

Объёмы многогранников

1. 1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $8\sqrt{3}$, а ребро основания равно 1. Точка D — середина ребра BB_1 . Найдите объём пятигранника $ABCA_1D$.

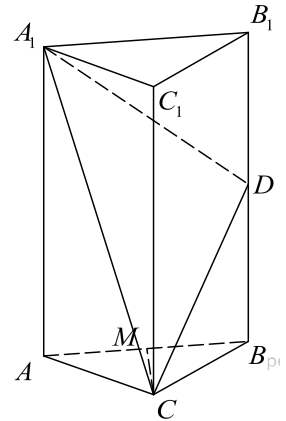
Решение.

Пусть CM — высота треугольника ABC . Тогда $CM \perp ABB_1A_1$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку в правильной призме $AA_1 \perp ABC$ и, значит, $CM \perp AA_1$. Пятигранник $ABCA_1D$ — четырёхугольная пирамида с вершиной в точке C и основанием $ABDA_1$ — прямоугольной трапецией. Высота пирамиды $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Площадь основания равна

$$\frac{AA_1 + BD}{2} \cdot AB = \frac{8\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABDA_1} \cdot CM = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Ответ: 3.



2. 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $\sqrt{3}$, а ребро основания равно 4. Точка D — середина ребра BB_1 . Найдите объём пятигранника $A_1B_1C_1CD$.

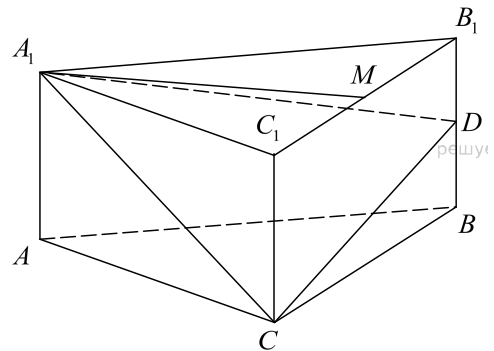
Решение.

Пусть A_1M — высота треугольника $A_1B_1C_1$, тогда $A_1M \perp BCC_1$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку в правильной призме $CC_1 \perp A_1B_1C_1$ и, значит, $A_1M \perp CC_1$. Пятигранник $A_1B_1C_1CD$ — четырёхугольная пирамида с вершиной в точке A_1 и основанием DB_1C_1C — прямоугольной трапецией.

Высота пирамиды $A_1M = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Площадь основания равна $\frac{CC_1 + B_1D}{2} \cdot B_1C_1 = \frac{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot 4 = 3\sqrt{3}$,

$$V = \frac{1}{3} S_{DB_1C_1C} \cdot A_1M = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

Ответ: 6.



3. 3. Правильные треугольники ABC и ABM лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB = 10\sqrt{3}$. Точка P — середина AM , а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 3 : 1$. Вычислите объём пирамиды $MPTC$.

Решение.

Проведём высоту CD треугольника ABC . В тоже время CD — высота пирамиды $MPTC$, опущенная из вершины C на плоскость основания MPT .

$$CD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 15.$$

$$\frac{MP}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{MT}{MB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{MPT}}{S_{MAB}} = \frac{MP \cdot MT}{MA \cdot MB} = \frac{1}{8}.$$

Площадь треугольника MPT составляет $\frac{1}{8}S_{ABM}$.
Следовательно,

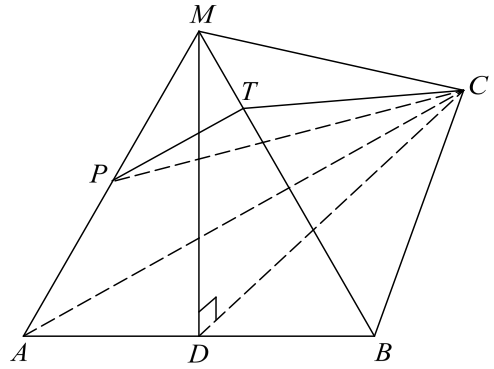
$$S_{MPT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{32} = \frac{300\sqrt{3}}{32} = \frac{75\sqrt{3}}{8}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{MPT} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{75\sqrt{3}}{8} \cdot 15 = \frac{375\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $\frac{375\sqrt{3}}{8}$.

4. 4. Правильные треугольники ABC и MBC лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM , а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$. Вычислите объём пирамиды $MPTA$.



Решение.

Проведём высоту AD треугольника ABC . В тоже время AD — высота пирамиды $MPTA$, опущенная из вершины A на плоскость основания MPT .

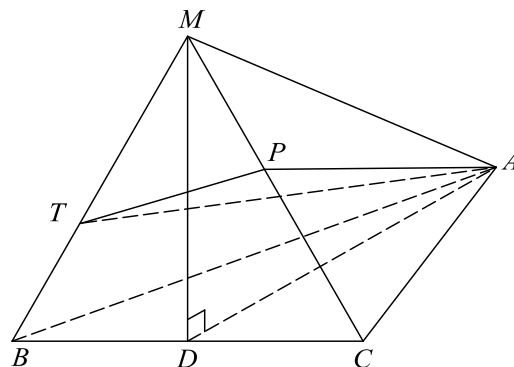
$$AD = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Площадь треугольника MPT составляет $\frac{3}{8}S_{BCM}$.
Следовательно,

$$S_{MPT} = \frac{3BC^2\sqrt{3}}{32} = \frac{3 \cdot 64\sqrt{3}}{32} = 6\sqrt{3}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{MPT} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 24.$$



Ответ: 24.

Приведём другое решение:

$$V_{MPTA} = \frac{1}{3}S_{MPT} \cdot AD, \text{ где } D \text{ — середина } BC.$$

Поскольку AD — медиана треугольника ABC , AD — его высота, значит, $AD \perp BC$, кроме того, $AD \perp MD$ (так как по условию $(ABC) \perp (MBC)$, и $MD \perp BC$). Таким образом, $AD \perp (MBC)$, то есть является высотой пирамиды $MPTA$.

$$S_{MPT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{MBC} = \frac{3}{8} \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$$

$$AD = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$V_{MPTA} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 24.$$

Ответ: 24.

5. 5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ заданы длины ребер $AD = 12$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. Найдите объём пирамиды $MB_1 C_1 D$, если M — точка на ребре AA_1 , причём $AM = 5$.

Решение.

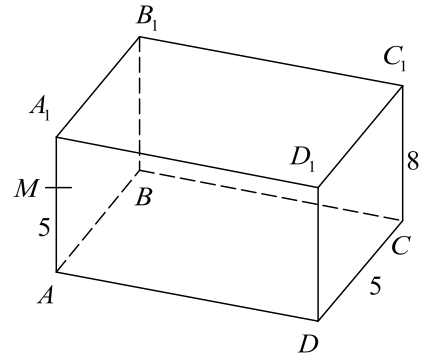
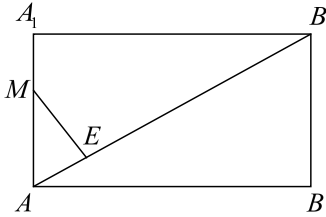
Заметим, что $V_{MB_1C_1D} = \frac{1}{3} S_{B_1C_1D} \cdot h_M$. Площадь прямоугольного треугольника, лежащего в основании, равна половине произведения катетов: $S_{B_1C_1D} = 6\sqrt{89}$.

Основание пирамиды лежит в плоскости AB_1C_1D , поэтому высотой пирамиды будет являться перпендикуляр, опущенный из точки M на эту плоскость. Опустим перпендикуляр ME на прямую AB_1 . Поскольку $ME \perp AB_1$ и $ME \perp AD$ (в силу того, что $(AD) \perp (AA_1B_1B)$), отрезок ME является высотой пирамиды: $ME = h_M$.

Треугольник AME подобен треугольнику ABB_1 , значит,

$$ME = \frac{AM \cdot AB}{AB_1} = \frac{25}{\sqrt{89}},$$

$$V_{MB_1C_1D} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{89} \cdot \frac{25}{\sqrt{89}} = 50.$$



Ответ: 50.

6. 6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 4.

Точка L — середина ребра SC . Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

- Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.
- Найдите площадь поверхности пирамиды.

Решение.

а) Очевидно, проекция L на плоскость $ABCD$ лежит на AC , поэтому проекция OL на плоскость основания пирамиды совпадает со второй диагональю (AC) и перпендикулярна OB , тогда по теореме о трех перпендикулярах и $OL \perp OB$.

б) Введем координаты с началом в точке A и осями, направленными по ребрам AD , AB и параллельно высоте SO (обозначим ее длину за $2a$). Тогда координаты точек будут $A(0;0;0)$, $C(4;4;0)$, $B(0;4;0)$, $S(2;2;2a)$, $L(3;3;a)$; $\overline{BL} = \{3; -1; a\}$ и $\overline{SA} = \{2; 2; 2a\}$. Найдем угол между ними по формуле

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + a \cdot 2a}{\sqrt{9 + 1 + a^2} \sqrt{4 + 4 + 4a^2}}.$$

По условию, этот же косинус равен $\frac{\sqrt{17}}{5}$ с точностью до знака.

Решаем уравнение

$$\frac{2 + a^2}{\sqrt{10 + a^2} \sqrt{2 + a^2}} = \frac{\sqrt{17}}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2 + a^2}}{\sqrt{10 + a^2}} = \frac{\sqrt{17}}{5} \Leftrightarrow \frac{2 + a^2}{10 + a^2} = \frac{17}{25} \Leftrightarrow a^2 = 15.$$

Итак, высота пирамиды равна $2\sqrt{15}$, поэтому апофема равна $\sqrt{60 + 4} = 8$ и площадь поверхности равна $4^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 80$.

Ответ: 80.