

Расстояние между прямыми и плоскостями

1. 1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

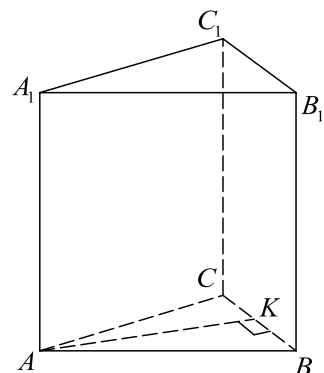
Решение.

Так как прямая BC_1 пересекается с прямой BB_1 параллельной прямой AA_1 и лежит в плоскости BCC_1 , параллельной AA_1 , то расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно расстоянию от прямой AA_1 до плоскости BCC_1 .

Пусть AK — высота треугольника ABC . AK перпендикулярна грани BCC_1B_1 , так как перпендикулярна двум пересекающимся прямым (BC и BB_1), лежащим в плоскости BCC_1 . Таким образом, искомое расстояние — длина отрезка AK . Из равностороннего треугольника ABC находим:

$$AK = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



2. 2. Расстояние между боковыми рёбрами AA_1 и BB_1 прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно 5, а расстояние между боковыми рёбрами AA_1 и CC_1 равно 8. Найдите расстояние от прямой AA_1 до плоскости BC_1C , если известно, что двугранный угол призмы при ребре AA_1 равен 60° .

Решение.

Поскольку $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, ее боковые грани — прямоугольники, следовательно, расстояние между боковыми рёбрами AA_1 и BB_1 равно AB , а расстояние между боковыми рёбрами AA_1 и CC_1 равно AC . Кроме того, угол BAC — линейный угол двугранного угла при ребре AA_1 .

Таким образом, $AB = 5$, $AC = 8$, $\angle BAC = 60^\circ$.

Пусть отрезок AH — высота основания ABC (см. рисунок). Поскольку $AH \perp BC$ и $AH \perp BB_1$, то $AH \perp (BC_1C)$, и, значит, длина отрезка AH и есть искомое расстояние от прямой AA_1 до параллельной ей плоскости BC_1C .

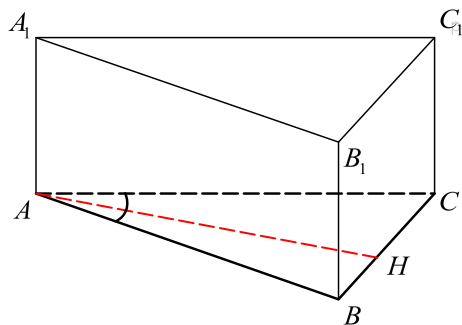
Рассматривая треугольник ABC , находим:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC} = \sqrt{25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 0,5} = 7.$$

$$2S_{\triangle ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 20\sqrt{3}.$$

$$AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

Ответ: $\frac{20\sqrt{3}}{7}$.

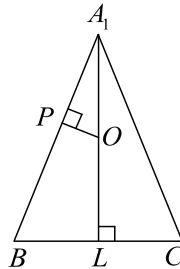


3. 3. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1 , является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM .

Решение.

Пусть данное сечение призмы — квадрат AA_1ML . Тогда диагонали перпендикулярны: $AM \perp A_1L$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AM \perp BC$. Следовательно, $AM \perp A_1BC$. Отсюда следует, что искомым расстоянием между прямыми A_1B и AM является длина перпендикуляра OP , опущенного из точки O пересечения диагоналей квадрата AA_1ML на прямую A_1B , так как $OP \perp A_1B$ и $OP \perp AM$.

Сторона квадрата AA_1ML равна высоте треугольника ABC , то есть $AL = \sqrt{21}$, а его диагональ $A_1L = \sqrt{42}$. В равнобедренном треугольнике A_1BC основание $BC = 2\sqrt{7}$, боковая сторона $A_1B = 7$. Отсюда, используя подобие треугольников A_1OP и A_1BL , найдём



$$OP = \frac{A_1O \cdot LB}{A_1B} = \frac{A_1L \cdot BC}{4A_1B} = \frac{\sqrt{42} \cdot 2\sqrt{7}}{4 \cdot 7} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

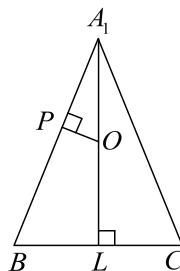
Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. 4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра основания которой равны 2. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1 , является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM .

Решение.

Пусть данное сечение призмы — квадрат AA_1ML . Тогда диагонали перпендикулярны: $AM \perp A_1L$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AM \perp BC$. Следовательно, $AM \perp A_1BC$. Отсюда следует, что искомым расстоянием между прямыми A_1B и AM является длина перпендикуляра OP , опущенного из точки O пересечения диагоналей квадрата AA_1ML на прямую A_1B , так как $OP \perp A_1B$ и $OP \perp AM$.

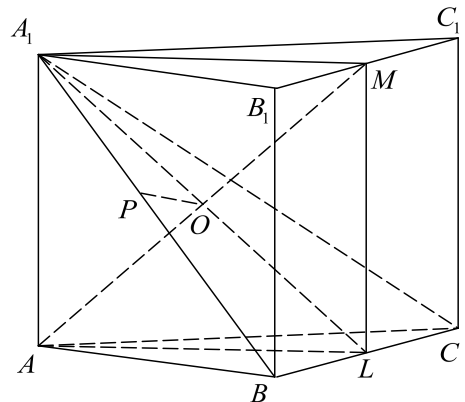
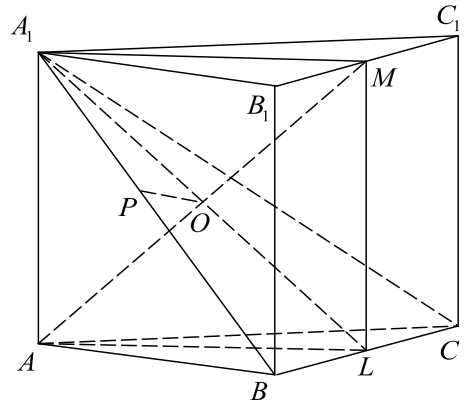
Сторона квадрата AA_1ML равна высоте треугольника ABC , то есть $AL = \sqrt{3}$, а его диагональ $A_1L = \sqrt{6}$. В равнобедренном треугольнике A_1BC основание $BC = 2$, боковая сторона $A_1B = \sqrt{7}$. Отсюда, используя подобие треугольников A_1OP и A_1BL , найдём



$$OP = \frac{A_1O \cdot LB}{A_1B} = \frac{A_1L \cdot BC}{4A_1B} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}$.

5. 5. Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO , где L — середина ребра MC , O — центр грани ABC .



Решение.

Пусть N — середина ребра AB , а P — середина отрезка OC . Прямая AL лежит в плоскости APL , параллельной прямой MO . Поэтому искомое расстояние равно расстоянию от прямой MO до плоскости APL .

Опустим из точки O перпендикуляр OH на прямую AP . Тогда $OH \perp APL$, и нам остаётся найти длину отрезка OH . Отношение $CO : ON = 2 : 1$, поэтому точки P и O делят отрезок CN на три равные части длиной $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ каждая. Пусть $\angle APN = \angle \alpha$. В треугольнике APN :

$$AN = \frac{1}{2}, \quad PN = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad AP = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$. Из треугольника OPH находим, что

$$OH = OP \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

