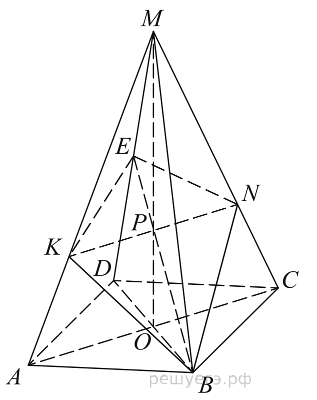
Сечения многогранников

1. 1. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2. Точка N принадлежит ребру MC, причём $MN: NC = 2:1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B и N параллельно прямой AC.

Решение.
Отрезок NK параллелен AC (точка K принадлежит ребру MA). Пусть NK пересекает MO в точке P(O — центр основания пирамиды), причём

$$MP : PO = MN : NC = 2 : 1,$$

тогда точка P является точкой пересечения медиан треугольника MBD. Прямая BP пересекает ребро MD в точке E. Четырёхугольник $BNEK$ — искомое сечение.



Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MB^2}}{2} = \sqrt{2};$$

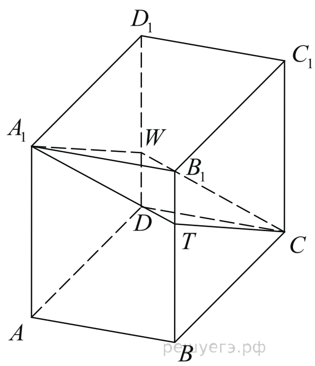
$$NK = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и NK четырёхугольника $BNEK$ перпендикулярны, следовательно, $S_{BNEK} = \dfrac{BE \cdot NK}{2} = \dfrac{2}{3}.$

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

2. 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 8$, $AD = 7$, $AA_1 = 5$. Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении $1 : 4$, считая от вершины D. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C, W и A_1.

Решение.
Отрезок CT параллелен A_1W (точка T принадлежит ребру BB_1). Плоскость сечения пересекает плоскость AA_1B_1 по прямой A_1T, параллельной CW, следовательно, искомое сечение — параллелограмм CTA_1W (рис. 1).

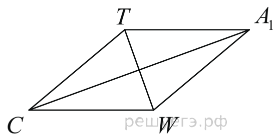


Треугольники CBT и A_1D_1W равны, следовательно,

$$BT = D_1W = \frac{4}{5}DD_1 = 4, DW = DD_1 - D_1W = 1,$$

$$CT = \sqrt{BC^2 + BT^2} = \sqrt{65}, CW = \sqrt{CD^2 + DW^2} = \sqrt{65},$$

Значит, CTA_1W — ромб со стороной $\sqrt{65}$ и диагональю $CA_1 = \sqrt{CB^2 + BA^2 + AA_1^2} = \sqrt{138}$ (рис. 2). Тогда диагональ

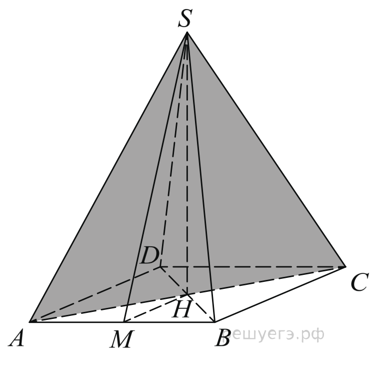


$$WT = 2\sqrt{CT^2 - \left(\frac{CA_1}{2}\right)^2} = \sqrt{122}, S_{CTA_1W} = \frac{CA_1 \cdot WT}{2} = \sqrt{4209}.$$

Ответ: $\sqrt{4209}$.

3. 3. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину *S* этой пирамиды и через диагональ её основания.

Решение.
Площадь основания пирамиды равна 144 − 108 = 36, поэтому *AB* = 6. Площадь боковой грани равна $\frac{108}{4} = 27$. Пусть *SM* — высота грани *SAB*. Тогда $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot 3 = 27$, поэтому *SM* = 9. Пусть *SH* — высота пирамиды. Имеем



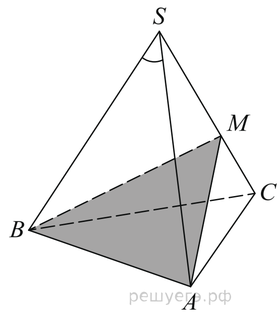
$$SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Тогда $S_{SAC} = \frac{SH \cdot AC}{2} = 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 36.$

Ответ: 36.

4. 4. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с основанием *ABC* угол *ASB* равен 36°. На ребре *SC* взята точка *M* так, что *AM* — биссектриса угла *SAC*. Площадь сечения пирамиды, проходящего через точки *A*, *M* и *B*, равна $25\sqrt{3}$. Найдите сторону основания.

Решение.
Нужное сечение — треугольник AMB.



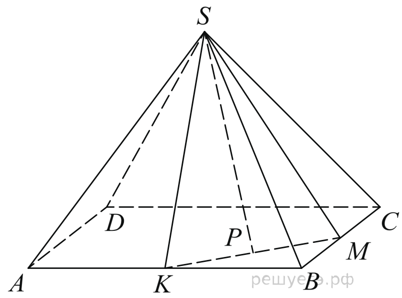
Рассмотрим треугольник ASC. Он равнобедренный, и $\angle SAC = \angle SCA = 72^\circ$. Значит, $\angle MAC = 36^\circ$.

Рассмотрим теперь треугольник CAM. Сумма его углов 180°, значит, $\angle AMC = 72^\circ$. Следовательно, треугольник CAM равнобедренный, и поэтому $AC=AM$. Аналогично находим, что $BM=BC$.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний, и его сторона AB одновременно является стороной основания. По условию составим уравнение $\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$, откуда $AB = 10$.

5. 5. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 5, а сторона основания равна 4.

Решение.
Изобразим указанное в условии сечение — треугольник SKM;



$$KM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Проведём в треугольнике SKM высоту SP. Точка P — середина KM.

Значит, $KP = \dfrac{1}{2}KM = \sqrt{2}.$

Из треугольника SKA находим

$$SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}.$$

Из треугольника SPK

$$SP = \sqrt{SK^2 - KP^2} = \sqrt{21-2} = \sqrt{19}.$$

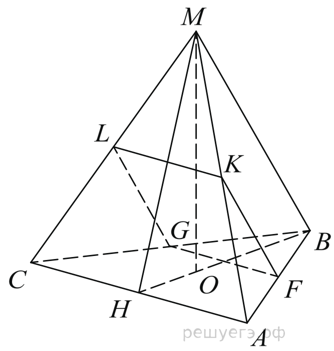
Тогда

$$S_{SKM} = \frac{1}{2}KM\cdot SP = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{19} = \sqrt{38}.$$

Ответ: $\sqrt{38}.$

6. 6. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 9, а боковые рёбра равны 15. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и BC параллельно прямой MB.

Решение.



Пусть F и G — середины рёбер AB и BC соответственно. Отрезки FK и GL параллельны MB, где точки K и L — середины рёбер MA и MC соответственно. Поскольку $FK=\dfrac{MB}{2}=GL$, искомое сечение — параллелограмм $FGLK$.

Пусть MH — высота и медиана треугольника MAC, BH — медиана и высота треугольника ABC, значит, прямая AC перпендикулярна плоскости MBH и AC перпендикулярна прямой MB, лежащей в этой плоскости. Отрезок FK параллелен MB, отрезок FG параллелен AC, следовательно, $FGLK$ — прямоугольник.

Пусть MO — высота пирамиды, тогда $MO=9$, $MB=15$, откуда $OB=12$. В правильном треугольнике ABC, где O — его центр, $AC=OB\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

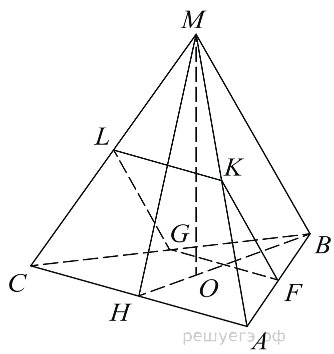
В прямоугольнике $FGLK$

$$FG=\frac{AC}{2}=6\sqrt{3},\ FK=\frac{MB}{2}=\frac{15}{2},\ S_{FGLK}=FG\cdot FK=45\sqrt{3}.$$

Ответ: $45\sqrt{3}$.

7. 7. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 6, а боковые рёбра равны 9. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AC и BC параллельно прямой MC.

Решение.



Пусть F и G — середины рёбер BC и AC соответственно. Отрезки FK и GL параллельны MC, где точки K и L — середины рёбер MB и MA соответственно. Поскольку $FK=\dfrac{MC}{2}=GL$, искомое сечение — параллелограмм $FGLK$.

Пусть MH — высота и медиана треугольника MAB, CH — медиана и высота треугольника ABC, тогда плоскость MHC перпендикулярна плоскости ABC, значит, прямая MC перпендикулярна прямой AB, следовательно, $FGLK$ — прямоугольник.

Пусть MO — высота пирамиды, тогда $MO=6$, $MC=9$, откуда $OC=3\sqrt{5}$. В правильном треугольнике ABC, где O — его центр, $AB=OC\sqrt{3}=3\sqrt{15}$.

В прямоугольнике $FGLK$

$$FG=\frac{AB}{2}=\frac{3\sqrt{15}}{2};\qquad FK=\frac{MC}{2}=\frac{9}{2};$$

$$S_{FGLK}=FG\cdot FK=\frac{27\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{27\sqrt{15}}{4}$.

8. 8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

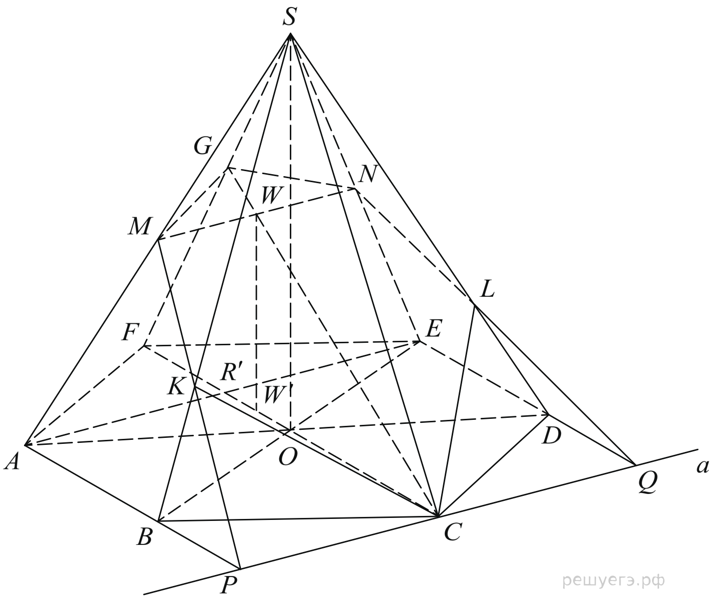
а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SB в отношении 3 : 1, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

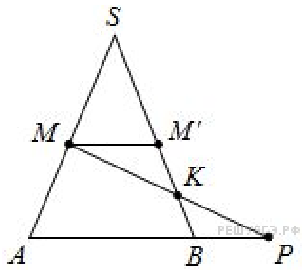
Решение.

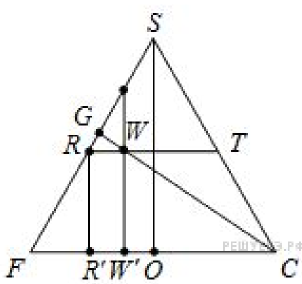
Решение 1:

а) Обозначим середины ребер SA и SE за M и N соответственно. Прямая $MN \parallel AE$, как средняя линия, и, следовательно, параллельна плоскости основания пирамиды. Это означает, что плоскость сечения пересекается с плоскостью основания по прямой a параллельной MN и проходящей через точку C. Пусть прямая AB пересекается с прямойa в точке P. Тогда точка P является одновременно точкой сечения и плоскости SAB. Пусть прямая MP пересекает ребро SB в точке K. Требуется доказать, что $SK : KB = 3 : 1$. Рассмотрим плоскость SAB, в соответствующем треугольнике проведем среднюю линию $MM' \parallel AB$. Заметим теперь, что из свойств правильного шестиугольника отрезок $BP = \dfrac{AB}{2} = MM'$. Таким образом, треугольники $MM'K$ и PBK равны, следовательно, $BK = KM' = \dfrac{1}{4}SA$. Значит, $SK : KB = 3 : 1$.



б) Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью SCF. Так как боковое ребро пирамиды вдвое больше ребра основания треугольник SCF — равносторонний. Пусть RT — его средняя линия параллельна плоскости основания пирамиды, как и MN, значит они пересекаются. Назовем точку их пересечения W. Точка W — точка пересечения RT и плоскости сечения пирамиды. Значит сечение пирамиды и плоскостьSCF пересекаются по прямой CW. Точку пересечения этой прямой с ребром SF назовем G. Таким образом требуется найти $SG : GF$. Точка R — середина SF, значит R', ее проекция на FC, — середина FO, где O — центр основания. Эта же точка является точкой пересечения AE и FC. Так как MN — средняя линия треугольника SAE, то W' — проекция точки W на FC является серединой $R'O$. Таким образом, $RW = R'W' = \dfrac{1}{8}FC.$ Треугольники GRW и GFC — подобны с коэффициентом $k = \dfrac{1}{8}$. Значит





$$\frac{GR}{GF} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{GR}{GR + RF} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 8GR = GR + RF \Leftrightarrow GR = \frac{RF}{7}.$$

Следовательно, учитывая, что R — середина SF,

$$\frac{SG}{GF}=\frac{SR-GR}{GF+RF}=\frac{RF-\dfrac{RF}{7}}{RF+\dfrac{RF}{7}}=\frac{6RF}{8RF}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: 3 : 4

Решение 2:

а) Обозначим середины ребер *SA* и *SE* за *M* и *N* соответственно. Тогда $MN \parallel AE \parallel BD$. Проведем через точку *C* прямую, параллельную *AE* (она будет лежать в плоскости сечения), тогда она пересечет *AB* в точке *P*, причем по свойствам шестиугольника *AB* = 2*BP*. Пусть теперь *K* точка пересечения прямой *MP* с *SB*.

По теореме Менелая для треугольника *ASB* и прямой *MKP* имеем $\frac{AM}{MS}\cdot\frac{SK}{KB}\cdot\frac{BP}{PA}=1$, откуда

$$\frac{SK}{KB}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=1,$$

то есть *SK* : *KB* = 3 : 1.

б) Опустим из *S* перпендикуляр на *AE*. Он упадет в середину *AE* — точку *R'*. По свойствам шестиугольника *CR'* : *R'F* = 3 : 1. При этом отрезок *MN* пересекает *SR'* в его середине *W*.

Пусть *CW* пересекает *SF* в точке *G*, это и есть точка пересечения плоскости сечения с ребром *CF*.

По теореме Менелая для треугольника *FSR'* и прямой *GWC* имеем $\frac{FG}{GS}\cdot\frac{SW}{WR'}\cdot\frac{R'C}{CF}=1,$ откуда

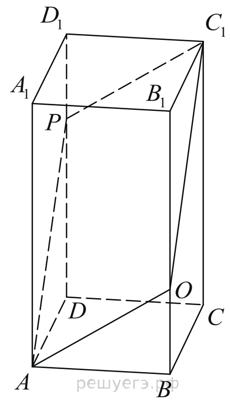
$$\frac{FG}{GS}\cdot 1\cdot\frac{3}{4}=1,$$

то есть *SG* : *GF* = 3 : 4.

Ответ: 3 : 4.

9. 9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, известны рёбра: $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 5$. Точка *O* принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении 2 : 3, считая от вершины *B*. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки *A*, *O* и C_1.

Решение.



Сечение плоскостью AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P. Отрезок AP параллелен C_1O, отрезок C_1P параллелен AO. Следовательно, искомое сечение — параллелограмм AOC_1P (рис. 1). Далее имеем:

$$BO = \frac{2}{5}BB_1 = 2,\ B_1O = 3,$$

$$C_1O = \sqrt{C_1B_1{}^2 + B_1O^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13},$$

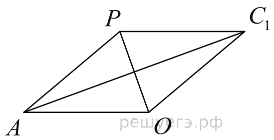
$$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Значит, AOC_1P — ромб. Найдем его диагонали:

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1{}^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38},$$

$$OP = 2\sqrt{AO^2 - \frac{1}{4}AC_1^2} = \sqrt{4\cdot 13 - 38} = \sqrt{14}.$$

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Поэтому

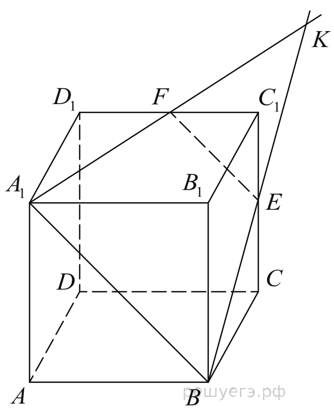


$$S_{AOC_1P} = \frac{AC_1\cdot OP}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{38}\cdot\sqrt{14} = \sqrt{133}.$$

Ответ: $\sqrt{133}$.

10. 10. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью A_1BE, если ребра куба равны 2.

Решение.



Прямая BE пересекает прямую B_1C_1 в точке K. Прямая A_1K пересекает ребро C_1D_1 в его середине — точке F. A_1BEF — сечение куба плоскостью A_1BE.

Равнобедренный треугольник A_1BK подобен треугольнику KFE.

$A_1K = BK = 2BE = 2\sqrt{5}, A_1B = \sqrt{2}\cdot AB = 2\sqrt{2}$ и высота

$$KH = \sqrt{BK^2 - \left(\frac{A_1B}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Поскольку EF — средняя линия треугольника A_1BK, получаем:

$$S_{KEF} = \frac{1}{4}S_{A_1BK},$$

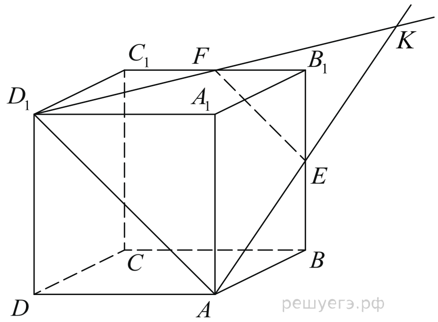
$$S_{A_1BEF} = S_{A_1BK} - S_{KEF} = \frac{3}{4}S_{A_1BK} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot KH\cdot A_1B = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

11. 11. Точка E — середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью D_1AE, если ребра куба равны 4.

Решение.

Прямая AE пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Прямая D_1K пересекает ребро B_1C_1 в его середине — точке F. $AEFD_1$ — сечение куба плоскостью D_1AE.



В равнобедренном треугольнике AKD_1 имеем $D_1K = AK = 2AE = 4\sqrt{5}$, $AD_1 = \sqrt{2} \cdot AD = 4\sqrt{2}$ и высота $h = \sqrt{AK^2 - \left(\frac{AD_1}{2}\right)^2} = 6\sqrt{2}$.

Поскольку EF — средняя линия треугольника AKD_1, получаем:

$$S_{KEF} = \frac{1}{4}S_{AKD_1},$$

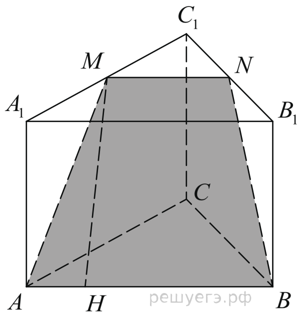
$$S_{AEFD_1} = S_{AKD_1} - S_{KEF} = \frac{3}{4}S_{AKD_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot AD_1 = 18.$$

Ответ: 18.

12. 12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 6, боковые рёбра равны 4. Изобразите сечение, проходящее через вершины A, B и середину ребра A_1C_1. Найдите его площадь.

Решение.

Обозначим через M и N средины ребер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. По Теореме о средней линии треугольника $MN || A_1B_1 || AB$, так что прямые MN и AB лежат в одной плоскости. Искомое сечение — это равнобедренная трапеция $AMNB$.



Основания трапеции $AB = 6, MN = 3$, по теореме Пифагора найдем боковую сторону:

$$AM = \sqrt{AA_1^2 + A_1M^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

Проведем в трапеции высоту MH. Отрезок AH равен полуразности оснований трапеции:

$$AH = \frac{AB - MN}{2} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, высота трапеции $MH = \sqrt{5^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{2}$. Зная её, находим площадь трапеции:

$$S_{AMNB} = \frac{MN + AB}{2} \cdot MH = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{9}{4}\sqrt{91}.$$

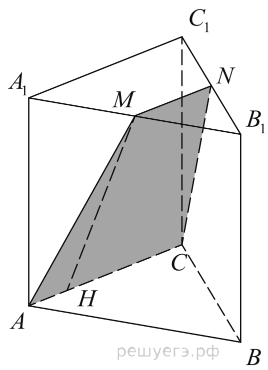
Ответ: $\frac{9}{4}\sqrt{91}$.

13. 13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 8, боковые рёбра равны $\sqrt{13}$. Изобразите сечение, проходящее через вершины A, C и середину ребра A_1B_1. Найдите его площадь.

Решение.

Обозначим через M и N средины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.

По теореме о средней линии треугольника $MN||A_1C_1||AC$, так что прямые MN и AC лежат в одной плоскости. Сечение про которое спрашивается в условии, − это сечение призмы этой плоскостью. Оно представляет собой равнобокую трапецию $AMNC$.



Основания трапеции $AC = 8,\ MN = 4;$ по теореме Пифагора найдем боковую сторону:

$$AM = \sqrt{AA_1^2 + A_1M^2} = \sqrt{13+16} = \sqrt{29}.$$

Проведем в трапеции высоту MH. Отрезок AH равен полуразности оснований трапеции:

$$AH = \frac{AC - MN}{2} = 2.$$

Следовательно, высота трапеции $MH = \sqrt{29 - 2^2} = 5.$ Зная её, находим площадь трапеции:

$$S_{AMNC} = \frac{MN + AC}{2} \cdot MH = \frac{4+8}{2} \cdot 5 = 30.$$

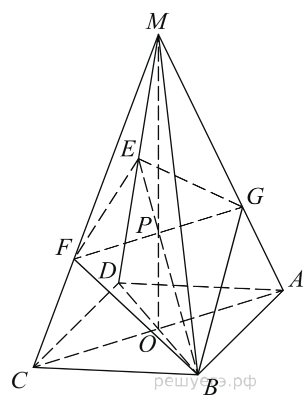
Ответ: 30.

14. 14. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые ребра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP{:}PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF : FA = MG : GC = MP : PO = 2 : 1,$$
$$FG = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3} = 10\sqrt{2}.$$



Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MB^2}}{2} = 17.$$

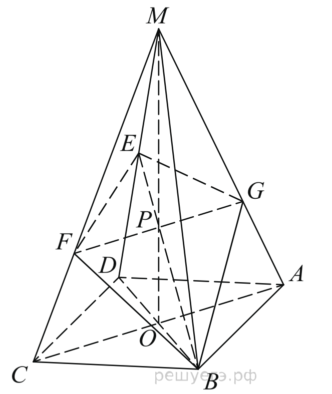
Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG} = \frac{BE \cdot FG}{2} = 85\sqrt{2}.$$

Ответ: $85\sqrt{2}.$

15. 15. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.



Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1,$$
$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=2\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

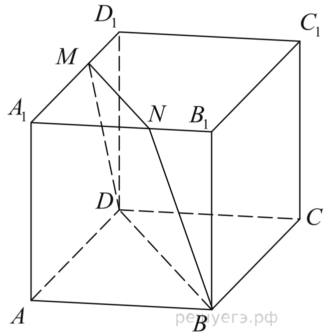
$$S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

16. 16. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 20, а боковое ребро $AA_1=7$. Точка M принадлежит ребру A_1D_1 и делит его в отношении $2:3$, считая от вершины D_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и M.

Решение.

Отрезок MN параллелен диагонали BD (точка N принадлежит ребру A_1B_1), следовательно, искомое сечение — трапеция $BDMN$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD, параллельной B_1D_1, значит, MN параллелен B_1D_1.



Треугольники NA_1M и $B_1A_1D_1$ подобны, следовательно,

$$A_1N : A_1B_1 = A_1M : A_1D_1 = MN : B_1D_1 = 3 : 5.$$

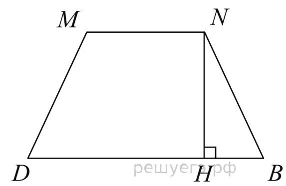
Значит, $BD = B_1D_1 = 20\sqrt{2}, MN = 12\sqrt{2}.$

В равных прямоугольных треугольниках BB_1N и DD_1M,

$$DM = BN = \sqrt{BB_1^2 + B_1N^2} = \sqrt{113},$$

значит, трапеция $BDMN$ равнобедренная.

Пусть NH — высота трапеции $BDMN$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:



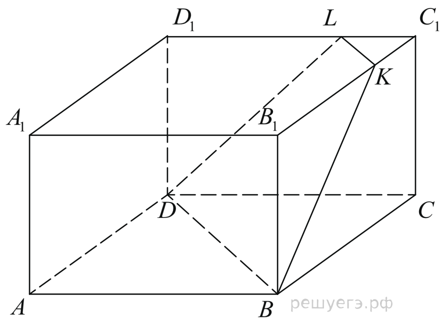
$$BH = \frac{BD - MN}{2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow NH = \sqrt{BN^2 - BH^2} = 9 \Leftrightarrow$$
$$S_{BDMN} = \frac{BD + MN}{2} \cdot NH = 144\sqrt{2}.$$

Ответ: $144\sqrt{2}$.

17. 17. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении 8 : 3, считая от вершины B_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K.

Решение.

Пусть L — точка, в которой плоскость сечения пересекает ребро C_1D_1. Так как плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, то плоскость сечения пересекает их по параллельным прямым, следовательно, отрезок KL параллелен диагонали BD. Искомое сечение — трапеция $BDLK$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD, параллельной B_1D_1, значит, KL параллельно B_1D_1.



Треугольники LC_1K и $D_1C_1B_1$ подобны, следовательно,

$$C_1L : C_1D_1 = C_1K : C_1B_1 = KL : B_1D_1 = 3 : 11.$$

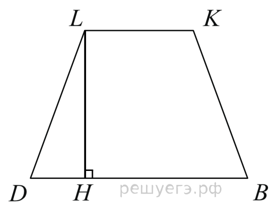
Значит, $BD = B_1D_1 = 11\sqrt{2},\ KL = 3\sqrt{2}.$

В равных прямоугольных треугольниках DD_1L и BB_1K имеем $BK = DL = \sqrt{DD_1^2 + D_1L^2} = \sqrt{113}$, значит, трапеция $BDLK$ равнобедренная.

Пусть LH — высота трапеции $BDLK$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:

$$DH = \frac{BD - KL}{2} = 4\sqrt{2},\ LH = \sqrt{DL^2 - DH^2} = 9.$$

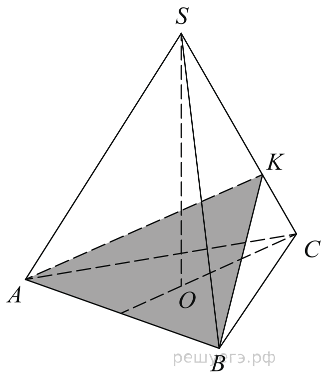
$$S_{BDLK} = \frac{BD + KL}{2} \cdot LH = 63\sqrt{2}.$$



Ответ: $63\sqrt{2}$.

18. 18. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро $SA = 5$, а сторона основания $AB = 4$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AB перпендикулярно ребру SC .

Решение.



В треугольнике BCS проведём высоту BK, тогда искомое сечение — треугольник ABK . Пусть Q — площадь треугольника ABK . Сечение из условия разбивает пирамиду на тетраэдры $CAKB$ и $SAKB$. Их суммарный объём

$$\frac{1}{3}\cdot Q\cdot SK+\frac{1}{3}\cdot Q\cdot CK=\frac{1}{3}\cdot Q\cdot SC=\frac{5Q}{3}$$

равен объёму пирамиды.

Пусть — SO высота пирамиды. В треугольнике SCO имеем:

$$CO=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{25-\frac{16}{3}}=\frac{\sqrt{59}}{\sqrt{3}}$$

Объём пирамиды $SABC$ равен

$$\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABC}=\frac{\sqrt{59}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{16\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sqrt{59}}{3}$$

Приравнивая два найденных значения для объёма, получаем

$$Q=\frac{4\sqrt{59}}{5}.$$

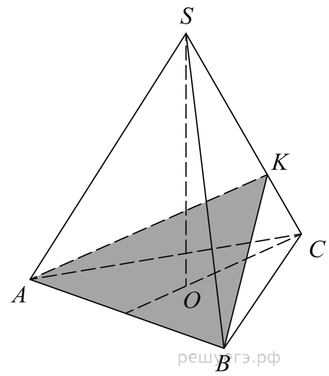
Ответ: $\frac{4\sqrt{59}}{5}$.

Примечание Дмитрия Гущина.

По сути, решение основано на вычислении объема двумя способами: $V_{\text{тетр}}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$ и $V_{\text{тетр}}=\frac{1}{3}S_{\text{перп}}l.$

19. 19. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SA = 6, а сторона основания AB = 4. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AB перпендикулярно ребру SC .

Решение.
В треугольнике BCS проведём высоту BK, тогда искомое сечение — треугольник ABK. Пусть Q — площадь треугольника ABK. Сечение из условия разбивает пирамиду на тетраэдры $CAKB$ и $SAKB$. Их суммарный объём



$$\frac{1}{3}\cdot Q\cdot SK+\frac{1}{3}\cdot Q\cdot CK=\frac{1}{3}\cdot Q\cdot SC=2Q$$

равен объёму пирамиды.

Пусть — SO высота пирамиды. В треугольнике SCO имеем:

$$CO=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{36-\frac{16}{3}}=\frac{2\sqrt{69}}{3}$$

Объём пирамиды $SABC$ равен

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{69}}{3}\cdot\frac{16\sqrt{3}}{4}=\frac{8\sqrt{23}}{3}.$$

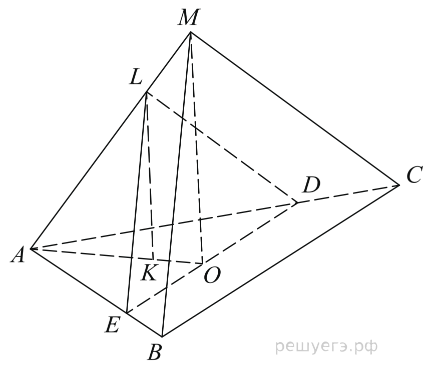
Приравнивая два найденных значения для объёма, получаем

$$Q=\frac{4\sqrt{23}}{3}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{23}}{3}$.

20. 20. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра 10. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AE = LM = 4$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

Решение.
Пусть O — центр основания пирамиды. В треугольнике ABC имеем:



$$\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}=\frac{2}{1}.$$

Значит, $DE=\frac{2}{3}BC=4,$ отрезок DE делит медиану, проведённую из вершины A, в отношении $2:1,$ то есть содержит точку $O.$ Кроме того, O — середина $DE.$

Рассмотрим прямоугольный треугольник $AMO.$ В нём $AO=2\sqrt{3}.$ Опустим из точки L перпендикуляр LK на сторону $AO.$ Тогда

$$AK=\frac{3}{5}AO=\frac{6\sqrt{3}}{5},\ KO=\frac{2}{5}AO=\frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

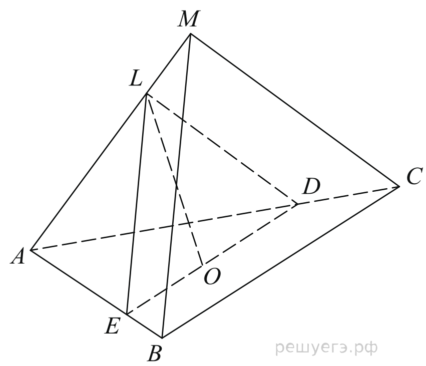
Значит,

$$LK=\sqrt{LA^2-AK^2}=\frac{6\sqrt{22}}{5},\ LO=\sqrt{LK^2+KO^2}=\frac{2\sqrt{210}}{5}.$$

Равнобедренный треугольник DLE — искомое сечение, а LO — его высота. Площадь искомого сечения равна $\frac{1}{2}LO\cdot DE=\frac{4\sqrt{210}}{5}.$

Ответ: $\frac{4\sqrt{210}}{5}.$

Приведём другое решение.
Рассмотрим боковую грань пирамиды — равнобедренный треугольник AMB. Заметим, что $\cos\widehat{BAM}=\frac{\frac{1}{2}AB}{AM}=0,3,$ поэтому по теореме косинусов для треугольника LAE имеем: $LE^2=6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cdot0,3=37,6.$ Тогда для искомой площади равнобедренного треугольника ELD получаем:

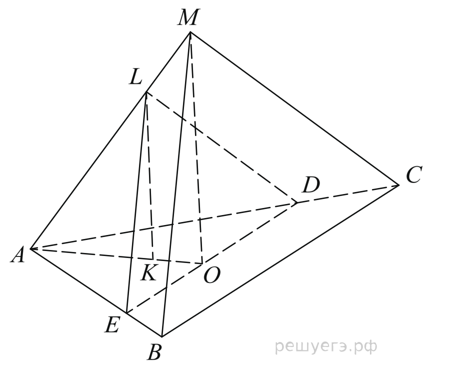


$$S_{ELD}=\frac{1}{2}LO\cdot ED=\frac{1}{2}\sqrt{LE^2-EO^2}\cdot ED=\frac{1}{2}\sqrt{37,6-4}\cdot4=2\sqrt{33,6}.$$

21. 21. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра 8. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $CD=BE=LM=2$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

Решение.

Пусть O — центр основания пирамиды. В треугольнике ABC имеем:



$$\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}=\frac{2}{1}.$$

Значит, $DE=\frac{2}{3}BC=4,$ отрезок DE делит медиану, проведённую из вершины A, в отношении $2:1,$ то есть содержит точку $O.$ Кроме того, O — середина $DE.$

Рассмотрим прямоугольный треугольник $AMO.$ В нём $AO=2\sqrt{3}.$ Опустим из точки L перпендикуляр LK на сторону $AO.$ Тогда

$$AK=\frac{3}{4}AO=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ KO=\frac{1}{4}AO=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$LK=\sqrt{LA^2-AK^2}=\frac{3\sqrt{13}}{2},\ LO=\sqrt{LK^2+KO^2}=\sqrt{30}.$$

Равнобедренный треугольник DLE — искомое сечение, а LO — его высота. Площадь искомого сечения равна $\frac{1}{2}LO\cdot DE=2\sqrt{30}.$

Ответ: $2\sqrt{30}.$

Приведём решение Ольги Абалымовой.

Найдём DE. Треугольник ADE подобен треугольнику ABC, так как $\angle AED=\angle ABC$, а угол A общий. Следовательно,

$$DE=\frac{4\cdot 6}{6}=4.$$

Найдём LE. Для этого применим теорему косинусов к треугольнику AMB:

$$MB^2=AM^2+AB^2-2AM\cdot AB\cdot\cos A,$$

$$\cos A=\frac{8^2+6^2-8^2}{2\cdot 8\cdot 6}=\frac{3}{8}.$$

Применим теорему косинусов к треугольнику ALE:

$$LE^2=AE^2+AL^2-2AE\cdot AL\cos A,$$

$$LE^2=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{3}{8}=\sqrt{34}.$$

Рассмотрим треугольник LEH: LH — его медиана и высота, следовательно, этот треугольник прямоугольный. По теореме Пифагора получаем:

$$LH=\sqrt{LE^2-EH^2}\Leftrightarrow LH=\sqrt{34-4}=\sqrt{30}.$$

Найдём площадь треугольника *LED*:

$$S_{LED} = \frac{4 \cdot \sqrt{30}}{2} = 2\sqrt{30}.$$

Ответ: $2\sqrt{30}.$

22. 22. Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 8. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

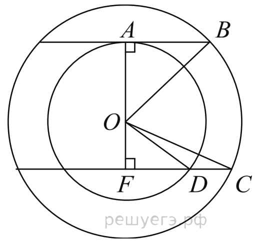
Решение.

Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов. Обозначение центра, точки касания и точек пересечения поверхностей шаров с плоскостями α и β дано на рисунке.

FD — радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α, тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2 = 8$ — площадь сечения меньшего шара плоскостью $\alpha.$

AB — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β, тогда $S_\beta = \pi \cdot AB^2 = 5$ — площадь сечения большего шара плоскостью $\beta.$

CF — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью $\alpha.$



Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой $AF.$ Из прямоугольных треугольников получаем:

$$OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2,$$

откуда

$$CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 + FD^2.$$

Площадь сечения большего шара плоскостью α :

$$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 13.$$

Ответ: 13.

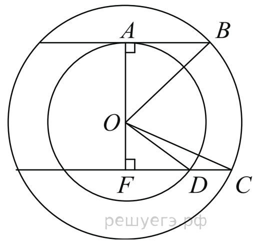
23. 23. Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 6. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 4. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

Решение.

Решение.

Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов.

Обозначение центра, точки касания и точек пересечения поверхностей шаров с плоскостями α и β дано на рисунке. FD — радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α, тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2 = 6$ — площадь сечения меньшего шара плоскостью α.



AB — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β, тогда $S_\beta = \pi \cdot AB^2 = 4$ — площадь сечения большего шара плоскостью β.

CF — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью α. Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF. Из прямоугольных треугольников получаем: $OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2$, откуда

$$CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 + FD^2.$$

Площадь сечения большего шара плоскостью α:

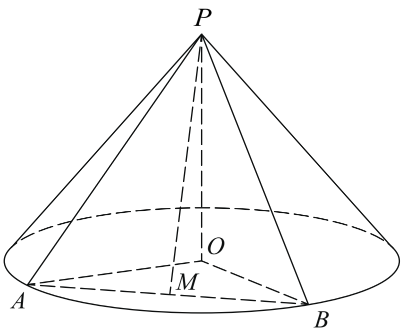
$$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 10.$$

Ответ: 10.

24. 24. Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP.

Решение.

Пусть O — центр основания конуса, M — середина хорды AB. Дуга AB составляет четверть окружности основания, поэтому $\angle AOB = 90°$. Треугольник AOB равнобедренный, следовательно,



$$AB = 2AM = 2AO\sin\frac{\angle AOB}{2} = 6\sqrt{2}.$$

Равнобедренный треугольник APB — искомое сечение. Отрезок PM — его высота, $PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = 3\sqrt{7}.$

Площадь искомого сечения равна

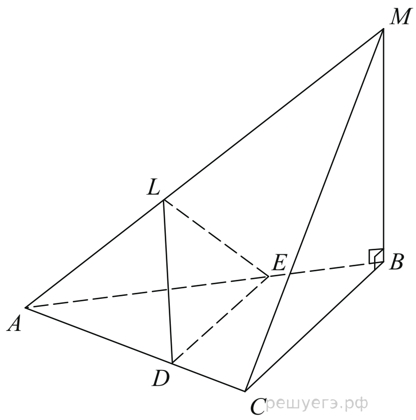
$$\frac{1}{2}PM \cdot AB = 9\sqrt{14}.$$

Ответ: $9\sqrt{14}.$

25. 25. В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро $MA = 6$. На ребре AC находится точка D, на ребре AB точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AL = 2$, и $BE = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

Решение.

Рассмотрим треугольники AMB и CMB, они прямоугольные, имеют общую сторону MB и равные стороны AB и BC, следовательно, эти треугольники равны по двум катетам, значит, $AM = MC = 6.$ Рассмотрим треугольник AMC, воспользовавшись теоремой косинусов найдём косинус угла CAM :



$$\cos\angle CAM = \frac{AM^2 + AC^2 - MC^2}{2 \cdot AC \cdot AM} = \frac{36 + 9 - 36}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{1}{4}.$$

Из треугольника ADL найдём сторону LD :

$$LD = \sqrt{AD^2 + AL^2 - 2AL \cdot AD \cos\angle CAM} = \sqrt{4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2\frac{1}{4}} = \sqrt{6}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник $ABM.$ Найдём косинус угла MAB : $\cos\angle MAB = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

Из треугольника ALE найдём сторону LE :

$$LE = \sqrt{AL^2 + AE^2 - 2 \cdot AL \cdot AE} = \sqrt{4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = 2.$$

В треугольнике ADE $AE = ED$, следовательно, он равнобедренный, углы при основании равны. Угол CAB равен 60°, значит, $\angle AED = \angle ADE = 60^\circ.$ Следовательно, треугольник ADE — равносторонний, $AD = AE = DE = 2.$

Опустим высоту EH в равнобедренном треугольнике LDE на основание $LD.$ Найдём EH :

$$EH = \sqrt{LE^2 - \left(\frac{LD}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Треугольник DLE — искомое сечение, найдём его площадь:

$$S_{DLE} = \frac{1}{2} EH \cdot LD = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}.$

Примечание.

Площадь треугольника DLE можно было найти по формуле Герона:

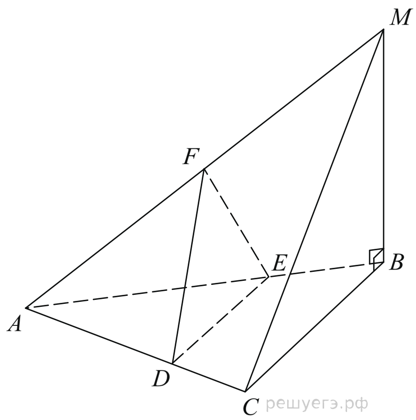
$$S_{DLE}=\sqrt{\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}-2\right)\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}-2\right)\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{6}{4}\left(4-\frac{6}{4}\right)}=\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

26. 26. В треугольной пирамиде $MABC$, в основаниии которой лежит правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 6, а ребро MA равно 11. На ребре AC находится точка D, на ребре AB точка E, а на ребре AM — точка F. Известно, что $AD=4$ и $BE=2$, F — середина AM. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и F.

Решение.

Рассмотрим треугольники AMB и CMB: они прямоугольные, имеют общую сторону MB и равные стороны AB и BC, следовательно, эти треугольники равны по двум катетам, значит, $AM = MC = 11.$ Рассмотрим треугольник AMC, воспользовавшись теоремой косинусов найдём косинус угла CAM:



$$\cos\angle CAM = \frac{AM^2 + AC^2 - MC^2}{2\cdot AC\cdot AM} = \frac{121 + 36 - 121}{2\cdot 6\cdot 11} = \frac{3}{11}.$$

Из треугольника ADF найдём сторону FD:

$$FD = \sqrt{AD^2 + AF^2 - 2AF\cdot AD\cos\angle CAM} = \sqrt{16 + \frac{121}{4} - 2\cdot 4\cdot\frac{11}{2}\frac{3}{11}} = \frac{\sqrt{137}}{2}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник $ABM.$ Найдём косинус угла MAB: $\cos\angle MAB = \frac{6}{11}.$

Из треугольника AFE найдём сторону FE:

$$FE = \sqrt{AF^2 + AE^2 - 2\cdot AF\cdot AE\cos\angle MAB} = \sqrt{\frac{121}{4} + 16 - 2\cdot\frac{11}{2}\cdot 4\cdot\frac{6}{11}} = \frac{\sqrt{89}}{2}.$$

В треугольнике ADE $AE = ED$, следовательно, он равнобедренный, углы при основании равны. Угол CAB равен 60°, значит, $\angle AED = \angle ADE = 60^\circ.$ Следовательно, треугольник ADE — равносторонний, $AD = AE = DE = 4.$

Найдём косинус угла FED:

$$\cos\angle FED = \frac{FE^2 + DE^2 - FD^2}{2FE\cdot DE} = \frac{\frac{89}{4} + 16 - \frac{137}{4}}{2\cdot\frac{\sqrt{89}}{2}\cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{89}}.$$

Следовательно, $\sin\angle FED = \sqrt{1 - \cos^2\angle FED} = \sqrt{1 - \frac{1}{89}} = \frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{89}}$

Треугольник DFE — искомое сечение, найдём его площадь:

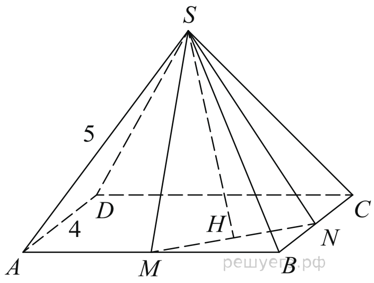
$$S_{DFE} = \frac{1}{2}EF\cdot ED\sin\angle FED = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{89}}{2}\cdot 4\cdot\frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{89}} = 2\sqrt{22}.$$

Ответ: $2\sqrt{22}.$

27. 27. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* с основанием *ABCD* проведено сечение через середины рёбер *AB* и *BC* и вершину *S.* Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 5, а сторона основания равна 4.

Решение.

Пусть M — середина AB, а N — середина BC. Тогда площадь сечения равна площади треугольника SMN. Найдем последовательно SM, SN и MN. SM и SN — медианы треугольников SAB и SBC соответственно. Так как эти треугольники равнобедренные (поскольку пирамида правильная),



$$SM = SN = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}.$$

Найдем теперь MN из прямоугольного треугольника MBN. В нем катеты равны 2. Гипотенуза MN, по теореме Пифагора, будет равна $2\sqrt{2}$.

Теперь найдем площадь равнобедренного треугольника SMN. Для этого проведем высоту SH, которая, по теореме Пифагора, равна $\sqrt{19}$, и вычислим площадь:

$$S = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{38}.$$

Ответ: $\sqrt{38}$.

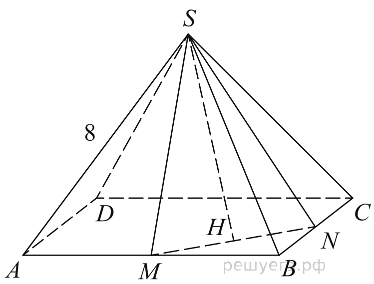
28. 28. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины ребер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если все ребра пирамиды равны 8.

Решение.

Пусть M — середина AB, а N — середина BC. Тогда площадь сечения равна площади треугольника SMN. Найдем последовательно SM, MN и SN.

SM и SN — медианы треугольников SAB и SBC соответственно. Т. к. эти треугольники равносторонние (поскольку все ребра пирамиды одинаковой длины),

$$SM = SN = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 4\sqrt{3}.$$



Найдем теперь MN из прямоугольного треугольника MBN. В нем катеты равны 4. Гипотенуза MN, по теореме Пифагора, будет равна $4\sqrt{2}$.

Теперь найдем площадь равнобедренного треугольника SMN. Для этого проведем высоту SH, по теореме Пифагора равную $2\sqrt{10}$, и вычислим площадь:

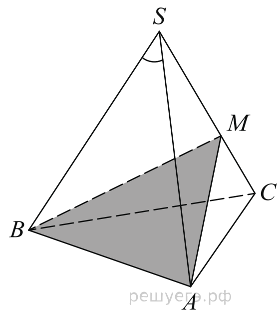
$$S = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{5}.$$

Ответ: $8\sqrt{5}$.

29. 29. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36°. На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A, M и B.

Решение.

Нужное сечение — треугольник AMB.



Рассмотрим треугольник ASC, он равнобедренный: $\angle ASC = \angle ASB = 36^\circ$, поэтому $\angle SAC = \angle SCA = 72^\circ$. Значит, $\angle MAC = 36^\circ$.

Рассмотрим теперь треугольник CAM. Сумма его углов 180°, значит, $\angle AMC = 72^\circ$. Следовательно, треугольник CAM равнобедренный, и поэтому $AM = AC = 8$. Аналогично находим, что $BM = 8$.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний со стороной 8. Его площадь равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}.$$

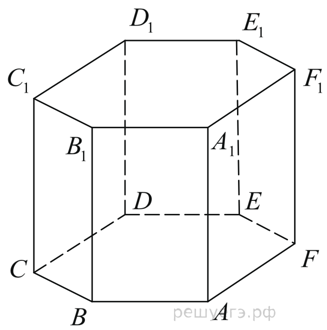
Ответ: $16\sqrt{3}$.

30. 30. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1.

Решение.



а) Поскольку $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, то $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Тогда $\angle CBA = 120°$. По теореме косинусов имеем $CA^2 = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \Leftrightarrow CA = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Заметим, что $A_1A \perp (ABC)$, следовательно, $AA_1 \perp CA$. По теореме Пифагора $CA_1 = 14$.

Поскольку $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, $DA = 2AB = 10$. Тогда $DA_1 = \sqrt{221}$. По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник CA_1D — прямоугольный. Тогда $CD \perp CA_1$. Поскольку $C_1D_1 \| CD$, имеем $C_1D_1 \perp CA_1$.

б) Поскольку $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, $AC \perp CD$, поэтому A_1CA — угол между искомым сечением и плоскостью $ABCDEF$. Так как $A_1A \perp CA$, $\cos A_1CA = \frac{5\sqrt{3}}{14}$.

Площадь шестиугольника равна $S_{ABCDEF} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{75\sqrt{3}}{2}$. Тогда площадь искомого сечения равна 105.

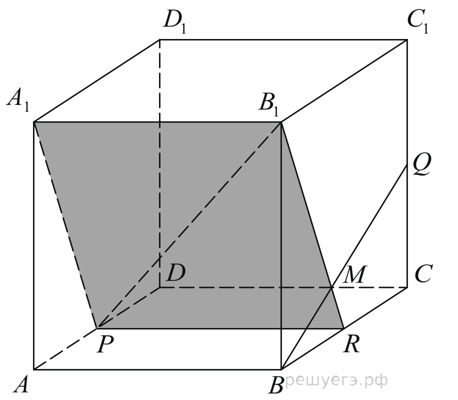
Ответ: б) 105.

31. 31. Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 10.

Решение.



а) Проведём отрезок B_1R, параллельный A_1P. Пусть M — точка пересечения отрезков B_1R и QB. Треугольник BMR прямоугольный с прямым углом при вершине M. Это следует из равенства треугольников RB_1B и QBC. Значит, прямые QB и B_1R перпендикулярны. Прямые QB и PR перпендикулярны, так как прямая PR перпендикулярна плоскости BCC_1. Поэтому прямая QB перпендикулярна плоскости A_1B_1P, и, следовательно, прямая QB перпендикулярна прямой B_1P.

б) Указанное сечение — прямоугольник A_1B_1RP. Его площадь равна $A_1B_1 \cdot A_1P = 50\sqrt{5}$.

Ответ: б) $50\sqrt{5}$.