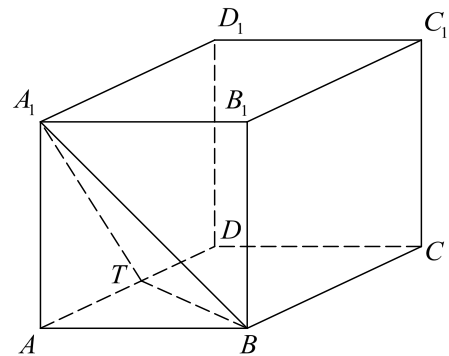
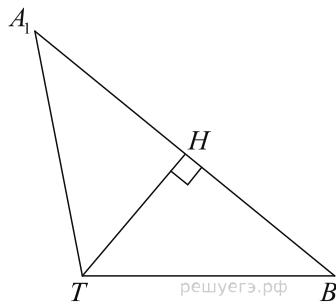
H — середина основания $A_1 B$, то $TH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому

$S_{A_1 BT} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Следовательно, объём пирамиды $A_1 ATB$ равен $h \cdot \frac{\sqrt{6}}{12}$. Приравняем выражения

для объёма: $h \cdot \frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{1}{12}$, откуда

$$h = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.



8. 8. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 .

Решение.

Плоскость ACD_1 проходит через точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость $A_1B_1C_1$. Точка O_1 является точкой пересечения диагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Диагонали квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше стороны квадрата и делятся точкой пересечения пополам.

Поэтому $OB = O_1D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отрезок OO_1 равен стороне квадрата. Из прямоугольного треугольника OO_1D_1 по теореме Пифагора найдём OD_1 :

$$OD_1 = \sqrt{OO_1^2 + O_1D_1^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

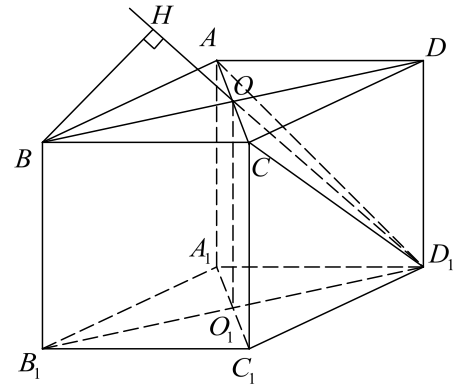
Найдём синус угла OD_1O_1 :

$$\sin \angle OD_1O_1 = \frac{OO_1}{OD_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Опустим перпендикуляр BH на плоскость ACD_1 , он попадёт на продолжение отрезка D_1O . Длина отрезка BH и будет являться расстоянием от точки B до плоскости ACD_1 . Рассмотрим четырёхугольник BB_1D_1D : $BB_1 \parallel DD_1$, $BB_1 = DD_1$ и $BB_1 \perp A_1B_1C_1D_1$, следовательно, BB_1D_1D — прямоугольник, откуда $BD \parallel B_1D_1$. Прямая HD_1 — секущая при параллельных прямых BD и B_1D_1 , поэтому углы HOB и ODO_1 равны. Из прямоугольного треугольника OBH найдём BH :

$$BH = OB \sin \angle BOH = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



9. 9. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $2\sqrt{10}$, высота призмы равна $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCM , где M — середина ребра A_1C_1 .

Решение.

Пусть C_1P — высота треугольника CC_1M . Плоскость BCM пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ по прямой ML , параллельной прямым BC и B_1C_1 . Поскольку призма прямая и $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1 = 90^\circ$, прямая LM перпендикулярна грани ACC_1A_1 , и, значит, $C_1P \perp LM$, и, следовательно, BCM . Отсюда следует, что расстояние от точки C_1 до плоскости BCM равно длине отрезка C_1P .

Найдём C_1P из треугольника CC_1M :

$$C_1M = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}AB \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}.$$

По теореме Пифагора:
 $CM = \sqrt{CC_1^2 + C_1M^2} = 5$. Найдём C_1P :

$$C_1P = \frac{C_1C \cdot C_1M}{CM} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{5} = 2.$$

Ответ: 2.

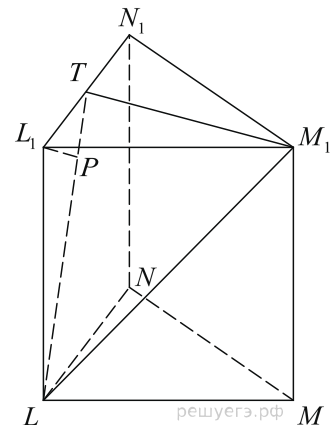
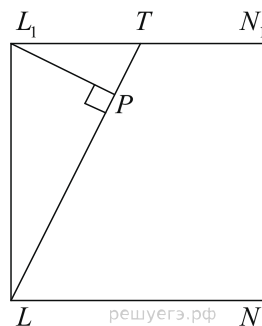
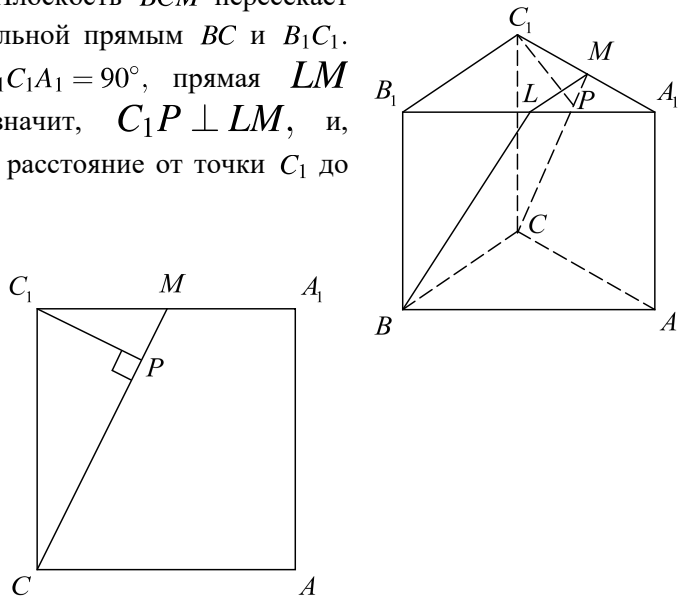
10. 10. Ребро основания правильной треугольной призмы $LMNL_1M_1N_1$ равно её высоте и равно $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки L_1 до плоскости LM_1T , где T — середина ребра L_1N_1 .

Решение.

Пусть L_1P — высота треугольника LL_1T . Призма — прямая, поэтому прямая M_1T перпендикулярна плоскости LNN_1 и, значит, $M_1T \perp L_1P$. Следовательно, $L_1P \perp LM_1T$. Отсюда следует, что расстояние от точки L_1 до плоскости LM_1T равно длине отрезка L_1P . По теореме Пифагора $LT = \sqrt{LL_1^2 + L_1T^2} = 5$. Найдём L_1P :

$$L_1P = \frac{L_1L \cdot L_1T}{LT} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{5} = 2.$$

Ответ: 2.



11. 11. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , боковая сторона которого равна $6\sqrt{3}$, а угол ACB равен 120° . Найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1 , если известно, что боковое ребро данной призмы равно 12.

Решение.

Опустим из точки A перпендикуляр AE на прямую B_1C_1 и проведем в плоскости грани CBB_1C_1 прямую EF , параллельную прямой C_1C . Так как $C_1C \perp ABC$, то и $EF \perp ABC$, а, значит, прямая AF является проекцией прямой AE на плоскость ABC . Поскольку $B_1C_1 \parallel BC$, то $AE \perp BC$, а, следовательно, и $AF \perp CB$ согласно теореме о трех перпендикулярах.

Далее находим:

1) из $\triangle ACF$: $AF = AC \sin \angle ACF = 6\sqrt{3} \sin 60^\circ = 9$;

2) из $\triangle AEF$: $AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = 15$.

Ответ: 15.

12. 12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SA .

Решение.

В треугольнике ASC проведём высоты CM и SH . Искомое расстояние — длина отрезка CM . Ясно, что,

$$AC \cdot SH = AS \cdot CM, \text{ откуда } CM = \frac{AC \cdot SH}{AS}.$$

Треугольник ASC равнобедренный, $AS = SC = 2$, $AC = \sqrt{3}$. Тогда

$$SH = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } CM = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{39}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

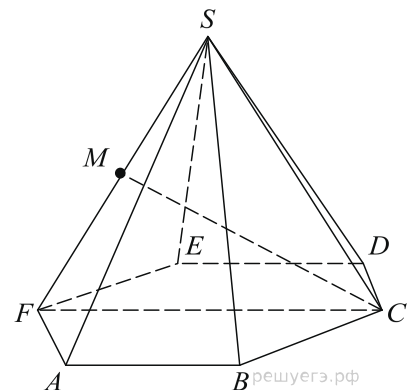
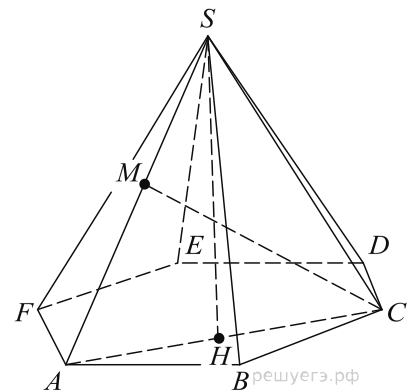
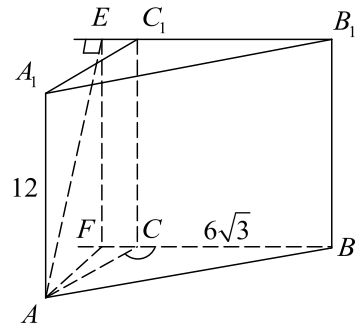
13. 13. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SF .

Решение.

Радиус описанной около правильного шестиугольника окружности равен стороне шестиугольника. Значит, $FC = 2$. Поэтому треугольник FSC — равносторонний. Следовательно, высота CM

этого треугольника равна $\frac{FS \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.



14. 14. В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD .

Решение.

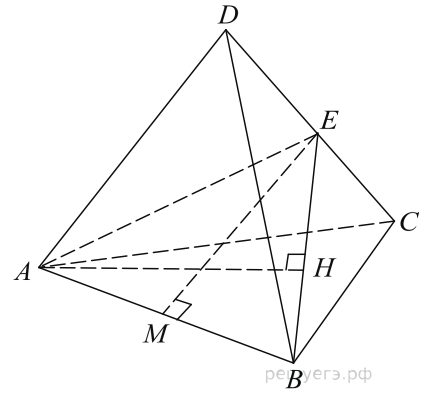
Рассмотрим треугольник AEB и его высоты AH и EM . Составим равенство: $AH \cdot BE = EM \cdot AB$. Заметим теперь, что треугольник

AEB равнобедренный и $AE = EB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому

$$EM = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Тогда}$$

$$AH = \frac{EM \cdot AB}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



15. 15. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите расстояние от точки C до прямой SA .

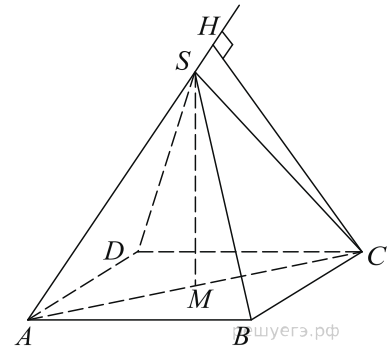
Решение.

Рассмотрим треугольник ASC и его высоты CH и SM . Составим равенство

$$CH \cdot AS = SM \cdot AC, \quad AC = \sqrt{2}; \quad AM = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{поэтому} \quad SM = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тогда} \quad CH = \frac{SM \cdot AC}{AS} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.



16. 16. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1 .

Решение.

Искомое расстояние равно высоте B_1H треугольника AB_1C_1 .

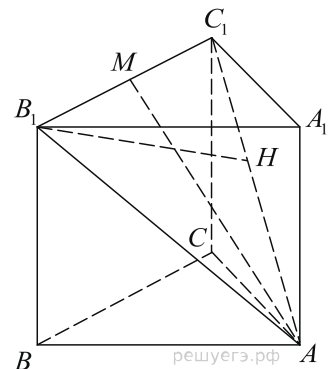
Треугольник равнобедренный, поскольку $B_1A = AC_1 = \sqrt{5}$. Дополнительно проведём высоту и медиану AM . Найдём её длину:

$$AM = \sqrt{B_1A^2 - B_1M^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Тогда, $S_{B_1AC_1} = \frac{1}{2} B_1C_1 \cdot AM = \frac{1}{2} AC_1 \cdot B_1H$, откуда получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{19}}{2} = \sqrt{5} \cdot B_1H. \text{ Следовательно, } B_1H = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{95}}{10}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{95}}{10}$.



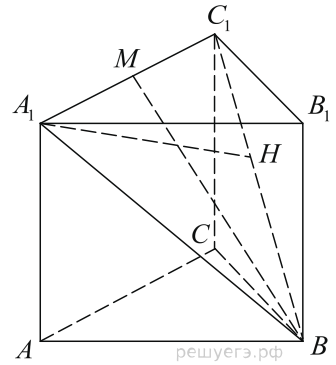
17. 17. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 1, а ребро основания равно 2. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1 .

Решение.

Искомое расстояние равно высоте A_1H треугольника A_1BC_1 . Треугольник равнобедренный, поскольку $A_1B = BC_1 = \sqrt{5}$. Дополнительно проведём высоту и медиану BM . Найдём её длину:
 $BM = \sqrt{A_1B^2 - A_1M^2} = \sqrt{5 - 1} = 2$.

Тогда $S_{A_1BC_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot BM = \frac{1}{2} BC_1 \cdot A_1H$, откуда получаем уравнение
 $2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot A_1H$. Следовательно, $A_1H = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



18. 18. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC , у которого угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани B_1C составляет угол 30° с плоскостью AA_1B_1 . Найдите высоту призмы.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. По определению, угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость. Опустим перпендикуляр CE на плоскость AA_1B_1 , тогда B_1E — проекция прямой B_1C на плоскость AA_1B_1 , следовательно, угол CB_1E — угол между наклонной CB_1 и плоскостью AA_1B_1 , значит, этот угол равен 30° . Из прямоугольного треугольника ABC :

$$BC = AC \operatorname{tg} \angle BAC = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 10.$$

Углы BAC и BCE равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Из прямоугольного треугольника BEC находим:

$$BE = BC \sin \angle BCE = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5, \quad CE = BC \cos \angle BCE = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Обозначим искомое расстояние x . Из прямоугольного треугольника BB_1C по теореме Пифагора: $CB_1 = \sqrt{x^2 + 100}$. Из прямоугольного треугольника BB_1E по теореме Пифагора: $B_1E = \sqrt{x^2 + 25}$. Применим теорему косинусов для треугольника B_1CE : $EC^2 = CB_1^2 + B_1E^2 - 2 \cdot B_1E \cos \angle CB_1E$, тогда

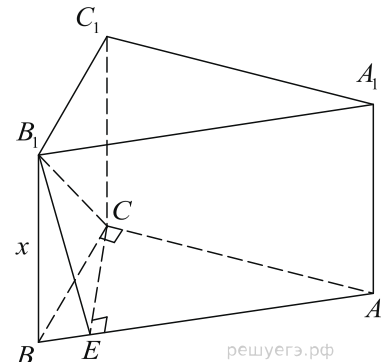
$$\begin{aligned} 75 &= 100 + x^2 + x^2 + 25 - 2\sqrt{100 + x^2}\sqrt{x^2 + 25} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{3(x^2 + 100)(x^2 + 25)} &= 2x^2 + 50 \Leftrightarrow 3(x^4 + 125x^2 + 2500) = 4x^4 + 200x^2 + 2500 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^4 - 175x^2 - 5000 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 200, \\ x^2 = -25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10\sqrt{2}, \\ x = -10\sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

По смыслу задачи подходит только корень $10\sqrt{2}$.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

Примечание.

Можно заметить, что треугольник B_1EC прямоугольный: прямая CE перпендикулярна BE , BE — проекция наклонной B_1E , а тогда по теореме о трёх перпендикулярах CE перпендикулярна наклонной B_1E . Далее: гипотенуза вдвое больше катета, лежащего напротив угла 30° : $B_1C = 2CE = 10\sqrt{3}$. Искомую высоту призмы находим по гипотенузе и катету из прямоугольного треугольника B_1BC :
 $B_1B = \sqrt{B_1C^2 - BC^2} = \sqrt{200}$.



19. 19. Основанием прямой призмы $MNKM_1N_1K_1$ является прямоугольный треугольник MNK , у которого угол N равен 90° , угол M равен 60° , $NK = 18$. Диагональ боковой грани M_1N составляют угол 30° с плоскостью MM_1K_1 . Найдите высоту призмы.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Вспомним, что по определению угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость. Поэтому опустим перпендикуляр NE на плоскость MM_1K_1 , тогда M_1E — проекция прямой M_1N на плоскость MM_1K_1 , следовательно, угол NM_1E — угол между наклонной NM_1 и плоскостью MM_1K_1 , значит, этот угол равен 30° . Из прямоугольного треугольника KMN :

$$MN = NK \operatorname{tg} \angle MKN = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}.$$

Углы MKN и MNE равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Из прямоугольного треугольника MEN находим:

$$NE = MN \sin \angle NME = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9.$$

Обозначим искомое расстояние x . Из прямоугольного треугольника MM_1N по теореме Пифагора: $NM_1 = \sqrt{x^2 + 108}$. Рассмотрим треугольник M_1NE , он прямоугольный и $\angle NM_1E = 30^\circ$.

$$NM_1 = 2NE \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 108} = 18 \Leftrightarrow x^2 = 216 \Leftrightarrow x = \pm 6\sqrt{6}$$

По смыслу задачи подходит только корень $6\sqrt{6}$.

Ответ: $6\sqrt{6}$.

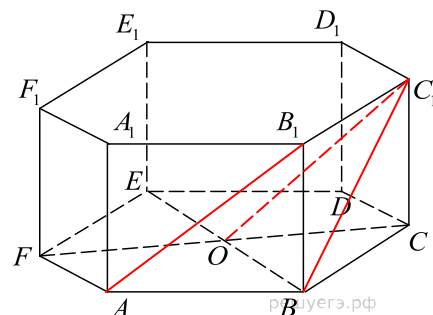
20. 20. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

Решение.

Угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен углу между прямыми OC_1 и BC_1 .

В треугольнике OBC_1 $OB = 1$, $BC_1 = OC_1 = \sqrt{2}$

Из теоремы косинусов получаем



$$\cos(\angle OC_1B) = \frac{(OC_1)^2 + (BC_1)^2 - (OB)^2}{2 \cdot OC_1 \cdot BC_1} = \frac{(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2 - 1^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2+2-1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Косинус положителен, значит $\angle OC_1B$ - острый, значит это искомый угол между прямыми

Ответ: 0,75.

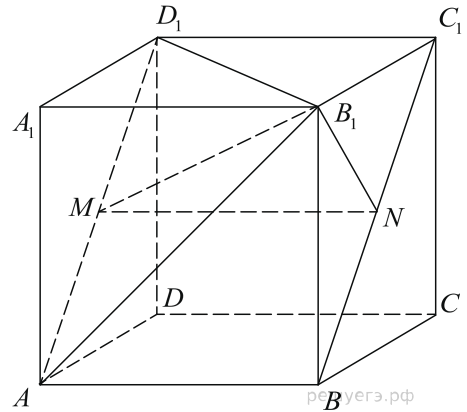
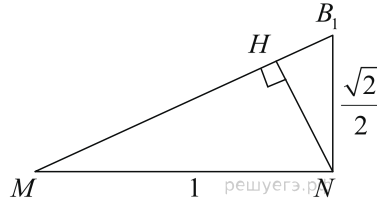
21. 21. Дан куб $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1 .

Решение.

Пусть M — середина AD_1 , N — середина BC_1 , $BC_1 \parallel AD_1$, $B_1C \perp BC_1$, значит, $B_1N \perp AD_1$. Кроме того, $MN \perp AD_1$, следовательно, плоскость $MB_1N \perp AD_1$. Опустим перпендикуляр NH из точки N на прямую MB_1 , кроме этого, $NH \perp AD_1$ (так как лежит в плоскости MB_1N), следовательно, $NH \perp AB_1D_1$ и является искомым расстоянием.

Искомый отрезок NH является высотой прямоугольного треугольника MNB_1 с прямым углом N .

Поэтому



$$NH = \frac{NB_1 \cdot NM}{MB_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22. 22. Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол 60° . Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC . Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

Решение.

Пусть отрезок AD — хорда основания, параллельная BC . Тогда треугольник ADP является искомым сечением, так как плоскость ADP содержит прямую AP и прямую AD , параллельную BC . Опустим перпендикуляр PK на прямую AD . Согласно теореме о трех перпендикулярах OK также является перпендикуляром к AD , значит, $AD \perp (OPK)$. Высота OF треугольника OPK лежит в плоскости OPK , следовательно, $OF \perp AD$ и $OF \perp PK$, значит, $OF \perp (ADP)$.

Далее находим:

1) из условия $AD \parallel BC$: $\angle DAC = \angle BCA = 60^\circ$;

2) из правильного треугольника AOD : $OK = \frac{AO\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) из прямоугольного треугольника APO :

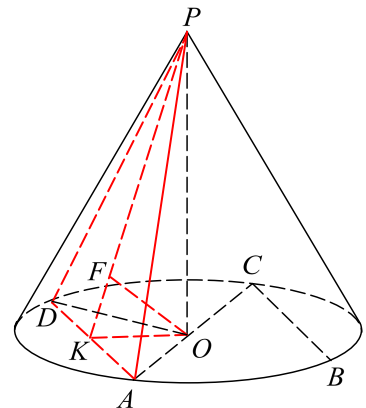
$$PO^2 = AP^2 - AO^2 = 4R^2 - R^2 = 3;$$

4) из прямоугольного треугольника KPO :

$$а) \quad KP = \sqrt{PO^2 + KO^2} = \frac{\sqrt{15}}{2};$$

$$б) \quad OF = \frac{OK \cdot OP}{PK} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{15}}$.



23. 23. Отрезок KM — диаметр основания конуса, отрезок AK — образующая этого конуса, которая в 3 раза больше радиуса его основания. Хорда основания ML составляет с прямой KM угол

45°. Через AK проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой ML . Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

Решение.

Пусть отрезок KN — хорда основания, параллельная ML . Тогда треугольник AKN окажется искомым сечением, так как плоскость AKN содержит прямую AK и прямую KN , параллельную ML . Опустим перпендикуляр AB на прямую KN . Согласно теореме о трех перпендикулярах OB также является перпендикуляром к KN , значит, $KN \perp (ABO)$. Высота OC треугольника ABO лежит в плоскости ABO , следовательно, $OC \perp AB$ и $OC \perp KN$, значит, $OC \perp (AKN)$.

Далее находим:

1) из условия $KN \parallel ML$: $\angle NKM = \angle KML = 45^\circ$;

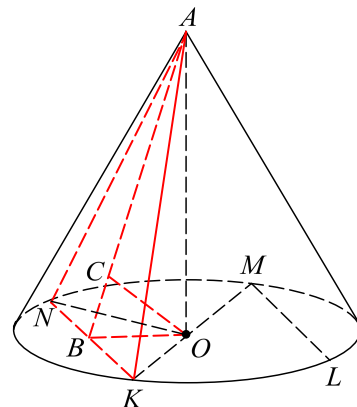
2) из прямоугольного треугольника KON : $OB = \frac{KO\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) из прямоугольного треугольника AKO :
 $AO^2 = AK^2 - KO^2 = 9R^2 - R^2 = 8$;

4) из прямоугольного треугольника ABO :

а) $AB = \sqrt{OB^2 + AO^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$;

б) $OC = \frac{OB \cdot OA}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{34}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{34}}$.



Ответ: $\frac{4}{\sqrt{34}}$.

24. 24. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM , где M — середина ребра SC .

Решение.

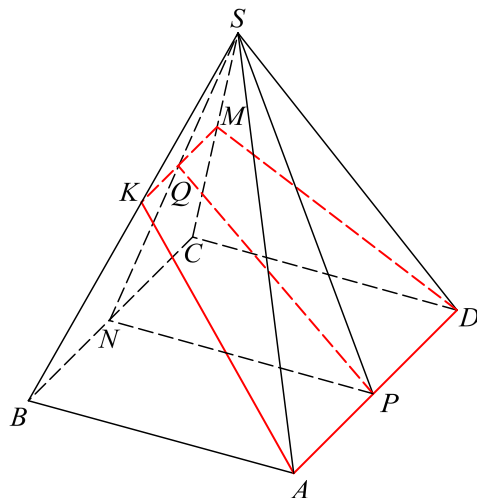
Прямая BC параллельна AD , значит, плоскость ADM проходит через среднюю линию KM треугольника SBC , K — середина ребра SB , где

Построим сечение $ADMK$. Пусть P — середина AD , N — середина BC . Рассмотрим сечение NSP :

$$SN = SP = \sqrt{SA^2 - AP^2} = \sqrt{5 - 1} = 2.$$

Значит, треугольник SNP равносторонний. Искомое расстояние равно расстоянию от N до PQ , где Q — середина SN , PQ — медиана и высота треугольника SNP . Поэтому
 искомое расстояние равно $NQ = \frac{1}{2}SN = 1$.

Ответ: 1.



25. 25. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки S до плоскости ADM , где M — середина ребра SC .

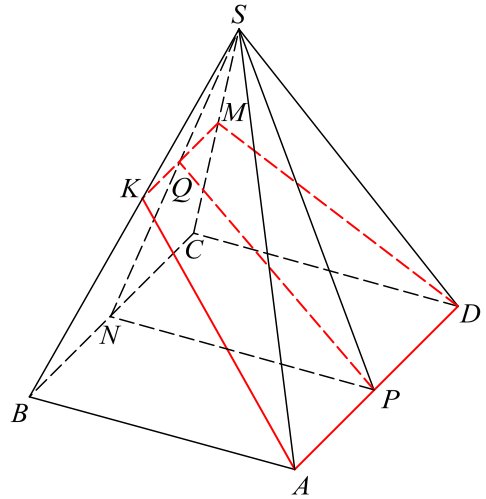
Решение.

Построим сечение $ADMK$, где K — середина ребра SB и $KM \parallel BC \parallel AD$ — средняя линия треугольника SBC . Покажем, что искомое расстояние равно длине SQ , где Q — середина SN — высоты боковой грани SBC .

Рассмотрим плоскость SNP , где P — середина стороны AD .

$$SN = SP = \sqrt{SA^2 - AP^2} = \sqrt{5 - 1} = 2.$$

Значит, треугольник SNP — равносторонний и медиана PQ является также высотой. Следовательно, $PQ \perp SQ$, учитывая, что средняя линия $KM \perp SQ$, можем сделать вывод, что $SQ \perp ADM$, значит искомое расстояние $SQ = \frac{1}{2}SN = 1$.



Ответ: 1.

26. 26. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L — середина ребра MB . Найдите высоту данной пирамиды.

Решение.

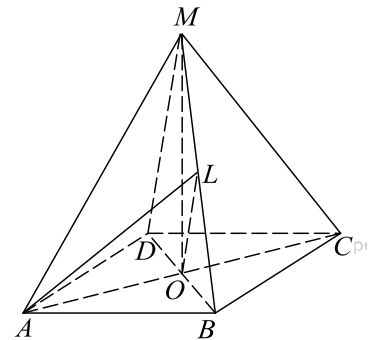
Обозначим угол между DM и AL буквой α . Пусть MO — высота пирамиды $MABCD$. Тогда OL — средняя линия треугольника BDM , следовательно, $OL \parallel MD$. Поэтому $\angle ALO = \alpha$. По условию $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$.

Основание $ABCD$ — квадрат со стороной, равной $5\sqrt{2}$. Следовательно, $OA \perp OB$, $OL \perp OA$, $OA = 5$. Далее, из прямоугольного треугольника AOL находим:

$$OL = \frac{OA}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Боковое ребро $MD = 2OL = 5\sqrt{2}$, поскольку OL — средняя линия треугольника BDM . Далее, из прямоугольного треугольника MOD находим искомую высоту MO пирамиды $MABCD$:

$$MO = \sqrt{MD^2 - OD^2} = \sqrt{MD^2 - OD^2} = 5.$$



Ответ: 5.

27. 27. Длины ребер AB , AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15. Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1 .

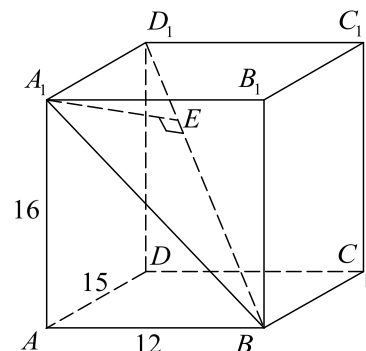
Решение.

Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1E на прямую BD_1 . Так как $A_1D_1 \perp (A_1AB)$, то $A_1D_1 \perp A_1B$, а, значит, отрезок A_1E — высота прямоугольного треугольника A_1BD_1 , откуда $A_1E = \frac{A_1B \cdot A_1D_1}{BD_1}$. Далее находим:

$$A_1B = \sqrt{A_1A^2 + AB^2} = 20, \quad BD_1 = \sqrt{A_1A^2 + AB^2 + A_1D_1^2} = 25,$$

$$A_1E = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12.$$

Ответ: 12.



28. 28. Длины ребер BC , BB_1 и BA прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 8, 12 и 9. Найдите расстояние от вершины D_1 до прямой $A_1 C$.

Решение.

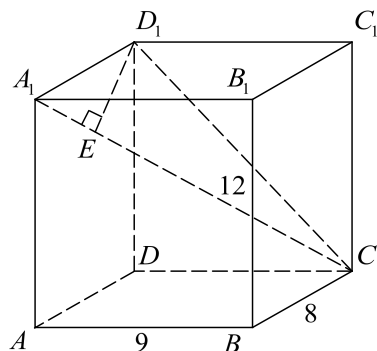
Опустим из точки D_1 перпендикуляр $D_1 E$ на прямую $A_1 C$. Так как $A_1 D_1 \perp (D_1 D C)$, то $A_1 D_1 \perp D_1 C$, а, значит, отрезок $D_1 E$ — высота прямоугольного треугольника $A_1 C D_1$, откуда $D_1 E = \frac{D_1 C \cdot A_1 D_1}{A_1 C}$.

Далее находим:

$$D_1 C = \sqrt{D_1 D^2 + D C^2} = 15,$$

$$A_1 C = \sqrt{C D^2 + D D_1^2 + A_1 D_1^2} = 17,$$

$$D_1 E = \frac{8 \cdot 15}{17} = \frac{120}{17}.$$



Ответ: $\frac{120}{17}$.

29. 29. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

Решение.

Пусть SO — высота пирамиды. Тогда, так как треугольник ABC равносторонний,

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}, \quad SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{25 - 12} = \sqrt{13}.$$

Пусть V — объём пирамиды, тогда $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{39}$.

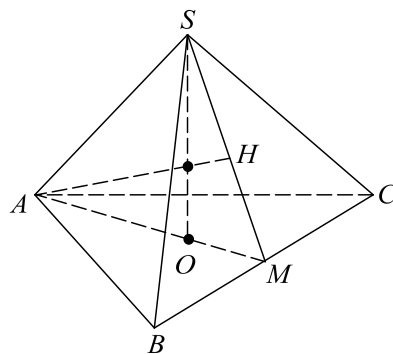
С другой стороны, $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{SBC}$, где h — искомое расстояние.

В треугольнике SBC высота SM равна $\sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Площадь треугольника SBC равна $S_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot BC = 12$. Получаем, что

$$h = \frac{3V}{S_{SBC}} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{39}}{12} = \frac{3\sqrt{39}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{39}}{4}$.



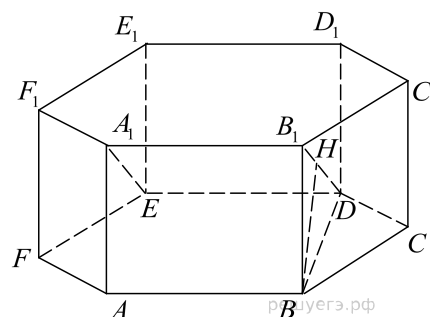
30. 30. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости DEA_1 .

Решение.

Прямые BB_1 и DB перпендикулярны прямой ED . Плоскость DEA_1 , содержащая прямую ED , перпендикулярна плоскости $BB_1 D$. Значит, искомое расстояние равно высоте BH прямоугольного треугольника $BB_1 D$, в котором $BB_1 = 1$, $BD = \sqrt{3}$, $B_1 D = 2$:

$$BH = \frac{BB_1 \cdot BD}{B_1 D} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

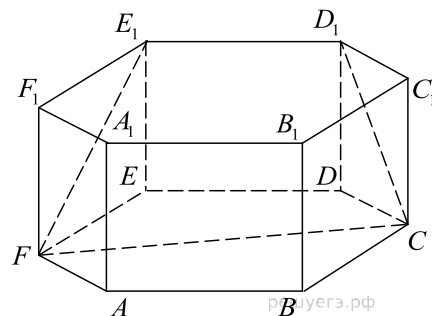
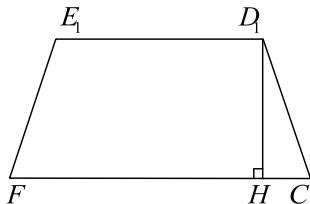


31. 31. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания которой равны 3, а боковые ребра равны 4, найдите расстояние от точки C до прямой $D_1 E_1$.

Решение.

Так как $ABCDEF$ правильный шестиугольник, то прямые FC и DE параллельны, параллельны также прямые $D_1 E_1$ и DE , следовательно, прямые $D_1 E_1$ и FC параллельны. Расстояние от точки до прямой $D_1 E_1$, равно расстоянию между прямыми $D_1 E_1$ и FC .

В трапеции $FE_1 D_1 C$:



$$D_1 E_1 = 3, FC = 6, FE_1 = CD_1 = 5, CH = \frac{FC - E_1 D_1}{2} = \frac{6 - 3}{2} = \frac{3}{2},$$

тогда

$$D_1 H = \sqrt{25 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{100 - 9}}{2} = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{91}}{2}$.

32. 32. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1 найдите расстояние от точки B до прямой $E_1 F_1$.

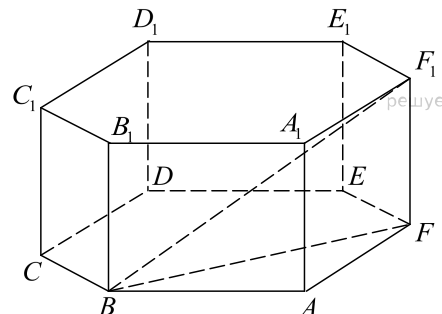
Решение.

Проведем отрезки BF и BF_1 , $BF \perp BC$, поскольку $\angle CBA = 120^\circ$, а $\angle ABF = 30^\circ$. BF — проекция BF_1 на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $BF_1 \perp E_1 F_1$. Таким образом искомое расстояние — длина отрезка BF_1 .

Рассмотрим треугольник $BF F_1$. Он прямоугольный, $BF = \sqrt{3}$, $FF_1 = 1$.

По теореме Пифагора находим: $BF_1 = \sqrt{3 + 1} = 2$.

Ответ: 2.



33. 33. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D . Сторона основания пирамиды равна $\sqrt{6}$, высота равна $\sqrt{30}$. Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT , где точки M и T — середины ребер AC и AB соответственно.

Решение.

Пусть точка O является центром правильного треугольника, а следовательно, центром описанной и вписанной окружностей. Отрезок AO является радиусом описанной окружности около треугольника ABC , он в корень из трёх меньше его стороны.

Пусть Q — середина ребра CD , P — середина ребра BD . По теореме о средней линии треугольника $TP \parallel AD \parallel MQ$, следовательно, точки M, T, P, Q лежат в одной плоскости.

$TP = \frac{1}{2}AD = MQ$, следовательно, точки M, T, P, Q являются вершинами параллелограмма.

Кроме того, $PQ \parallel BC$, а по теореме о трёх перпендикулярах, так как $AO \perp BC$, получим $AD \perp BC$, поэтому этот параллелограмм —

прямоугольник. Значит, искомое расстояние есть длина отрезка PT . Отрезок $AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

По теореме Пифагора

$$AD = \sqrt{AO^2 + DO^2} = 4\sqrt{2}, \quad PT = \frac{1}{2}AD = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

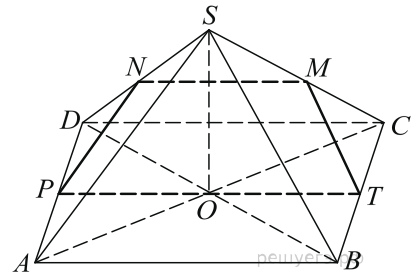
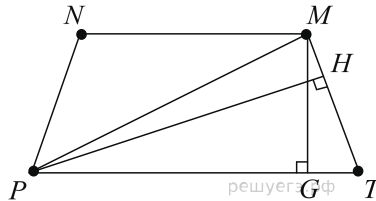
34. 34. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Ребро основания пирамиды равно $\sqrt{6}$, высота — $\sqrt{33}$. Найдите расстояние от середины ребра AD до прямой MT , где точки M и T — середины ребер CS и BC соответственно.

Решение.

Пусть O — центр основания, а N — середина ребра SD , P — середина ребра AD . Тогда $MN \parallel CD \parallel TP$, поэтому точки P, N, M, T лежат в одной плоскости и являются вершинами трапеции.

По теореме о средней линии треугольника

$NP = \frac{1}{2}AS = \frac{1}{2}BS = MT$, так что трапеция равнобедренная.



Так как $AO = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, $AS = \sqrt{OA^2 + OS^2} = \sqrt{3 + 33} = 6$, $NP = MT = 3$.

Основания трапеции равны $PT = \sqrt{6}$, $MN = \frac{\sqrt{6}}{2}$. В треугольнике PMT проведем высоты MG и PH . Тогда

$$GT = \frac{PT - MN}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad MG = \sqrt{MT^2 - GT^2} = \sqrt{9 - \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{69}{8}}.$$

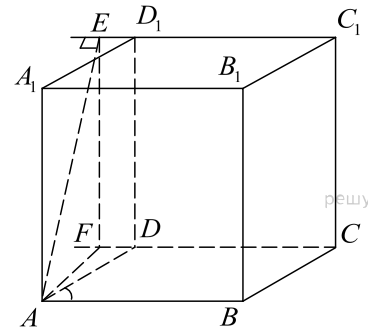
Заметим, что $MG \cdot PT = 2 \cdot S_{PMT} = PH \cdot MT$, поэтому $PH = \frac{MG \cdot PT}{MT} = \frac{1}{2}\sqrt{23}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{23}$.

35. 35. Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$ а угол BAD равен 60° . Найдите расстояние от точки A до прямой $C_1 D_1$, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

Решение.

Опустим из точки A перпендикуляр AE на прямую C_1D_1 и проведем в плоскости грани CDD_1C_1 прямую EF , параллельную прямой D_1D . Так как $D_1D \perp (ACD)$, то и $EF \perp (ACD)$, а значит, прямая AF является проекцией прямой AE на плоскость ABC . Поскольку $D_1C_1 \parallel DC$, то $AE \perp CD$, а следовательно, и $AF \perp CD$ согласно теореме о трех перпендикулярах.



Далее находим:

$$1) \text{ из } \triangle ADF: AF = AD \sin \angle ADF = 4\sqrt{3} \sin 60^\circ = 6;$$

$$2) \text{ из } \triangle AEF: AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = 10.$$

Ответ: 10.

36. 36. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 3, а сторона основания равна 2. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

Решение.

Пусть SO – высота пирамиды. Тогда

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{9 - \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{69}}{3}.$$

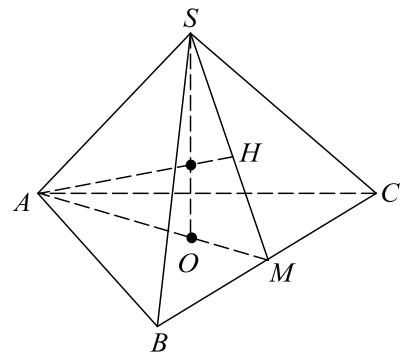
$$\text{Пусть } V \text{ – объём пирамиды, тогда } V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{23}}{3}.$$

С другой стороны, $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{SBC}$, где h – искомое расстояние.

В треугольнике SBC высота SM равна $\sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$.

Площадь треугольника SBC равна $S_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot BC = 2\sqrt{2}$. Получаем, что

$$h = \frac{3V}{S_{SBC}} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{46}}{4}$$



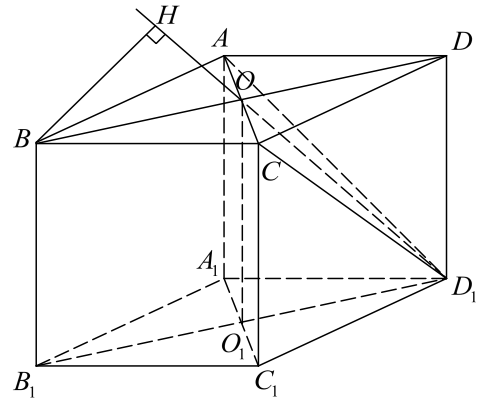
Ответ: $\frac{\sqrt{46}}{4}$.

37. 37. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 .

Решение.

Плоскость ACD_1 проходит через точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость $A_1B_1C_1D_1$. Точка O_1 является точкой пересечения диагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Диагонали квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше стороны квадрата и делятся точкой пересечения пополам. Поэтому $OB = O_1D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отрезок OO_1 равен стороне квадрата. Из прямоугольного треугольника OO_1D_1 по теореме Пифагора найдём OD_1 :

$$OD_1 = \sqrt{OO_1^2 + O_1D_1^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$



Найдём синус угла ODO_1 :

$$\sin \angle OD_1O_1 = \frac{OO_1}{OD_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Опустим перпендикуляр BH на плоскость ACD_1 , он попадёт на продолжение отрезка D_1O . Длина отрезка BH и будет являться расстоянием от точки B до плоскости ACD_1 . Рассмотрим четырёхугольник BB_1D_1D : $BB_1 \parallel DD_1$, $BB_1 = DD_1$ и $BB_1 \perp A_1B_1C_1D_1$, следовательно, BB_1D_1D — прямоугольник, откуда $BD \parallel B_1D_1$. Прямая HD — секущая при параллельных прямых BD и B_1D_1 , поэтому углы HOB и OD_1O_1 равны. Из прямоугольного треугольника OBH найдём BH :

$$BH = OB \sin \angle BOH = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

38. 38. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ высота равна 1, а сторона основания равна $\sqrt{2}$. Точка M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1 .

Решение.

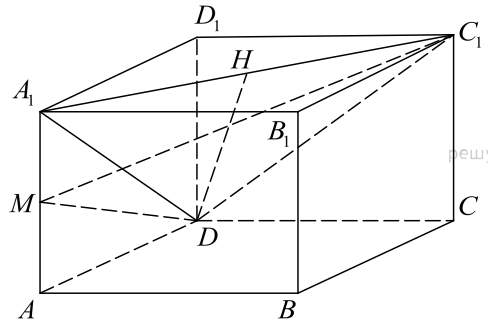
Рассмотрим треугольную пирамиду MDA_1C_1 . Ее объем можно выразить двумя способами:

$$1) V = \frac{1}{3} S_{MA_1D} \cdot C_1D_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot A_1M \cdot C_1D_1 = \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{6}.$$

$$2) V = \frac{1}{3} S_{DA_1C_1} \cdot h, \text{ где } h \text{ — искомое расстояние.}$$

Приравняем выражения для объемов и выразим его:

$$h = \frac{1}{2S_{DA_1C_1}}.$$



Найдем площадь равнобедренного треугольника DA_1C_1 . Проведем в нем высоту DH .

$$DA_1 = \sqrt{D_1A_1^2 + DD_1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}.$$

$$A_1C_1 = A_1D_1 \cdot \sqrt{2} = 2, A_1H = \frac{A_1C_1}{2} = 1.$$

$$DH = \sqrt{DA_1^2 - A_1H^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}.$$

$$S_{DA_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot DH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, искомое расстояние $H = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

39. 39. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC .

а) Докажите, что высота пирамиды, проведённая из точки A , делится плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC и SA , пополам.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = \sqrt{5}$, $AB = AC = 5$, $BC = 2\sqrt{5}$.

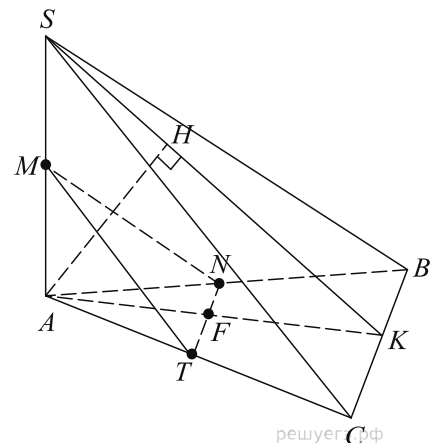
Решение.

а) Пусть AH — искомая высота. Проведем SK , $H \in SK$. Проведем AK . Поскольку T и N — середины AC и AB соответственно, то TN — средняя линия треугольника ABC . Тогда TN делит AK на две равные части. Поэтому MF — средняя линия треугольника SKA , она делит AH на две равные части.

б) Поскольку $AB = AC$, то треугольник ABC — равнобедренный. Имеем $SC = SB$, следовательно, треугольник SCB тоже равнобедренный. Зная, что $SA \perp (ABC)$, имеем $SA \perp AB$. Тогда треугольники SAC и SAB равны по двум сторонам и углу между ними.

Так как $AC = AB$, $AH \perp (CBS)$, следовательно, $HC \perp AH$, $AH \perp HB$, тогда $HC = HB$. Значит, точка H принадлежит серединному перпендикуляру к CB , то есть SK , так как SK — медиана, высота и биссектриса равнобедренного треугольника. Тогда $CK = \sqrt{5}$, AK — биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника ABC . По теореме Пифагора $AK = 2\sqrt{5}$.

Поскольку $SA \perp (ABC)$, $SA \perp AK$. Тогда по теореме Пифагора $SK = 5$. Имеем $SA^2 = SK \cdot SH$, то есть $SH = 1$. Тогда $HK = 4$, следовательно, $AH = 2$. Тогда искомое расстояние равно 1.



Ответ: б) 1.