

Иррациональные неравенства

1. 1. Решите неравенство $\left(2x + 1 - \frac{6}{x}\right) \left(\frac{28}{x+2} - 2 + (\sqrt{-3-2x})^2\right) \geq 0$.

Решение.

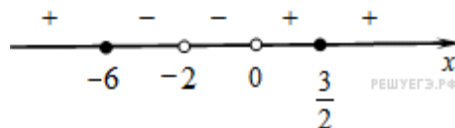
Данное неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} -3-2x \geq 0, \\ \frac{2x^2+x-6}{x} \cdot \frac{28-2x-4+(x+2)(-3-2x)}{x+2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2}, \\ \frac{(x+2)(2x-3)}{x} \cdot \frac{28-2x-4-2x^2-7x-6}{x+2} \geq 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство методом интервалов:

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{x}(-2x^2-9x+18) \geq 0, \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-3}{x} \cdot (-2)(x+6) \left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0, \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2x-3)^2(x+6)}{x} \leq 0, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Отметим на прямой точки как показано на рисунке:



Учитывая неравенство $x \leq -\frac{3}{2}$, получаем решение: $[-6; -2) \cup \left(-2; -\frac{3}{2}\right]$.

Ответ: $[-6; -2) \cup \left(-2; -\frac{3}{2}\right]$.

2. 2. Решите уравнение $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$.

Решение.

Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-4}$. Получаем:

$$\sqrt{y^2+4y+4} + \sqrt{y^2-4y+4} = 4 \Leftrightarrow |y+2| + |y-2| = 4.$$

Заметим, что $y \geq 0$ и, поэтому, $y+2 > 0$, получаем:

$$y+2 + |y-2| = 4 \Leftrightarrow |y-2| = 2-y.$$

Воспользуемся определением модуля. Получаем:

$$y-2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x-4} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 8.$$

Ответ: $[4; 8]$

3. 3. Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$.

Решение.

Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-1}$. Получаем:

$$\sqrt{y^2+2y+1} + \sqrt{y^2-2y+1} = 2 \Leftrightarrow |y+1| + |y-1| = 2.$$

Учитывая, что $y \geq 0$ и поэтому $y+1 > 0$, преобразуем уравнение:

$$y+1 + |y-1| = 2 \Leftrightarrow |y-1| = -y+1.$$

Воспользуемся определением модуля. Получаем: $y-1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Ответ: $[1; 2]$.

4. 4. Решите неравенство $\left(x + \frac{3}{x}\right) \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2 \geq 4 \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2$.

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 5-x \geq 0, \\ 5-x \neq 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$, т. е. $|x - 3| = 1$ и, значит, $x = 2$ или $x = 4$. Тем самым, $x = 2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2$, получим: $x + \frac{3}{x} \geq 4$,

откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$. Решим это неравенство, получим: $0 < x \leq 1$ или $x \geq 3$.

Учитывая ограничения, получаем множество решений исходного неравенства: $(0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4) \cup (4; 5]$.

Ответ: $(0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4) \cup (4; 5]$.

5. 5. Решите неравенство

$$\left(x + \frac{4}{x}\right) \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2 \geq 5 \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 6-x \geq 0, \\ 6-x \neq 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 6, \\ x \neq 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 1$, т. е. $|x - 4| = 1$ и, значит, $x = 3$ или $x = 5$.

Значит, $x = 3$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2$, получим:

$x + \frac{4}{x} \geq 5$, откуда

$$\frac{(x-1)(x-4)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ x \geq 4. \end{cases}$$

С учетом ограничений получаем, что множество решений исходного неравенства: $(0; 1] \cup \{3\} \cup [4; 5) \cup (5; 6]$.

Ответ: $(0; 1] \cup \{3\} \cup [4; 5) \cup (5; 6]$.

6. 6. Решите неравенство $\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}$.

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned}\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3-6x^2+14x-7}, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(7-x) < x^3-6x^2+14x-7, \\ 1 < x \leq 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-5x^2+6x > 0, \\ 1 < x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3) > 0, \\ 1 < x \leq 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 3 < x \leq 7. \end{cases}\end{aligned}$$

Ответ: $(1; 2) \cup (3; 7]$.

7. 7. Решите неравенство $\frac{1}{6x^2-5x} \geq \frac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$.

Решение.

Пусть $a = \sqrt{6x^2-5x+1}$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2-1} \geq \frac{1}{a-1}, \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{a^2-1} \leq 0, \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq a < 1.$$

Следовательно:

$$\begin{cases} 6x^2-5x+1 < 1, \\ 6x^2-5x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(6x-5) < 0, \\ (2x-1)(3x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$.

8. 8. Решите неравенство $\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$.

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned}\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3-7x^2+14x-5}, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (5-x) < x^3-7x^2+14x-5, \\ 1 < x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-6x^2+8x > 0, \\ 1 < x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-4) > 0, \\ 1 < x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 4 < x \leq 5. \end{cases}\end{aligned}$$

Ответ: $(1; 2) \cup (4; 5]$.

9. 9. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}}{x^2+x-1} \leq 0$.

Решение.

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} x^2+x \geq 0, \\ x^2-2x+1 \geq 0, \\ \frac{(x^2-2x+1)-(x^2+x)}{x^2+x-1} \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) \geq 0, \\ (x-1)^2 \geq 0, \\ \frac{3x-1}{x^2+x-1} \geq 0, \end{cases}$$

Из первого неравенства получаем $x \leq -1$ или $x \geq 0$.

Второе неравенство выполняется при всех x .

Из третьего неравенства получаем $\frac{-\sqrt{5}-1}{2} < x \leq \frac{1}{3}$ или $x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Таким образом, множество решений исходного неравенства:

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$.

10. 10. Решите неравенство: $(x^2-x-6) \cdot \sqrt{8-x} \leq 0$.

Решение.

Пусть $x < 8$. Тогда $\sqrt{8-x} > 0$, и неравенство равносильно неравенству $x^2-x-6 \leq 0$. Решим систему:

$$\begin{cases} x < 8, \\ x^2-x-6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8, \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3.$$

Заметим, теперь, что $x = 8$, также является решением.

Ответ: $[-2; 3] \cup \{8\}$.

11. 11. Решите неравенство: $\sqrt{x^2+22} \leq 5$.

Решение.

Имеем:

$$0 < x^2 + 22 \leq 25 \Leftrightarrow x^2 \leq 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Ответ: $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

12. 12. Решите неравенство: $\sqrt{x^2 + 34} \geq 6$.

Решение.

Имеем:

$$x^2 + 34 \geq 36 \Leftrightarrow x^2 \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{2}, \\ x \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

13. 13. Решите неравенство: $\left(\frac{x+5}{4+x} - \frac{1}{x^2+9x+20}\right) \sqrt{-7x-x^2} \geq 0$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{(x+5)^2 - 1}{(x+5)(x+4)} \sqrt{-x(x+7)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+6)(x+4) \sqrt{-x(x+7)}}{(x+5)(x+4)} \geq 0.$$

Неравенство верно в точках 0 и -7. При $-x(x+7) > 0$ то есть при $-7 < x < 0$ выражение, стоящее под знаком корня положительно и на него можно разделить. Имеем:

$$\frac{(x+6)(x+4)}{(x+4)(x+5)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -6, \\ -5 < x < -4, \\ x > -4. \end{cases}$$

С учетом условия $-7 < x < 0$ получаем множество решений неравенства: $(-7; -6] \cup (-5; -4) \cup (-4; 0)$. Добавляя точки 0 и -7, получаем ответ.

Ответ: $[-7; -6] \cup (-5; -4) \cup (-4; 0]$.

14. 14. Решите неравенство $\frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \leq \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2}$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \leq \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2} &\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2} - \frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \frac{3x+3-2x-4}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3} \cdot (x-1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0. \end{aligned}$$

И решим это неравенство методом интервалов.

Интервалы	$(-3; -2)$	$(-2; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; +\infty)$
Знак рационального выражения	-	+	-	+

Ответ: $\{-3\} \cup (-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

15. 15. Решите неравенство $\frac{x}{x^2+3} \leq \frac{1}{4}x^{-1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x}{x^2+3} \leq \frac{1}{4x} \Leftrightarrow \frac{4x^2-x^2-3}{(x^2+3)4x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+3)x} \leq 0.$$

Учитывая, что при всех значениях x выражение x^2+3 положительно, получаем

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x} \leq 0,$$

откуда

$$x \leq -1, \quad 0 < x \leq 1.$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup (0; 1]$.

16. 16. Решите неравенство $\left(\frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{x-4}{3-x}\right) \sqrt{6x-x^2} \leq 0$.

Решение.

Если $6x-x^2=0$, то $x=0$ или $x=6$. При этих значениях x выражение $\frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{x-4}{3-x}$ имеет смысл, поэтому $x=0$ и $x=6$ являются решениями неравенства.

Если $6x-x^2 > 0$, то $0 < x < 6$, при этом $\sqrt{6x-x^2} > 0$. Тогда

$$\frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{x-4}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-4)(x-3)} + \frac{x-4}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-(x-4)^2}{(x-4)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ 3 < x < 4, \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Пересекая полученное решение с множеством $(0; 6)$, и учитывая, что точки 0 и 6 также входят в являются решениями неравенства, получим множество решений исходного неравенства: $[0; 3) \cup (3; 4) \cup [5; 6]$.

Ответ: $[0; 3) \cup (3; 4) \cup [5; 6]$.

17. 17. Решите неравенство $\left(2x-3-\frac{5}{x}\right) \left(\frac{14}{x+1} + 2 + (\sqrt{-1-2x})^2\right) \geq 0$.

Решение.

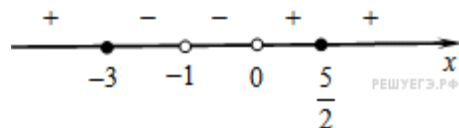
Данное неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} -1 - 2x \geq 0, \\ \frac{2x^2 - 3x - 5}{x} \cdot \frac{14 + 2x + 2 + (x+1)(-1 - 2x)}{x+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2}, \\ \frac{(x+1)(2x-5)}{x} \cdot \frac{16 + 2x - x - 2x^2 - 1 - 2x}{x+1} \geq 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство методом интервалов:

$$\begin{cases} \frac{2x-5}{x}(-2x^2 - x + 15) \geq 0, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-5}{x} \cdot (-2)(x+3) \left(x - \frac{5}{2}\right) \geq 0, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2x-5)^2(x+3)}{x} \leq 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Отметим на прямой точки как показано на рисунке:



Учитывая неравенство $x \leq -\frac{1}{2}$, получаем решение: $[-3, -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $[-3; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right]$.