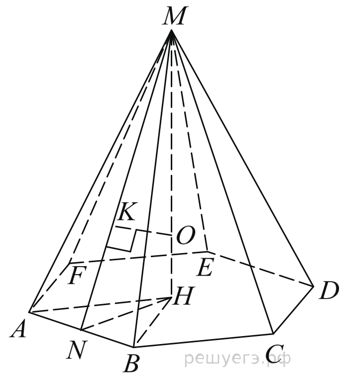
Круглые тела: цилиндр, конус, шар

1. 1. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Решение.

Пусть MH — высота правильной шестиугольной пирамиды $MABCDEF$ с вершиной M, тогда треугольник AMH прямоугольный, $MA = 10, MH = 6,$ откуда

$$AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 8.$$



Треугольник ABH равносторонний, следовательно, $AB = AH = 8.$ В треугольнике AMB высота

$$MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2\sqrt{21}.$$

В правильном треугольнике AHB высота $NH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$

Центр O сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO : OK = MN : HN \Leftrightarrow (6 - r) \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{21} \cdot r \Leftrightarrow r = 4\sqrt{7} - 8,$$

где r — радиус сферы. Площадь сферы $S = 4\pi r^2 = 64(11 - 4\sqrt{7})\pi.$

Ответ: $64\left(11 - 4\sqrt{7}\right)\pi.$

Укажем другой путь нахождения радиуса.

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \frac{1}{3}\frac{64\sqrt{3} \cdot 6}{4} \cdot 6 = 192\sqrt{3}.$$

Площадь полной поверхности пирамиды равна

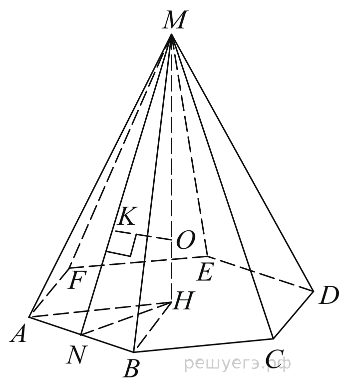
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 96\sqrt{3} + 48\sqrt{21}.$$

Тогда

$$r_{\text{сф}} = \frac{3V}{S_{\text{полн}}} = \frac{3 \cdot 192\sqrt{3}}{96\sqrt{3} + 48\sqrt{21}} = \frac{12\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + \sqrt{21}} = 4\sqrt{7} - 8.$$

2. 2. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно $\sqrt{5}$, а высота равна 1, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Решение.



Пусть МН— высота правильной шестиугольной пирамиды $MABCDEF$ с вершиной М, тогда треугольник AMH прямоугольный, $MA=\sqrt{5}, MH=1$, откуда

$$AH=\sqrt{MA^2-MH^2}=2.$$

Треугольник ABH равносторонний, следовательно, $AB=AH=2$. В треугольнике AMB высота

$$MN=\sqrt{MA^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=2.$$

В правильном треугольнике AHB высота $HN=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Центр O сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO:OK=MN:HN \Leftrightarrow (1-r)\cdot\sqrt{3}=2\cdot r \Leftrightarrow r=2\sqrt{3}-3,$$

где r — радиус сферы.

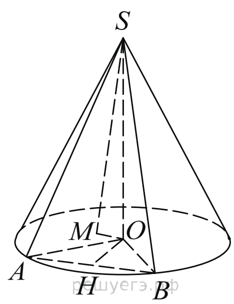
Площадь сферы $S=4\pi r^2=12(7-4\sqrt{3})\pi$.

Ответ: $12(7-4\sqrt{3})\pi$.

3. 3. Радиус основания конуса равен 6, а его высота равна 8. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 4. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Решение.

Сечение конуса плоскостью, содержащей его вершину *S* и хорду *AB* = 4, — треугольник *ASB*.



В равных прямоугольных треугольниках *SOA* и *SOB*, где *O* — центр основания конуса, *OA* = *OB* = 6, *SO* = 8, откуда

$$SA=SB=\sqrt{OB^2+SO^2}=10.$$

Пусть *SH* — высота и медиана равнобедренного треугольника *ASB*, $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=4\sqrt{6}$. Тогда отрезок *OH* — высота и медиана равнобедренного треугольника *AOB*,

$$OH=\sqrt{AO^2-AH^2}=4\sqrt{2}.$$

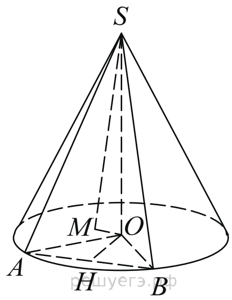
Прямые *SH* и *OH* перпендикулярны прямой *AB*, поэтому плоскость *SOH* перпендикулярна плоскости *ASB*. Следовательно, расстояние от точки *O* до плоскости *ASB* равно высоте *OM* прямоугольного треугольника *SOH*, проведённой к гипотенузе:

$$OM=\frac{OH\cdot SO}{SH}=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

4. 4. Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Решение.



Сечение конуса плоскостью, содержащей его вершину S и хорду $AB = 6$, — треугольник ASB.

В равных прямоугольных треугольниках SOA и SOB, где O — центр основания конуса, $OA = OB = 5$, $SO = 12$, откуда

$$SA = SB = \sqrt{OB^2 + SO^2} = 13.$$

Пусть SH — высота и медиана равнобедренного треугольника ASB, $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 4\sqrt{10}$. Тогда отрезок OH — высота и медиана равнобедренного треугольника АОВ,

$$OH = \sqrt{OA^2 - \mathrm{AH}^2} = 4.$$

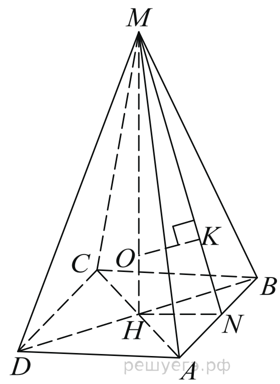
Прямые SH и OH перпендикулярны прямой AB, поэтому плоскость SOH перпендикулярна плоскости ASB. Следовательно, расстояние от точки O до плоскости ASB равно высоте OM прямоугольного треугольника SOH, проведенной к гипотенузе:

$$OM = \frac{OH \cdot SO}{SH} = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

5. 5. В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Решение.



Пусть MH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной M. тогда треугольник AMH прямоугольный. $MA = 10$, $MH = 6$, откуда

$$AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 8.$$

Треугольник ABH прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AB = AH\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. В треугольнике AMB высота

$$MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2\sqrt{17}.$$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABH высота

$$NH = \frac{AB}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Центр O сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO : OK = MN : HN \Leftrightarrow (6 - r) \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{17} \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{4\sqrt{34} - 16}{3},$$

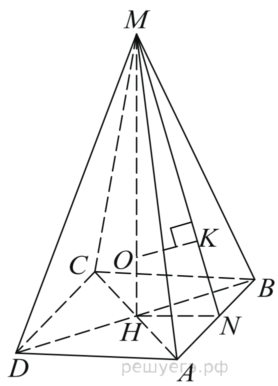
где r — радиус сферы.

Площадь сферы $S = 4\pi r^2 = \frac{128\left(25 - 4\sqrt{34}\right)\pi}{9}$.

Ответ: $\frac{128\left(25 - 4\sqrt{34}\right)\pi}{9}$.

6. 6. В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 17, а высота равна 7, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Решение.
Пусть MH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной M, тогда треугольник AMH — прямоугольный, $MA=17, MH=7$, откуда



$$AH=\sqrt{MA^2-MH^2}=4\sqrt{15}.$$

Треугольник ABH — прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AB=AH\sqrt{2}=4\sqrt{30}.$ В треугольнике AMB высота $MN=\sqrt{MA^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=13.$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABH высота $HN=\frac{AB}{2}=2\sqrt{30}.$

Центр O сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO:OK=MN:HN\Leftrightarrow\frac{7-r}{r}=\frac{13}{2\sqrt{30}}\Leftrightarrow(7-r)\cdot2\sqrt{30}=13\cdot r\Leftrightarrow r=\frac{26\sqrt{30}-120}{7},$$

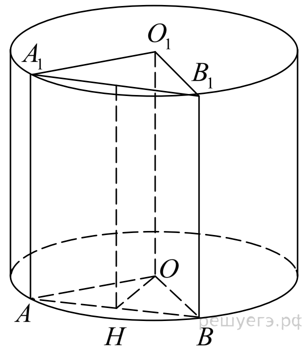
где r — радиус сферы.

Площадь сферы $S=4\pi r^2=\frac{480(289-52\sqrt{30})\pi}{49}.$

Ответ: $\frac{480(289-52\sqrt{30})\pi}{49}.$

7. 7. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.

Решение.
Сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно его оси OO_1, — прямоугольник ABB_1A_1 (O и AB — соответственно центр и хорда нижнего основания цилиндра), $AA_1=5$. Расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения равно высоте OH треугольника OAB. $OA=OB=10$, $OH=6$, откуда



$$AB=2AH=2\sqrt{OA^2-OH^2}=16.$$

Площадь прямоугольника ABB_1A_1

$$S=AA_1\cdot AB=80.$$

Ответ: 80.

8. 8. Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 5. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP.

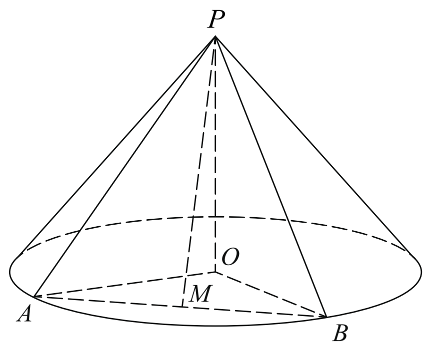
Решение.

Пусть O — центр основания конуса, M — середина хорды AB. Дуга AB составляет шестую часть окружности основания, поэтому $\angle AOB = 60^\circ$. Треугольник AOB — равносторонний, следовательно, $AB = AO = 6$.

Равнобедренный треугольник APB — искомое сечение. Отрезок PM — его высота

$$PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = 6\sqrt{2}.$$

Площадь искомого сечения $S = \dfrac{1}{2} PM \cdot AB = 18\sqrt{2}.$



Ответ: $18\sqrt{2}$.

9. 9. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84. Найдите радиус шара.

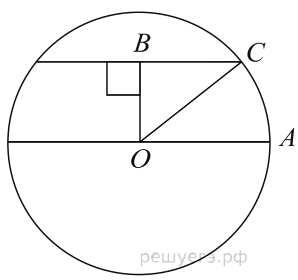
Решение.

Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение плоскостью, проходящей через центры сечений. Обозначения даны на рисунке. OA — радиус шара, тогда $S_1 = \pi \cdot OA^2$ — площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр. BC — радиус меньшего круга, полученного в сечении, тогда $S_2 = \pi \cdot BC^2$ — площадь сечения шара второй плоскостью.

Из отношения площадей сечений получаем: $\dfrac{BC}{OA} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$. OB — расстояние между плоскостями, равное 2.

В прямоугольном треугольнике OBC: $OC^2 = BC^2 + OB^2$, откуда получаем:

$$OA^2 = \left(\frac{\sqrt{21}}{5} OA\right)^2 + 4,\ OA = 5.$$



Ответ: 5.

10. 10. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Решение.

Сразу отметим, что в окружности радиуса R расстояние от центра до хорды (то есть до середины хорды) длиной $2a$ равно $\sqrt{R^2 - a^2}$. Поэтому расстояния от центров оснований до хорд равны 5 и 12.

а) Пусть A и B_1 — середины хорд, B — проекция B_1 на другое основание цилиндра. Тогда $AB = 12 \pm 5$, $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{21^2 + (12 \pm 5)^2} = \sqrt{730}$, поэтому следует выбирать знак $+$, что как раз и означает, что хорды лежат по разные стороны от центров оснований, поэтому центры лежат по разные стороны от плоскости.

б) Указанные две плоскости пересекаются по хорде, содержащей точку A, при этом AB перпендикулярна этой хорде, следовательно и AB_1 тоже. Поэтому

$$\alpha = \angle BAB_1 = \operatorname{arctg} \frac{BB_1}{AB} = \operatorname{arctg} \frac{21}{17}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{21}{17}$.