Рациональные неравенства

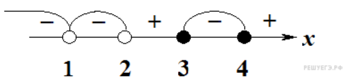
1. 1. Решите неравенство: $\dfrac{x^2-6x+8}{x-1}-\dfrac{x-4}{x^2-3x+2}\le 0.$

Решение.

Перепишем неравенство в виде:

$$\frac{x^2-6x+8}{x-1}-\frac{x-4}{x^2-3x+2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-2)}{x-1}-\frac{x-4}{(x-2)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2(x-4)-(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{((x-2)^2-1)(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x-4)}{x-2}\le 0, \\ x\ne 1. \end{cases}$$



Множество решений исходного неравенства: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup[3;\ 4].$

Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup[3;\ 4].$

2. 2. Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+1}{(x+2)^2}+\frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2}\le \frac{(2x^2-x+5)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}.$$

Решение.

Сделаем замену: $a=\dfrac{x-1}{x+2},\ b=\dfrac{x+1}{x-3}.$ Тогда

$$a+b=\frac{(x-1)(x-3)+(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{2x^2-x+5}{(x+2)(x-3)}.$$

Неравенство принимает вид: $a^2+b^2\le\dfrac{(a+b)^2}{2}$, откуда

$$a^2+b^2-2ab\le 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\le 0.$$

Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $a=b$. Получаем:

$$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+1}{x-3}\Leftrightarrow x^2-4x+3=x^2+3x+2\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{7}.$

Примечание.

Задача допускает решение без замены переменной: тождественными преобразованиями данное неравенство приводится к $\dfrac{(7x-1)^2}{(x+2)^2(x-3)^2}\le 0$, откуда также получается ответ $x=\dfrac{1}{7}.$

3. 3. Решите неравенство

$$\frac{x^2-4x+4}{(x+1)^2}+\frac{x^2+6x+9}{(x-1)^2}\le\frac{(2x^2+x+5)^2}{2(x^2-1)^2}.$$

Решение.

Сделаем замену: $a=\dfrac{x-2}{x+1},\ b=\dfrac{x+3}{x-1}$. Тогда

$$a+b=\frac{(x-1)(x-2)+(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x^2+x+5}{x^2-1}.$$

Неравенство принимает вид: $a^2+b^2\le\dfrac{(a+b)^2}{2}$, откуда

$$a^2+b^2-2ab\le 0\Leftrightarrow (a-b)^2\le 0.$$

Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $a=b$. Получаем:

$$\frac{x-2}{x+1}=\frac{x+3}{x-1}\Leftrightarrow x^2-3x+2=x^2+4x+3\Leftrightarrow x=-\frac{1}{7}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{7}$.

Примечание.

Задача допускает решение без замены переменной: тождественными преобразованиями данное неравенство приводится к неравенству $\dfrac{(7x+1)^2}{(x^2-1)^2}\le 0$, откуда также получается ответ $x=-\dfrac{1}{7}$.

4. 4. Решите неравенство: $(x^2-3,6x+3,24)(x-1,5)\le 0$.

Решение.

Используя метод интервалов, получаем:

$$(x-1,8)^2(x-1,5)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,8,\\ x\le 1,5.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 1,5]\cup\{1,8\}$.

5. 5. Решите неравенство: $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2-x}\le 5$.

Решение.

Используя метод интервалов, получаем:

$$\frac{5x^2-15x+11}{(x-1)(2-x)}\le 0\Leftrightarrow\frac{5\left(x-\frac{15-\sqrt5}{10}\right)\left(x-\frac{15+\sqrt5}{10}\right)}{(x-1)(2-x)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x<1,\\ \dfrac{15-\sqrt5}{10}\le x\le\dfrac{15+\sqrt5}{10},\\ x>2.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup\left[\dfrac{15-\sqrt5}{10};\ \dfrac{15+\sqrt5}{10}\right]\cup(2;+\infty)$.

6. 6. Решите неравенство: $1-\dfrac{2}{|x|}\le\dfrac{23}{x^2}$.

Решение.

Приведём выражение к общему знаменателю:

$$1-\frac{2}{|x|}\le\frac{23}{x^2}\Leftrightarrow\frac{x^2-2|x|-23}{x^2}\le 0\Leftrightarrow\frac{(|x|-1-2\sqrt6)(|x|+2\sqrt6-1)}{x^2}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(|x|-1-2\sqrt6)}{x^2}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x-1-2\sqrt6)(x+1+2\sqrt6)}{x^2}\le 0.$$

Предпоследнее преобразование верно, так как модуль не может принимать отрицательных значений.

Получаем $-1-2\sqrt6\le x<0$ или $0<x\le 1+2\sqrt6$.

Ответ: $[-1-2\sqrt6;\ 0)\cup(0;\ 1+2\sqrt6]$.

7. 7. Решите неравенство: $\dfrac{2-(x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1}-1} \le -0,2.$

Решение.

Пусть $y = \dfrac{1}{x-6}$. Получим

$$\frac{2-y}{5y-1} \le -0,2 \Leftrightarrow \frac{1,8}{5y-1} \le 0 \Leftrightarrow y < \frac{1}{5}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x-6} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{x-11}{x-6} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<6, \\ x>11. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 6)\cup(11;\ +\infty)$.

8. 8. Решите неравенство: $\dfrac{6}{x\sqrt{3}-3} + \dfrac{x\sqrt{3}-6}{x\sqrt{3}-9} \ge 2.$

Решение.

Пусть $z = x\sqrt{3}$, получаем:

$$\frac{6}{z-3} + \frac{z-6}{z-9} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{6(z-9)+(z-6)(z-3)-2(z-3)(z-9)}{(z-3)(z-9)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2-21z+90}{(z-3)(z-9)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(z-6)(z-15)}{(z-3)(z-9)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<z\le 6, \\ 9<z\le 15. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\sqrt{3} < x \le 2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{3} < x \le 5\sqrt{3}$.

Ответ: $(\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}]\cup(3\sqrt{3};\ 5\sqrt{3}]$.

9. 9. Решите неравенство: $\left(\dfrac{10}{5x-21} + \dfrac{5x-21}{10}\right)^2 \le \dfrac{25}{4}.$

Решение.

Сделав замену $t = \dfrac{5x-21}{10}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2 \le \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le |t| \le 2.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$5 \le |5x-21| \le 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} 5 \le 5x-21 \le 20, \\ -20 \le 5x-21 \le -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{26}{5} \le x \le \dfrac{41}{5}, \\ \dfrac{1}{5} \le x \le \dfrac{16}{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{5};\ \dfrac{16}{5}\right]\cup\left[\dfrac{26}{5};\ \dfrac{41}{5}\right]$.

10. 10. Решите неравенство: $(x^2-5,6x+7,84)(x-2,5) \le 0.$

Решение.

Заметим, что в первой скобке можно выделить полный квадрат:

$$(x-2,8)^2(x-2,5) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,8, \\ x\le 2,5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 2,5]\cup\{2,8\}$.

11. 11. Решите неравенство: $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{3-x} \le 5.$

Решение.

Перейдём к общему знаменателю:

$$\frac{5x^2-25x+31}{(x-2)(3-x)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{5\left(x-\frac{25-\sqrt{5}}{10}\right)\left(x-\frac{25+\sqrt{5}}{10}\right)}{(x-2)(3-x)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2, \\ \dfrac{25-\sqrt{5}}{10} \le x \le \dfrac{25+\sqrt{5}}{10} \\ x>3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 2) \cup \left[\dfrac{25-\sqrt{5}}{10};\ \dfrac{25+\sqrt{5}}{10}\right] \cup (3;\ +\infty)$.

12. 12. Решите неравенство: $\dfrac{2x^2-2x+1}{2x-1} \le 1$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{2x^2-2x+1-2x+1}{2x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{2x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x-1} \le 0.$$

Решения неравенства: $x=1$ или $x<\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty;\ \dfrac{1}{2}\right) \cup \{1\}$.

13. 13. Решите неравенство: $\dfrac{2x^2-6x+5}{2x-3} \le 1$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{2x^2-6x+5-2x+3}{2x-3} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{2x-3} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{2x-3} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x<\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty;\ \dfrac{3}{2}\right) \cup \{2\}$.

14. 14. Решите неравенство: $\dfrac{2x^2-6x}{x-4} \le x$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{2x^2-6x}{x-4} \le \frac{x^2-4x}{x-4} \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{x-4} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ 2 \le x < 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [2;\ 4)$.

15. 15. Решите неравенство: $\dfrac{2x^2-4x}{x-4} \le 0$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{2x^2-4x}{x-4} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{x-4} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ 2 \le x < 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [2;\ 4)$.

16. 16. Решите неравенство: $\dfrac{2x^2-5x}{x-3} \le x$.

Решение.

Имеем:

$$\frac{2x^2-5x}{x-3} \le x \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{x-3} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{x-3} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ 2 \le x < 3 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [2;\ 3)$.

17. 17. Решите неравенство: $\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2} \le \frac{(3x+1)^2}{4}$.

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2} \le \frac{(3x+1)^2}{4} \Leftrightarrow 2(x-1)^2+8(x+1)^2 \le (3x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+2+8x^2+16x+8 \le 9x^2+6x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+9 \le 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=-3.$$

Ответ: $\{-3\}$.

18. 18. Решите неравенство: $\frac{(x+1)^2+4(x-1)^2}{2} \le \frac{(3x-1)^2}{4}$.

Решение.

Имеем:

$$2(x+1)^2+8(x-1)^2-(3x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow 2x^2+4x+2+8x^2-16x+8-9x^2+6x-1 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9 \le 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: $\{3\}$.

19. 19. Решите неравенство: $\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x} + \frac{7x-19}{x-3} \le \frac{8x+1}{x}$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x} + \frac{7x-19}{x-3} \le \frac{8x+1}{x} \Leftrightarrow 1-\frac{2}{x^2-2x}+7+\frac{2}{x-3}-8-\frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x^2-2x}+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x(x-2)}+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x-3)(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ 0<x \le 1, \\ 2<x<3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1] \cup (2;\ 3)$.

20. 20. Решите неравенство: $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x} + \frac{3x+1}{x-1} \le \frac{4x+1}{x}$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x} + \frac{3x+1}{x-1} \le \frac{4x+1}{x} \Leftrightarrow 1+\frac{2}{x^2+2x}+3+\frac{4}{x-1}-4-\frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+2x}+\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{x(x+2)}+\frac{4}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{3x(x+3)}{x(x-1)(x+2)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -3, \\ -2<x<0, \\ 0<x<1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3] \cup (-2;\ 0) \cup (0;\ 1)$.

21. 21. Решите неравенство: $\dfrac{x^4-5x^3+3x-25}{x^2-5x}\ge x^2-\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{5}{x}.$

Решение.

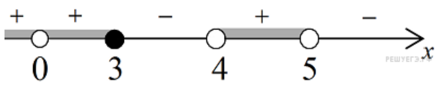
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^4-5x^3+3x-25}{x^2-5x}\ge x^2-\frac{1}{x-4}+\frac{5}{x}\Leftrightarrow x^2+\frac{3x-25}{x(x-5)}-\frac{5}{x}\ge x^2-\frac{1}{x-4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x-25-5(x-5)}{x(x-5)}+\frac{1}{x-4}\ge 0\Leftrightarrow\frac{-2x}{x(x-5)}+\frac{1}{x-4}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{x-5}\ge 0,\\ x\ne 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-5-2(x-4)}{(x-4)(x-5)}\ge 0,\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3-x}{(x-4)(x-5)}\ge 0,\\ x\ne 0.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0,\\ 0<x\le 3,\\ 4<x<5.\end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 3]\cup(4;\ 5)$.

22. 22. Решите неравенство: $\dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-3x}\le x+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-3x}\le x+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(x^2-3x)}{x^2-3x}+\frac{x-3}{x(x-3)}+\frac{2x}{x(x-3)}\le x+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}\le 0,\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0,\\ 0<x\le 1,\\ 2<x<3.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1]\cup(2;\ 3)$.

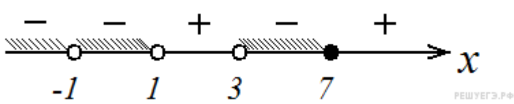
23. 23. Решите неравенство: $\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1}\le\dfrac{x-9}{x-1}+\dfrac{2}{x-3}.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2-5x-6}{x^2-1}\le\frac{x-9}{x-1}+\frac{2}{x-3}\Leftrightarrow\frac{(x-6)(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x-9}{x-1}\le\frac{2}{x-3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{x-3}\le 0,\\ x\ne -1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-7}{(x-1)(x-3)}\le 0,\\ x\ne -1.\end{cases}$$



Ответ: $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(3;\ 7]$.

24. 24. Решите неравенство: $\dfrac{x^2-16x+39}{x^2-12x+27}\le\dfrac{x-18}{x-9}+\dfrac{4}{x-8}.$

Решение.

Имеем:

$$\frac{x^2-16x+39}{x^2-12x+27}\le\frac{x-18}{x-9}+\frac{4}{x-8}\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x-13)}{(x-9)(x-3)}-\frac{x-18}{x-9}\le\frac{4}{x-8}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{x-9}-\dfrac{4}{x-8}\le 0,\\ x\ne 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-4}{(x-8)(x-9)}\le 0,\\ x\ne 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<3,\\ 3<x\le 4,\\ 8<x<9.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 3)\cup(3;\ 4]\cup(8;\ 9)$.

25. 25. Решите неравенство: $x^2-3x+1-\dfrac{x^3+x^2+3x-21}{x}\geq 3.$

Решение.

Решим второе неравенство:

$$\frac{x(x^2-3x+1)}{x}-\frac{x^3+x^2+3x-21}{x}\geq\frac{3x}{x}\Leftrightarrow\frac{-4x^2-5x+21}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x+3)(4x-7)}{x}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+3)(4x-7)}{x}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq -3,\\ 0<x\leq\dfrac{7}{4}.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3]\cup\left(0;\ \dfrac{7}{4}\right]$.

26. 26. Решите неравенство: $x^3+6x^2+\dfrac{28x^2+2x-10}{x-5}\leq 2.$

Решение.

Решим неравенство, используя метод интервалов:

$$x^3+6x^2+\frac{28x^2+2x-10}{x-5}\leq 2\Leftrightarrow x^3+6x^2+\frac{28x^2}{x-5}\leq 0\Leftrightarrow\frac{x^4+x^3-2x^2}{x-5}\leq 0\Leftrightarrow\frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-5}\leq 0.$$

Множество решений неравенства: $(-\infty,\,-2]\cup\{0\}\cup[1,\,5)$.

Ответ: $(-\infty,\,-2]\cup\{0\}\cup[1,\,5)$.

27. 27. Решите неравенство: $x^2-x+3-\dfrac{x^3+4x^2-3x-1}{x}\leq 2.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x(x^2-x+3)}{x}-\frac{x^3+4x^2-3x-1}{x}\leq\frac{2x}{x}\Leftrightarrow\frac{-5x^2+4x+1}{x}\leq 0\Leftrightarrow\frac{(5x+1)(x-1)}{x}\geq 0.$$

Получаем $-\dfrac{1}{5}\leq x<0$ или $x\geq 1$.

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{5};\ 0\right)\cup[1;\ +\infty)$.

28. 28. Решите неравенство: $\dfrac{2}{0,5x\sqrt{5}-1}+\dfrac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3}\geq 2.$

Решение.

Пусть $z=0,5x\sqrt{5}$, получаем:

$$\frac{2}{z-1}+\frac{z-2}{z-3}\geq 2\Leftrightarrow\frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<z\leq 2,\\ 3<z\leq 5.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\dfrac{2}{\sqrt{5}}<x\leq\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ или $\dfrac{6}{\sqrt{5}}<x\leq 2\sqrt{5}$.

Ответ: $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right]\cup\left(\dfrac{6}{\sqrt{5}};\ 2\sqrt{5}\right]$.

29. 29. Решите неравенство: $\left(\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{x-4}{2}\right)^2\leq\dfrac{25}{4}.$

Решение.

Пусть $t=\dfrac{x-4}{2}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2\le\frac{25}{4}\Leftrightarrow-\frac{5}{2}\le\frac{1}{t}+t\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow-5\le\frac{2t^2+2}{t}\le5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2t^2-5t+2}{t}\le0,\\ \dfrac{2t^2+5t+2}{t}\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t<0,\\ \frac{1}{2}\le t\le2,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}-2\le t\le-\frac{1}{2},\\ t>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le|t|\le2.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $0\le x\le3$ или $5\le x\le8$.

Ответ: $[0;\ 3]\cup[5;\ 8]$.

30. 30. Решите неравенство: $\left(\dfrac{2}{25x^2-10x-8}+\dfrac{25x^2-10x-8}{2}\right)^2\ge4$.

Решение.

Сделав замену $t=\dfrac{25x^2-10x-8}{2}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2\ge4\Leftrightarrow\left(\frac{1}{t}-t\right)^2\ge0\Leftrightarrow t\ne0.$$

Значит, $x\ne-\dfrac{2}{5}$ и $x\ne\dfrac{4}{5}$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5};\ \dfrac{4}{5}\right)\cup\left(\dfrac{4}{5};\ +\infty\right)$.

31. 31. Решите неравенство: $\dfrac{x^5-x^2}{x^2}\ge\dfrac{x^3-1}{4x^2}$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^5-x^2}{x^2}\ge\frac{x^3-1}{4x^2}\Leftrightarrow\frac{(x^3-1)(4x^2-1)}{x^2}\ge0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(2x-1)(2x+1)}{x^2}\ge0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-0,5\le x<0,\\ 0<x\le0,5,\\ x\ge1.\end{array}\right.$$

Ответ: $[-0,5;\ 0)\cup(0;\ 0,5]\cup[1;\ +\infty)$.

32. 32. Решите неравенство: $4\cdot\dfrac{x^3+x^2}{x^2-2x+1}\le9\cdot\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$4\cdot\frac{x^3+x^2}{x^2-2x+1}\le9\cdot\frac{x+1}{x^2-2x+1}\Leftrightarrow\frac{4x^3+4x^2-9x-9}{(x-1)^2}\le0\Leftrightarrow\frac{(x+1)(2x-3)(2x+3)}{(x-1)^2}\le0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le-\dfrac{3}{2},\\ -1\le x<1,\\ 1<x\le\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty;\ -\dfrac{3}{2}\right]\cup[-1;\ 1)\cup\left(1;\ \dfrac{3}{2}\right]$.

33. 33. Решите неравенство: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{6}{x+3}\ge0$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x+3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x+6+2(x^2+4x+3)-6(x^2+3x+2)}{(x+1)\,(x+2)\,(x+3)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+5x}{(x+1)\,(x+2)\,(x+3)}\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3, \\ -2<x\leq -\dfrac{5}{3}, \\ -1<x\leq 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3)\cup\left(-2;\ -\dfrac{5}{3}\right]\cup(-1;\ 0]$.

34. 34. Решите неравенство: $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{6}{x-3}\geq 0$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{6}{x-3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6+2(x^2-4x+3)-6(x^2-3x+2)}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-5x}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 0, \\ 1<x\leq \dfrac{5}{3}, \\ 2<x<3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup\left(1;\ \dfrac{5}{3}\right]\cup(2;\ 3)$.

35. 35. Решите неравенство: $x^2+(2-\sqrt{15})x-2\sqrt{15}\leq 0$.

Решение.

По теореме, обратной теореме Виета, сумма корней уравнения равна $-2+\sqrt{15}$, а их произведение равно $-2\sqrt{15}$. Поэтому корни этого уравнения — числа -2 и $\sqrt{15}$. Тогда неравенство можно решить так:

$$x^2+(2-\sqrt{15})x-2\sqrt{15}\leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-\sqrt{15})\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq x\leq \sqrt{15}.$$

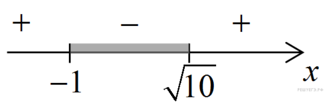
Ответ: $[-2;\ \sqrt{15}]$.

36. 36. Решите неравенство: $x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\leq 0$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\leq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2-(\sqrt{10}+(-1))x+\sqrt{10}(-1)\leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (x-\sqrt{10})(x+1)\leq 0 \;\Leftrightarrow\; -1\leq x\leq \sqrt{10}.$$



Ответ: $[-1;\ \sqrt{10}]$.

37. 37. Решите неравенство: $x\sqrt{8}-7x+14\sqrt{8}>57$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$x\sqrt{8}-7x+14\sqrt{8}>57 \Leftrightarrow (\sqrt{8}-7)x+14\sqrt{8}-57>0 \Leftrightarrow x<\frac{57-14\sqrt{8}}{\sqrt{8}-7} \Leftrightarrow x<\frac{(\sqrt{8}-7)^2}{\sqrt{8}-7} \Leftrightarrow x<\sqrt{8}-7.$$

Ответ: $\left(-\infty;\ \sqrt{8}-7\right)$.

38. 38. Решите неравенство: $\dfrac{3}{2-(x+1)\sqrt{3}}+\dfrac{(x+1)\sqrt{3}-1}{(x+1)\sqrt{3}-3}\geq 3.$

Решение.

Сделаем замену $z=(x+1)\sqrt{3}$:

$$\frac{3}{2-z}+\frac{z-1}{z-3}\geq 3\Leftrightarrow\frac{(z-1)(z-3,5)}{(z-2)(z-3)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\leq z<2,\\3<z\leq 3,5.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}-1\leq x<\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1$ или $\sqrt{3}-1<x\leq\dfrac{7}{2\sqrt{3}}-1.$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}-1;\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\cup\left(\sqrt{3}-1;\ \dfrac{7}{2\sqrt{3}}-1\right].$

39. 39. Решите неравенство: $(10x+7)(4-5x)\left(50x^2-5x-28\right)<0.$

Решение.

Заметим, что $(10x+7)(4-5x)(50x^2-5x-28)=-(10x+7)^2(4-5x)^2$, поэтому неравенство $-(10x+7)^2(4-5x)^2<0$ выполнено при всех x, кроме $x=-0,7$ и $x=0,8$.

Ответ: $(-\infty;\ -0,7)\cup(-0,7;\ 0,8)\cup(0,8;\ +\infty).$

40. 40. Решите неравенство: $\dfrac{x^2-3x-5}{x-4}+\dfrac{x^2-6x+3}{x-6}\leq 2x+1.$

Решение.

Имеем:

$$\frac{x^2-3x-5}{x-4}+\frac{x^2-6x+3}{x-6}\leq 2x+1\Leftrightarrow\frac{(x+1)\,(x-4)}{x-4}-\frac{1}{x-4}+\frac{x\,(x-6)}{x-6}+\frac{3}{x-6}\leq 2x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{x-6}-\frac{1}{x-4}\leq 0\Leftrightarrow\frac{x-3}{(x-4)\,(x-6)}\leq 0.$$

Применяя метод интервалов, получаем: $x\leq 3$ или $4<x<6.$

Ответ: $(-\infty;\ 3]\cup(4;\ 6).$

41. 41. Решите неравенство: $x+\dfrac{8x-25}{x-3}+\dfrac{x^2+41x-136}{x^2-10x+21}\leq 1.$

Решение.

$$x+\frac{8x-25}{x-3}+\frac{x^2+41x-136}{x^2-10x+21}\leq 1\Leftrightarrow x+\frac{8x-25}{x-3}+\frac{51x-157}{(x-3)(x-7)}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(x-3)(x-7)+(x-3)(8x-6)}{(x-3)(x-7)}\leq 0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-7)}\leq 0,\\x\neq 3.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq -3,\\2\leq x<3,\\3<x<7.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3]\cup[2;\ 3)\cup(3;\ 7).$

42. 42. Решите неравенство: $x+\dfrac{8x-45}{x-7}+\dfrac{x^2+15x-132}{x^2-16x+63}\leq 1.$

Решение.

Применяем метод инттревалов:

$$x+\frac{8x-45}{x-7}+\frac{x^2+15x-132}{x^2-16x+63}\leq 1\Leftrightarrow x+\frac{8x-45}{x-7}+\frac{31x-195}{(x-7)(x-9)}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(x-7)(x-9)+(x-7)(8x-30)}{(x-7)(x-9)}\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-6)(x+5)}{x-9}\leq 0,\\ x\neq 7\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq -5,\\ 6\leq x<7,\\ 7<x<9.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -5]\cup[6;\ 7)\cup(7;\ 9)$.

43. 43. Решите неравенство: $\dfrac{12x^2-31x+14}{4x^2+3x-1}\leq 0.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{12x^2-31x+14}{4x^2+3x-1}\leq 0\Leftrightarrow\frac{(x-2)(12x-7)}{(x+1)(4x-1)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<\dfrac{1}{4},\\ \dfrac{7}{12}\leq x\leq 2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-1;\ \dfrac{1}{4}\right)\cup\left[\dfrac{7}{12};\ 2\right]$.

44. 44. Решите неравенство: $\dfrac{20x^2-32x+3}{3x^2+7x+2}\leq 0.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{20x^2-32x+3}{3x^2+7x+2}\leq 0\Leftrightarrow\frac{(2x-3)(10x-1)}{(x+2)(3x+1)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<-\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{1}{10}\leq x\leq\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-2;\ -\dfrac{1}{3}\right)\cup\left[\dfrac{1}{10};\ \dfrac{3}{2}\right]$.

45. 45. Решите неравенство: $2x+1-\dfrac{21x+39}{x^2+x-2}\geq-\dfrac{1}{x+2}.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$2x+1-\frac{21x+39}{x^2+x-2}\geq-\frac{1}{x+2}\ \Leftrightarrow 2x+1-\frac{20(x+2)}{(x+2)(x-1)}-\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}\geq-\frac{1}{x+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1-\dfrac{20}{x-1}\geq 0,\\ x\neq -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+3)(2x-7)}{x-1}\geq 0,\\ x\neq -2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\leq x<-2,\\ -2<x<1,\\ x\geq\dfrac{7}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $[-3;\ -2)\cup(-2;\ 1)\cup\left[\dfrac{7}{2};\ +\infty\right)$.

46. 46. Решите неравенство: $\dfrac{x^2-5x+3}{x-4}+\dfrac{5x-27}{x-6}\leq x+4.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2-5x+3}{x-4}+\frac{5x-27}{x-6}\le x+4 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{x-4}-\frac{1}{x-4}+\frac{5(x-6)}{x-6}+\frac{3}{x-6}\le x+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{(x-4)(x-6)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 3, \\ 4<x<6. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 3]\cup(4;\ 6)$.

47. 47. Решите неравенство: $x^3+5x^2+\dfrac{28x^2+5x-30}{x-6}\le 5.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$x^3+5x^2+\frac{28x^2+5x-30}{x-6}\le 5 \Leftrightarrow x^3+5x^2+\frac{28x^2}{x-6}+\frac{5x-30}{x-6}\le 5 \Leftrightarrow x^3+5x^2+\frac{28x^2}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^4-x^3-2x^2}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x+1)(x-2)}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1, \\ x=0, \\ 2\le x<6. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -1]\cup\{0\}\cup[2;\ 6)$.

48. 48. Решите неравенство: $x^3+6x^2+\dfrac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3 \Leftrightarrow x^3+6x^2+\frac{21x^2}{x-4}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^4+2x^3-3x^2}{x-4}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x-4}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -3, \\ x=0, \\ 1\le x<4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3]\cup\{0\}\cup[1;\ 4)$.

49. 49. Решите неравенство: $\dfrac{1}{5x-12}+\dfrac{2x^2-6x+1}{x-3}\ge 2x.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{1}{5x-12}+\frac{2x^2-6x+1}{x-3}\ge 2x \Leftrightarrow \frac{1}{5x-12}+\frac{2x(x-3)}{x-3}+\frac{1}{x-3}\ge 2x \Leftrightarrow \frac{2x-5}{(5x-12)(x-3)}\ge 0.$$

Множество решений неравенства: $\left(\dfrac{12}{5};\ \dfrac{5}{2}\right]\cup(3,+\infty).$

Ответ: $\left(\dfrac{12}{5};\ \dfrac{5}{2}\right]\cup(3,+\infty).$

50. 50. Решите неравенство: $x^3+8x^2+\dfrac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$x^3+8x^2+\frac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1 \Leftrightarrow x^3+8x^2+\frac{50x^2}{x-7}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^4+x^3-6x^2}{x-7}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -3, \\ x=0, \\ 2\le x<7. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3]\cup\{0\}\cup[2;\ 7)$.

51. 51. Решите неравенство $\dfrac{2x^2-8x}{x-7}\le x$.

Решение.

Преобразуем неравенство

$$x\left(\frac{2x-8}{x-7}-1\right)\le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x-7}\le 0,$$

откуда $x\le 0$ или $1\le x<7$.

Ответ: (-∞; 0]; [1; 7).

52. 52. Решите неравенство $\dfrac{(5x-3)^2}{x-2}\ge \dfrac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{(5x-3)^2}{x-2}\ge \frac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2} \Leftrightarrow \frac{(5x-3)^2}{x-2}-\frac{(5x-3)^2}{(x-2)(x-7)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5x-3)^2(x-8)}{(x-2)(x-7)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,6, \\ 2<x<7, \\ x\ge 8. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0,6\}\cup(2;\ 7)\cup[8;+\infty)$.

53. 53. Решите неравенство $\dfrac{(5x-2)^2}{x-3}\ge \dfrac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{(5x-2)^2}{x-3}\ge \frac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2} \Leftrightarrow \frac{(5x-2)^2}{x-3}-\frac{(5x-2)^2}{(x-3)(x-8)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5x-2)^2(x-9)}{(x-3)(x-8)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,4, \\ 3<x<8, \\ x\ge 9. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0,4\}\cup(3;\ 8)\cup[9;+\infty)$.

54. 54. Решите неравенство $\dfrac{x}{2x^2+12}\le (1:5)x^{-1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x}{2x^2+12} \le \frac{1}{5x} \Leftrightarrow \frac{5x^2-2x^2-12}{(2x^2+12)5x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{(2x^2+12)x} \le 0.$$

Учитывая, что при всех значениях x выражение $2x^2 + 12$ положительно, получаем

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x} \le 0,$$

откуда

$$x \le -2,\ 0 < x \le 2.$$

Ответ: $(-\infty;-2], (0;2]$.

55. 55. Решите неравенство $\frac{2-(x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1}-1} \le -0,2.$

Решение.

Сделаем замену $y=\frac{1}{x-6}$. Получим

$$\frac{2-y}{5y-1} \le -0,2 \Leftrightarrow \frac{1,8}{5y-1} \le 0 \Leftrightarrow y < \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $\frac{1}{x-6} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{11-x}{x-6} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<6, \\ x>11. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;\ 6) \cup (11;\ +\infty)$

56. 56. Решите неравенство $\frac{2x^2-10x+6}{x-5} \le x.$

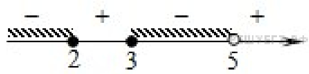
Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{2x^2-10x+6}{x-5} \le x \Leftrightarrow \frac{2x^2-10x+6}{x-5} - x \le 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-10x+6-x(x-5)}{x-5} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-10x+6-x^2+5x}{x-5} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x-5} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-2)}{x-5} \le 0.$$

Отметим корни числителя $x=3,$ и $x=2$ и корень знаменателя $x=5$ на числовой прямой (см. рис.).



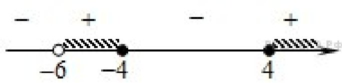
Ответ: $(-\infty;\ 2] \cup [3;\ 5)$.

57. 57. Решите неравенство $x+\frac{20}{x+6} \ge 6.$

Решение.

Решим неравенство:

$$x+\frac{20}{x+6} \ge 6 \Leftrightarrow x+\frac{20-6x-36}{x+6} \ge 0 \Leftrightarrow x-\frac{6x+16}{x+6} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-16}{x+6} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+4)(x-4)}{x+6} \ge 0 \underset{\text{см.рис.}}{\Leftrightarrow} x \in (-6;-4] \cup [4;+\infty).$$



Ответ: $(-6;-4] \cup [4;+\infty)$.

58. 58. Решите неравенство $x^3+6x^2+\dfrac{28x^2+2x-10}{x-5}\le 2.$

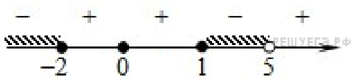
Решение.

Решим неравенство:

$$x^3+6x^2+\frac{28x^2+2x-10}{x-5}\le 2\Leftrightarrow x^3+6x^2+\frac{2(14x^2+x-5)}{x-5}-2\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3+6x^2+\frac{28x^2}{x-5}\le 0\Leftrightarrow x^2(x+6)+\frac{28x^2}{x-5}\le 0\Leftrightarrow x^2\left(x+6+\frac{28}{x-5}\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x^2+x-2)}{x-5}\le 0\Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-5}\le 0\underset{\text{см.рис.}}{\Leftrightarrow} x\in(-\infty;-2]\cup\{0\}\cup[1;5).$$



Ответ: $(-\infty;-2]\cup\{0\}\cup[1;\ 5).$

59. 59. Решите неравенство $\dfrac{2}{x^2-12x+35}+\dfrac{3}{x^2-17x+70}\le 0.$

Решение.

Решим неравенство:

$$\frac{2}{x^2-12x+35}+\frac{3}{x^2-17x+70}\le 0\Leftrightarrow \frac{2}{(x-5)(x-7)}+\frac{3}{(x-7)(x-10)}\le 0\Leftrightarrow \frac{2(x-10)+3(x-5)}{(x-5)(x-7)(x-10)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-35}{(x-5)(x-7)(x-10)}\le 0\Leftrightarrow \frac{5(x-7)}{(x-5)(x-7)(x-10)}\le 0\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 7,\\ 5<x<10.\end{cases}$$

Ответ: $(5;7)\cup(7;10).$

60. 60. Решите неравенство $\dfrac{4x^4-4x^3+x^2}{-2x^2+5x-2}+\dfrac{2x^3-7x^2+5x+1}{x-2}\le 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{4x^4-4x^3+x^2}{-2x^2+5x-2}+\frac{2x^3-7x^2+5x+1}{x-2}\le 0\Leftrightarrow \frac{x^2(2x-1)^2}{(2x-1)(2-x)}+\frac{2x^3-7x^2+5x+1}{x-2}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-6x^2+5x+1}{x-2}\le 0,\\ x\ne \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(6x+1)(x-1)}{x-2}\ge 0,\\ x\ne \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{6};\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\ 1\right]\cup(2;\ +\infty).$$

Ответ: $x\in\left[-\dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right]\cup(2;\ +\infty).$