Показательные неравенства

1. 1. Решите неравенство: $6^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 2.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$6^x + \frac{1}{6^x} > 2 \Leftrightarrow 6^{2x} + 1 > 2 \cdot 6^x \Leftrightarrow (6^x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow 6^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$

2. 2. Решите неравенство: $2^{x^2} \leq 4 \cdot 2^x.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$2^{x^2} \leq 4 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{x^2} \leq 2^{x+2} \Leftrightarrow x^2 \leq x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Ответ: $[-1;\ 2].$

3. 3. Решите неравенство $25^x + 5^{x+1} + 5^{1-x} + \frac{1}{25^x} \leq 12.$

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\left(25^x + \frac{1}{25^x}\right) + 5\left(5^x + \frac{1}{5^x}\right) \leq 12$ и положим $5^x + \frac{1}{5^x} = t.$

Тогда $25^x + \frac{1}{25^x} + 2 = t^2$ и, значит, $25^x + \frac{1}{25^x} = t^2 - 2.$

Далее имеем: $t^2 + 5t - 14 \leq 0 \Leftrightarrow -7 \leq t \leq 2,$ откуда $-7 \leq 5^x + \frac{1}{5^x} \leq 2 \Leftrightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

Ответ: $\{0\}.$

4. 4. Решите неравенство: $5^x + \left(\frac{1}{5}\right)^x > 2.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$5^x + \frac{1}{5^x} > 2 \Leftrightarrow 5^{2x} + 1 > 2 \cdot 5^x \Leftrightarrow (5^x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow 5^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$

5. 5. Решите неравенство: $2^{x^2} \leq 64 \cdot 2^x.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$2^{x^2} \leq 64 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{x^2} \leq 2^{x+6} \Leftrightarrow x^2 \leq x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $[-2;\ 3].$

6. 6. Решите неравенство: $2^x + 6 \cdot 2^{-x} \leq 7.$

Решение.

Пусть $2^x = y$. Поскольку $y > 0$, на него можно умножить обе части неравенства. Получим:

$$y + \frac{6}{y} \le 7 \Leftrightarrow y^2 - 7y + 6 \le 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-6) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le 6.$$

Откуда $0 \le x \le \log_2 6$.

Ответ: $[0;\ \log_2 6]$.

7. 7. Решите неравенство: $3^x + 10 \cdot 3^{-x} \le 11$.

Решение.

Имеем:

$$3^x + 10 \cdot 3^{-x} \le 11 \Leftrightarrow 9^x - 11 \cdot 3^x + 10 \le 0 \Leftrightarrow (3^x - 1)(3^x - 10) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \log_3 10$$

Ответ: $[0;\ \log_3 10]$.

8. 8. Решите неравенство: $2^{2x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} + 5 \le 0$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2 - 7t + 10 \le 0$, откуда $2 \le t \le 5$. Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$2 \le 2^x \le 5 \Leftrightarrow 1 \le x \le \log_2 5.$$

Ответ: $[1;\ \log_2 5]$.

9. 9. Решите неравенство: $5 \cdot 2^{2x+2} - 21 \cdot 2^{x-1} + 1 \le 0$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид: $40t^2 - 21t + 2 \le 0$, откуда $\frac{1}{8} \le t \le \frac{2}{5}$, возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\frac{1}{8} \le 2^x \le \frac{2}{5} \Leftrightarrow -3 \le x \le -\log_2 \frac{5}{2}.$$

Ответ: $\left[-3;\ -\log_2 \frac{5}{2}\right]$.

10. 10. Решите неравенство: $4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \le 0$.

Решение.

Имеем:

$$4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \le 0 \Leftrightarrow (2^x - 8)(2^x - 21) \le 0 \Leftrightarrow 8 \le 2^x \le 21 \Leftrightarrow 3 \le x \le \log_2 21.$$

Ответ: $[3;\ \log_2 21]$.

11. 11. Решите неравенство: $4^x - 7 \cdot 2^x + 10 \le 0$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2 - 7t + 10 \le 0$, откуда $2 \le t \le 5$, возвращаясь к исходной переменной получаем:

$$2 \le 2^x \le 5 \Leftrightarrow 1 \le x \le \log_2 5.$$

Ответ: $[1;\ \log_2 5]$.

12. 12. Решите неравенство: $9^x - 31 \cdot 3^x + 108 \le 0$.

Решение.

Решим первое неравенство системы: $9^x - 31 \cdot 3^x + 108 \le 0$. Пусть $t = 3^x$, тогда

$$t^2 - 31t + 108 \le 0 \Leftrightarrow (t-4)(t-27) \le 0 \Leftrightarrow 4 \le t \le 27,$$

откуда

$$4 \le 3^x \le 27 \Leftrightarrow \log_3 4 \le x \le 3.$$

Ответ: $[\log_3 4;\ 3]$.

13. 13. Решите неравенство: $2^x + 5 \cdot 2^{2-x} \le 12$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 12t + 20 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le t \le 10;$$

$$2 \le 2^x \le 10 \Leftrightarrow 1 \le x \le \log_2 10.$$

Ответ: $[1;\ \log_2 10]$.

14. 14. Решите неравенство: $2^x + 80 \cdot 2^{4-x} \le 261$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2 - 261t + 1280 \le 0$, откуда $5 \le t \le 256$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$5 \le 2^x \le 256 \Leftrightarrow \log_2 5 \le x \le 8.$$

Ответ: $[\log_2 5;\ 8]$.

15. 15. Решите неравенство: $2^{2x+4} - 16 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+1} + 16 \le 0$.

Решение.

Имеем:

$$2^{2x+4} - 16 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+1} + 16 \le 0 \Leftrightarrow 2^4 \cdot 4^x - 2^7 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 2^4 \le 0 \Leftrightarrow 2^3 \cdot 4^x - (2^6+1)2^x + 2^3 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^3 \cdot 2^x - 1)(2^x - 2^3) \le 0 \Leftrightarrow 2^{-3} \le 2^x \le 2^3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3.$$

Ответ: $[-3;\ 3]$.

16. 16. Решите неравенство: $3^{-2x+4} - 81 \cdot 3^{-x+3} - 3^{-x+1} + 81 \le 0$.

Решение.

Решим первое неравенство:

$$3^{-2x+4} - 81 \cdot 3^{-x+3} - 3^{-x+1} + 81 \le 0 \Leftrightarrow 3^4 \cdot 9^{-x} - 3^7 \cdot 3^{-x} - 3 \cdot 3^{-x} + 3^4 \le 0 \Leftrightarrow 3^3 \cdot 9^{-x} - (3^6+1)3^{-x} + 3^3 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3^3 \cdot 3^{-x}(3^{-x} - 3^3) - (3^{-x} - 3^3) \le 0 \Leftrightarrow (3^3 \cdot 3^{-x} - 1)(3^{-x} - 3^3) \le 0 \Leftrightarrow 3^{-3} \le 3^{-x} \le 3^3 \Leftrightarrow -3 \le -x \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3.$$

Ответ: $[-3;\ 3]$.

17. 17. Решите неравенство: $16^{x+\frac{1}{4}} - 9 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} + 1 \ge 0$.

Решение.

$$16^{x+\frac{1}{4}}-9\cdot 4^{x-\frac{1}{2}}+1\geq 0.$$
$$2\cdot 16^{x}-\frac{9}{2}\cdot 4^{x}+1\geq 0.$$

Пусть $t=4^{x}$:

$$2t^{2}-\frac{9}{2}t+1\geq 0\Leftrightarrow 4t^{2}-9t+2\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leq \frac{1}{4}, \\ t\geq 2. \end{array}\right.$$

Откуда

$$\left[\begin{array}{l} 4^{x}\leq \frac{1}{4}, \\ 4^{x}\geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -1, \\ x\geq \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Решение первого неравенства: $(-\infty;\ -1]\cup\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty;\ -1]\cup\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

18. 18. Решите неравенство: $4^{x}+4^{-x}\geq \frac{10}{3}$.

Решение.

Пусть $y=4^{x},\ y>0$ тогда:

$$y+\frac{1}{y}\geq \frac{10}{3}\underset{y>0}{\Leftrightarrow} 3y^{2}-10y+3\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\leq \frac{1}{3}, \\ y\geq 3. \end{array}\right.$$

Откуда $x\leq -\log_{4}3$ или $x\geq \log_{4}3$.

Ответ: $(-\infty;\ -\log_{4}3]\cup[\log_{4}3;\ +\infty)$.

19. 19. Решите неравенство: $5^{x}+5^{-x}\geq \frac{17}{4}$.

Решение.

Пусть $y=5^{x}>0$ тогда:

$$y+\frac{1}{y}\geq \frac{17}{4}\underset{y>0}{\Leftrightarrow} 4y^{2}-17y+4\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\leq \frac{1}{4}, \\ y\geq 4. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем: $x\leq -\log_{5}4$ или $x\geq \log_{5}4$.

Ответ: $(-\infty;\ -\log_{5}4]\cup[\log_{5}4;\ +\infty)$.

20. 20. Решите неравенство: $25^{x}-20^{x}-2\cdot 16^{x}\leq 0$.

Решение.

Разделим обе части неравенства на положительное выражение 16^x.

$$\left(\frac{25}{16}\right)^x-\left(\frac{20}{16}\right)^x-2\le 0$$
$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2x}-\left(\frac{5}{4}\right)^x-2\le 0$$

Сделаем замену $z=\left(\frac{5}{4}\right)^x$. Получаем: $z^2-z-2\le 0\Leftrightarrow -1\le z\le 2$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\left(\frac{5}{4}\right)^x\le 2\Leftrightarrow x\le \log_{1,25}2$.

Ответ: $(-\infty;\ \log_{1,25}2]$.

21. 21. Решите неравенство: $4^{x+2}-257\cdot 2^x+16\le 0$.

Решение.

Сделаем замену $y=2^x$, имеем:

$$16y^2-257y+16\le 0\Leftrightarrow (y-16)(16y-1)\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{16}\le y\le 16.$$

Отсюда получаем решение неравенства:

$$\frac{1}{16}\le 2^x\le 16\Leftrightarrow -4\le x\le 4.$$

Ответ: $[-4;\ 4]$.

22. 22. Решите неравенство: $4^x\le 9\cdot 2^x+22$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $(2^x)^2-9\cdot 2^x-22\le 0$.

Сделав замену $t=2^x$, получим квадратное неравенство:

$$t^2-9t-22\le 0\Leftrightarrow (t+2)(t-11)\le 0\Leftrightarrow -2\le t\le 11.$$

Значит, $-2\le 2^x\le 11$, откуда $x\le \log_2 11$.

Ответ: $(-\infty;\ \log_2 11]$.

23. 23. Решите неравенство: $4^{x+1}-33\cdot 2^x+8\le 0$.

Решение.

Сделав замену $y=2^x$, имеем:

$$4y^2-33y+8\le 0\Leftrightarrow (y-8)(4y-1)\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{4}\le y\le 8.$$

Откуда получаем решение неравенства:

$$\frac{1}{4}\le 2^x\le 8\Leftrightarrow -2\le x\le 3.$$

Ответ: $[-2;\ 3]$.

24. 24. Решите неравенство: $2^x+32\cdot 2^{-x}\ge 33$.

Решение.

Пусть $y = 2^x$, тогда:

$$y + \frac{32}{y} \geq 33 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 33y + 32}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(y-32)}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < y \leq 1, \\ y \geq 32. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 2^x \leq 1, \\ 2^x \geq 32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0, \\ x \geq 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [5;\ +\infty)$.

25. 25. Решите неравенство: $\frac{1}{3^{x-1}} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^{x+1}} < 52$.

Решение.

Вынесем общий множитель за скобку:

$$\frac{1}{3^{x+1}}(9+3+1) < 52 \Leftrightarrow \frac{13}{3^{x+1}} < 52 \Leftrightarrow 3^{x+1} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x+1 > \log_3 \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > -1 - \log_3 4.$$

Ответ: $(-1 - \log_3 4;\ +\infty)$.

26. 26. Решите неравенство: $36^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^{x-1} + 1 \geq 0$.

Решение.

Пусть $t = 6^x > 0$, тогда имеем:

$$\frac{1}{6}t^2 - \frac{7}{6}t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 1, \\ t \geq 6. \end{array}\right.$$

Откуда

$$\left[\begin{array}{l} 6^x \leq 1, \\ 6^x \geq 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$.

27. 27. Решите неравенство: $6^x - 4 \cdot 3^x - 2^x + 4 \leq 0$.

Решение.

Заметим, что

$$6^x - 4 \cdot 3^x - 2^x + 4 = 3^x \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x - (2^x - 4) = 3^x(2^x - 4) - (2^x - 4) = (3^x - 1)(2^x - 4).$$

Поэтому

$$6^x - 4 \cdot 3^x - 2^x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (3^x - 1)(2^x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow (3^x - 3^0)(2^x - 2^2) \leq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

Ответ: $[0;\ 2]$.

28. 28. Решите неравенство: $20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 \leq 0$.

Решение.

Заметим, что

$$20^x-64\cdot 5^x-4^x+64=5^x\cdot 4^x-64\cdot 5^x-(4^x-64)=5^x(4^x-64)-(4^x-64)=(5^x-1)(4^x-64).$$

Поэтому

$$20^x-64\cdot 5^x-4^x+64\le 0\Leftrightarrow (5^x-1)(4^x-64)\le 0\Leftrightarrow (5^x-5^0)(4^x-4^3)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x\cdot 3(x-3)\le 0\Leftrightarrow 0\le x\le 3.$$

Ответ: $[0;\ 3]$.

29. 29. Решите неравенство: $3\cdot 9^{-x}-28\cdot 3^{-x}+9\le 0$.

Решение.

Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y=3^{-x}$.

$$3y^2-28y+9\le 0\Leftrightarrow (3y-1)(y-9)\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le y\le 9.$$

Тогда $\frac{1}{3}\le 3^{-x}\le 9$, откуда находим решение первого неравенства системы: $-2\le x\le 1$.

Ответ: $[-2;\ 1]$.

30. 30. Решите неравенство: $3\cdot 9^x-28\cdot 3^x+9\le 0$.

Решение.

Сделаем замену $y=3^x$.

$$3y^2-28y+9\le 0\Leftrightarrow (3y-1)(y-9)\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le y\le 9.$$

Тогда $\frac{1}{3}\le 3^x\le 9$, откуда находим решение первого неравенства системы: $-1\le x\le 2$.

Ответ: $[-1;\ 2]$.

31. 31. Решите неравенство: $5^{3x-1}-5^{3x+1}\le -72$.

Решение.

Имеем:

$$5^{3x-1}(1-25)\le -72\Leftrightarrow 5^{3x-1}\ge 3\Leftrightarrow 3x-1\ge \log_5 3\Leftrightarrow x\ge \frac{\log_5 3+1}{3}.$$

Ответ: $\left[\frac{\log_5 3+1}{3};\ +\infty\right)$.

32. 32. Решите неравенство: $3^{4x-1}+3^{4x+1}\ge 80$.

Решение.

Имеем:

$$3^{4x-1}(1+9)\ge 80\Leftrightarrow 3^{4x-1}\ge 8\Leftrightarrow 4x-1\ge \log_3 8\Leftrightarrow x\ge \frac{1}{4}(\log_3 8+1).$$

Ответ: $\left[\frac{1}{4}(\log_3 8+1);\ +\infty\right)$.

33. 33. Решите неравенство: $11^{x+1}+3\cdot 11^{-x}\le 34$.

Решение.

Сделаем замену $y = 11^x$:

$$11y + \frac{3}{y} \le 34 \Leftrightarrow \frac{11y^2 - 34y + 3}{y} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-3)(11y-1)}{y} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < 0, \\ \frac{1}{11} \le y \le 3. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $11^x > 0$, получаем: $\frac{1}{11} \le 11^x \le 3$, откуда множество решение неравенства системы: $[-1;\ \log_{11} 3]$.

Ответ: $[-1;\ \log_{11} 3]$.

34. 34. Решите неравенство: $5^{x+2} + 2 \cdot 5^{-x} \le 51$.

Решение.

Сделаем замену $y = 5^x$:

$$25y + \frac{2}{y} \le 51 \Leftrightarrow \frac{25y^2 - 51y + 2}{y} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-2)(25y-1)}{y} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < 0, \\ \frac{1}{25} \le y \le 2. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $5^x > 0$, получаем: $\frac{1}{25} \le 5^x \le 2$, откуда получаем множество решений неравенства: $[-2;\ \log_5 2]$.

Ответ: $[-2;\ \log_5 2]$.

35. 35. Решите неравенство: $2^{x^2} + 9 \cdot 2^{1-x^2} \ge 19$.

Решение.

Пусть $2^{x^2} = t \ge 1$. тогда данное неравенство принимает вид $t + \frac{18}{t} - 19 \ge 0$. Учитывая условие $t \ge 1$, получаем:

$$\begin{cases} t^2 - 19t + 18 \ge 0, \\ t \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t \ge 18. \end{array}\right.$$

Имеем:

1) $2^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $2^{x^2} \ge 18 \Leftrightarrow x^2 \ge \log_2 18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\sqrt{1 + 2\log_2 3}, \\ x \ge \sqrt{1 + 2\log_2 3}. \end{array}\right.$

Множество решения неравенства: $(-\infty;\ -\sqrt{1+2\log_2 3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{1+2\log_2 3};\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -\sqrt{1+2\log_2 3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{1+2\log_2 3};\ +\infty)$.

36. 36. Решите неравенство: $3^{x^2} + 2 \cdot 3^{1-x^2} \ge 7$.

Решение.

Пусть $3^{x^2} = t \geq 1(*)$, тогда данное неравенство принимает вид $t + \dfrac{6}{t} - 7 \geq 0$.

Учитывая условие $(*)$, получаем

$$\begin{cases} t^2 - 7t + 6 \geq 0, \\ t \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t \geq 6. \end{array}\right.$$

Далее имеем:

1) $3^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $3^{x^2} \geq 6 \Leftrightarrow x^2 \geq \log_3 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\sqrt{1+\log_3 2}, \\ x \geq \sqrt{1+\log_3 2}. \end{array}\right.$

Решения неравенства: $\left(-\infty, -\sqrt{1+\log_3 2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{1+\log_3 2}, +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty, -\sqrt{1+\log_3 2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{1+\log_3 2}, +\infty\right)$.

37. 37. Решите неравенство: $19 \cdot 4^x + 4^{-x} \leq 20$.

Решение.

Пусть $t = 4^x$, тогда имеем:

$$19t + \frac{1}{t} - 20 \geq 0 \underset{t>0}{\Leftrightarrow} 19t^2 - 20t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{19} \leq t \leq 1.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{1}{19} \leq 4^x \leq 1 \Leftrightarrow \log_4 \frac{1}{19} \leq x \leq 0 \Leftrightarrow -\log_4 19 \leq x \leq 0.$$

Ответ: $[-\log_4 19;\ 0]$.

38. 38. Решите неравенство: $9^x - 3^{x+4} \leq 82$.

Решение.

Сделаем замену $y = 3^x$:

$$y^2 - 81y \leq 82 \Leftrightarrow y^2 - 81y - 82 \leq 0 \Leftrightarrow (y-82)(y+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 82.$$

Тогда $-1 \leq 3^x \leq 82$, откуда находим решение неравенства: $x \leq \log_3 82$.

Ответ: $(-\infty;\ \log_3 82]$.

39. 39. Решите неравенство: $9^x - 28 \leq 3^{x+3}$.

Решение.

Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 3^x$:

$$y^2 - 28 \leq 27y \Leftrightarrow y^2 - 27y - 28 \leq 0 \Leftrightarrow (y-28)(y+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 28.$$

Тогда $-1 \leq 3^x \leq 28$, откуда находим решение первого неравенства системы: $x \leq \log_3 28$.

Ответ: $(-\infty;\ \log_3 28]$.

40. 40. Решите неравенство: $9^{x+\frac{1}{2}} - 28 \cdot 3^{x-1} + 1 \leq 0$.

Решение.

Пусть $t = 3^x$, тогда имеем:

$$9t^2 - 28t + 3 \le 0 \Leftrightarrow (9t-1)(t-3) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9} \le t \le 3.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{1}{9} \le 3^x \le 3 \Leftrightarrow 3^{-2} \le 3^x \le 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 1.$$

Ответ: $[-2;\ 1]$.

41. 41. Решите неравенство: $2^x + \dfrac{80}{2^x} \ge 21$.

Решение.

Заметим, что $2^x > 0$ при всех значениях переменной, поэтому первое неравенство можно умножить на 2^x, не меняя его знака, откуда имеем:

$$4^x + 80 \ge 21 \cdot 2^x \Leftrightarrow 4^x - 21 \cdot 2^x + 80 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \ge 16, \\ 2^x \le 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 4, \\ x \le \log_2 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ \log_2 5] \cup [4;\ +\infty)$.

42. 42. Решите неравенство: $25^{x^2-2x+10} - 0,2^{2x^2-4x-80} \le 0$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$25^{x^2-2x+10} - 0,2^{2x^2-4x-80} \le 0 \Leftrightarrow 5^{2x^2-4x+20} \le 5^{-2x^2+4x+80} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 20 \le -2x^2 + 4x + 80 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 5.$$

Ответ: $[-3;\ 5]$.

43. 43. Решите неравенство: $64^{x^2-3x+20} - 0,125^{2x^2-6x-200} \le 0$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$64^{x^2-3x+20} - 0,125^{2x^2-6x-200} \le 0 \Leftrightarrow 8^{2x^2-6x+40} \le 8^{-2x^2+6x+200} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 40 \le -2x^2 + 6x + 200 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 40 \le 0 \Leftrightarrow -5 \le x \le 8.$$

Ответ: $[-5;\ 8]$.

44. 44. Решите неравенство: $4^{x^2+x-3} - 0,5^{2x^2-6x-2} \le 0$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$4^{x^2+x-3} - 0,5^{2x^2-6x-2} \le 0 \Leftrightarrow 2^{2x^2+2x-6} \le 2^{-2x^2+6x+2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 6 \le -2x^2 + 6x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2.$$

Ответ: $[-1;\ 2]$.

45. 45. Решите неравенство: $25^x - 5 \cdot 10^x - 6 \cdot 4^x \le 0$.

Решение.

Разделим обе части на 4^x :

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{5}{2}\right)^{x} - 6 \le 0.$$

Сделаем замену $z = \left(\frac{5}{2}\right)^{x}$. Получаем: $z^2 - 5z - 6 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le z \le 6$.

Отсюда находим $\left(\frac{5}{2}\right)^{x} \le 6 \Leftrightarrow x \le \log_{2,5} 6$.

Ответ: $(-\infty;\ \log_{2,5} 6]$.

46. 46. Решите неравенство: $2 \cdot 25^x - 5^{x+1} + 2 \le 0$.

Решение.

Положим $t = 5^x$. Тогда неравенство принимает вид $2t^2 - 5t + 2 \le 0$, откуда $\frac{1}{2} \le t \le 2$. Таким образом, $2^{-1} \le 5^x \le 2 \Leftrightarrow -\log_5 2 \le x \le \log_5 2$.

Ответ: $[-\log_5 2;\ \log_5 2]$.

47. 47. Решите неравенство: $2 \cdot 3^{x+2} + 27 \cdot 3^{-x} \le 87$.

Решение.

Сделаем замену $y = 3^x$.

$$18y + \frac{27}{y} \le 87 \Leftrightarrow \frac{18y^2 - 87y + 27}{y} \le 0 \Leftrightarrow \frac{3(2y-9)(3y-1)}{y} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < 0, \\ \frac{1}{3} \le y \le \frac{9}{2}. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $3^x > 0$, получаем: $\frac{1}{3} \le 3^x \le \frac{9}{2}$, откуда находим решение неравенства: $-1 \le x \le 2 - \log_3 2$.

Ответ: $[-1;\ 2 - \log_3 2]$.

48. 48. Решите неравенство: $\frac{320 - 4^{-x-1}}{128 - 2^{-x}} \ge 2,5$.

Решение.

Сделаем замену $y = 2^{-x}$.

$$\frac{320 - 0,25y^2}{128 - y} \ge 2,5 \Leftrightarrow \frac{-0,25y^2 + 2,5y}{128 - y} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{0,25y(y-10)}{128 - y} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le y \le 10 \\ y > 128. \end{array}\right.$$

Тогда $0 \le 2^{-x} \le 10$ или $2^{-x} > 128$, откуда находим множество решений неравенства: $(-\infty, -7) \cup [-\log_2 10, +\infty)$.

Ответ: $(-\infty, -7) \cup [-\log_2 10, +\infty)$.

49. 49. Решите неравенство: $9^x - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x \le 0$.

Решение.

Разделим правую и левую части на 4^x :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 3 \le 0.$$

Сделаем замену $z = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$. Получаем: $z^2 - 2z - 3 \le \Leftrightarrow -1 \le z \le 3.$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} \le 3$, то есть $x \le \log_{1,5} 3.$

Ответ: $(-\infty;\ \log_{1,5} 3].$

50. 50. Решите неравенство: $16^x - 12^x - 2\cdot 9^x \le 0.$

Решение.

Разделим обе части на 9^x : $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{4}{3}\right)^{x} - 2 \le 0.$

Пусть $z = \left(\frac{4}{3}\right)^{x}$, имеем: $z^2 - z - 2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le z \le 2.$ Откуда, возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x} \le 2 \Leftrightarrow x \le \log_{\frac{4}{3}} 2.$$

Ответ: $(-\infty;\ \log_{\frac{4}{3}} 2].$

51. 51. Решите неравенство: $25^x + 3\cdot 10^x - 4\cdot 4^x > 0.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$25^x + 3\cdot 10^x - 4\cdot 4^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{25}{4}\right)^{x} + 3\left(\frac{5}{2}\right)^{x} - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{2}\right)^{x} > 1, \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{x} < -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 0.$$

Ответ: $(0;\ +\infty).$

52. 52. Решите неравенство: $3^x + 10\cdot 3^{3-x} \ge 37.$

Решение.

Решим первое неравенство системы.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t + \frac{270}{t} \ge 37 \Leftrightarrow \frac{t - 10(t-27)}{t} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < t \le 10, \\ t \ge 27. \end{array}\right.$$

При $0 < t \le 10$ получим:

$$0 < 3^x \le 10 \Leftrightarrow x \le \log_3 10.$$

При $t \ge 27$ получим:

$$3^x \ge 27 \Leftrightarrow x \ge 3.$$

Решение неравенства: $(-\infty;\ \log_3 10] \cup [3;\ +\infty).$

Ответ: $(-\infty;\ \log_3 10] \cup [3;\ +\infty).$

53. 53. Решите неравенство: $4^{x+\frac{3}{2}} - 33\cdot 2^{x-1} + 1 \le 0.$

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда первое неравенство запишется в виде:

$$16t^2 - 33t + 2 \le 0 \Leftrightarrow (16t-1)(t-2) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16} \le t \le 2.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим: $\frac{1}{16} \le 2^x \le 2 \Leftrightarrow -4 \le x \le 1$.

Ответ: $[-4;\ 1]$.

54. 54. Решите неравенство $25^x + 5^{x+1} + 5^{1-x} + \frac{1}{25^x} \le 12.$

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\left(25^x + \frac{1}{25^x}\right) + 5\left(5^x + \frac{1}{5^x}\right) \le 12$ и положим $5^x + \frac{1}{5^x} = t$. Тогда $25^x + \frac{1}{25^x} + 2 = t^2$ и, значит, $25^x + \frac{1}{25^x} = t^2 - 2.$

Таким образом, неравенство принимает вид:

$$t^2 + 5t - 14 \le 0 \Leftrightarrow -7 \le t \le 2, \text{ откуда } -7 \le 5^x + \frac{1}{5^x} \le 2 \Leftrightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

55. 55. Решите неравенство $\frac{11 - 5^{x+1}}{25^x - 5(35 \cdot 5^{x-2} - 2)} \ge 1,5.$

Решение.

Относительно $t = 5^x$ неравенство имеет вид:

$$\frac{11-5t}{t^2-7t+10} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2(11-5t)-3(t^2-7t+10)}{(t-2)(t-5)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-3t^2+11t-8}{(t-2)(t-5)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(8-3t)}{(t-2)(t-5)} \ge 0.$$

По методу интервалов, $1 \le t < 2$ или $\frac{8}{3} \le t < 5$.

Возвращаясь к x, получаем $0 \le x < \log_5 2,\ \log_5 \frac{8}{3} \le x < 1$.

Ответ: $[0; \log_5 2) \cup \left[\log_5 \frac{8}{3}; 1\right)$.

56. 56. Решите неравенство: $\frac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \ge 0,5.$

Решение.

Пусть $t = 3^x$, тогда:

$$\frac{13-5t}{t^2-12t+27} \ge 0,5 \Leftrightarrow \frac{t^2-2t+1}{t^2-12t+27} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{(t-3)(t-9)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ 3<t<9. \end{array}\right.$$

Тогда либо $3^x = 1$, откуда $x = 0$, либо $3 < t < 9$, откуда $1 < x < 2$.

Ответ: $\{0\} \cup (1;2)$.

57. 57. Решите неравенство $2^{2x-x^2-1} + \frac{1}{2^{2x-x^2} - 1} \le 2.$

Решение.

Получим:

$$2^{2x-x^2-1}+\frac{1}{2^{2x-x^2}-1}\le 2 \ \Leftrightarrow\ \frac{2^{2x-x^2}}{2}+\frac{1}{2^{2x-x^2}-1}-2\le 0.$$

Пусть $2^{2x-x^2}=t>0$. Тогда

$$\frac{t}{2}+\frac{1}{t-1}-2\le 0\Leftrightarrow\frac{t^2-t+2-4t+4}{2(t-1)}\le 0\Leftrightarrow\frac{t^2-5t+6}{t-1}\le 0\Leftrightarrow\frac{(t-2)(t-3)}{t-1}\le 0.$$

Полученное неравенство решим методом интервалов.

Интервалы	$(0;1)$	$(1;2)$	$(2;3)$	$(3;+\infty)$
Знак рационального выражения	$-$	$+$	$-$	$+$

Итак, $0<t<1,\ 2\le t\le 3$. Перейдем к переменной x.

$$0<2^{2x-x^2}<1\Leftrightarrow 2^{2x-x^2}<2^0\Leftrightarrow 2x-x^2<0\Leftrightarrow x^2-2x>0\Leftrightarrow x(x-2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0,\\ x>2.\end{array}\right.$$

$$2\le 2^{2x-x^2}\le 3\Leftrightarrow\begin{cases}2^{2x-x^2}\ge 1,\\ 2^{2x-x^2}\le 2^{\log_2 3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-x^2-1\ge 0,\\ 2x-x^2\le\log_2 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1\le 0,\\ x^2-2x+\log_2 3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2\le 0,\\ x^2-2x+\log_2 3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\ -1+\log_2 3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\ \log_2 3\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Таким образом, $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)\cup\{1\}$.

Ответ: $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)\cup\{1\}$.

58. 58. Решите неравенство $\dfrac{2}{7^x-7}\ge\dfrac{5}{7^x-4}$.

Решение.

Относительно $t=7^x$ неравенство имеет вид:

$$\frac{2}{t-7}\ge\frac{5}{t-4}\Leftrightarrow\frac{2(t-4)-5(t-7)}{(t-7)(t-4)}\ge 0\Leftrightarrow\frac{-3t+27}{(t-7)(t-4)}\ge 0\Leftrightarrow\frac{t-9}{(t-7)(t-4)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<4,\\ 7<t\le 9.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к x, получаем: $7^x<4\Leftrightarrow x<\log_7 4$ или $7<7^x\le 9\Leftrightarrow 1<x\le\log_7 9$.

Ответ: $(-\infty;\ \log_7 4)\cup(1;\ \log_7 9]$.

59. 59. Решите неравенство $\dfrac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2}-\dfrac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\ge 0$.

Решение.

Пусть $y = 2^{2-x^2} - 1$, тогда

$$\frac{3}{y^2} - \frac{4}{y} + 1 \geq 0.$$

Введём замену $t = \frac{1}{y}$, решим квадратное неравенство:

$$3t^2 - 4t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq \frac{1}{3}, \\ t \geq 1. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной y:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{y} \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3-y}{3y} \leq 0, \\ \frac{1-y}{y} \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < 0, \\ y \geq 3, \\ 0 < y \leq 1. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 2^{2-x^2} - 1 < 0, \\ 2^{2-x^2} - 1 \geq 3, \\ 0 < 2^{2-x^2} - 1 \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{2-x^2} < 1, \\ 2^{2-x^2} \geq 4, \\ 1 < 2^{2-x^2} \leq 2 \end{array}\right. \underset{2>1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 2-x^2 < 0, \\ 2-x^2 \geq 2, \\ 0 < 2-x^2 \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 > 2, \\ x^2 \leq 0, \\ 1 < x^2 < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\sqrt{2}, \\ x > \sqrt{2}, \\ x = 0, \\ 1 \leq x < \sqrt{2}, \\ -\sqrt{2} < x \leq -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2};\ -1] \cup \{0\} \cup [1;\ \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$.

60. 60. Решите неравенство $\frac{5^x}{5^x - 4} + \frac{5^x + 5}{5^x - 5} + \frac{22}{25^x - 9 \cdot 5^x + 20} \leq 0$.

Решение.

Обозначим 5^x за t. Получим $\frac{t}{t-4} + \frac{t+5}{t-5} + \frac{22}{t^2 - 9t + 20} \leq 0$.

$$\frac{t(t-5) + (t+5)(t-4) + 22}{(t-4)(t-5)} \leq 0,$$
$$\frac{2t^2 - 4t + 2}{(t-4)(t-5)} \leq 0,$$
$$\frac{(t-1)^2}{(t-4)(t-5)} \leq 0.$$

Используя метод интервалов, получаем $t \in \{1\} \cup (4;5)$.

$$5^x \in \{1\} \cup (4;5),$$
$$x \in \{0\} \cup (\log_5 4; 1).$$

Ответ: $x \in \{0\} \cup (\log_5 4; 1)$.

61. 61. Решите неравенство $\frac{2^{2x+1} - 96 \cdot 0,5^{2x+3} + 2}{x+1} \leq 0$.

Решение.

Рассмотрим отдельно числитель дроби:

$$2^{2x+1}-96\cdot 0,5^{2x+3}+2\le 0\Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x}-12\cdot\frac{1}{2^{2x}}+2\le 0\Leftrightarrow 2^{2x}-6\cdot\frac{1}{2^{2x}}+1\le 0.$$

Сделаем замену $y=2^{2x},\ y>0$:

$$y-\frac{6}{y}+1\le 0\underset{y>0}{\Leftrightarrow} y^2+y-6\le 0\Leftrightarrow (y+3)(y-2)\le 0\underset{y>0}{\Leftrightarrow} y-2\le 0.$$

Сделаем обратную замену: $2^{2x}-2\le 0\Leftrightarrow 2x-1\le 0$. Получаем

$$\frac{2^{2x+1}-96\cdot 0,5^{2x+3}+2}{x+1}\le 0\Leftrightarrow\frac{2x-1}{x+1}\le 0\Leftrightarrow -1<x\le 0,5.$$

Ответ: $(-1;\ 0,5]$.

62. 62. Решите неравенство $\dfrac{4^x-5\cdot 2^x+6}{1-3^{x-1}}\le 2\cdot 3^x-5\cdot 2^x+6.$

Решение.

Обозначим $2^x=a,\ 3^x=b$ и преобразуем неравенство

$$\frac{3(a^2-5a+6)}{3-b}\le 6-5a+2b,$$
$$\frac{3a^2-5ab+2b^2}{3-b}\le 0,$$
$$\frac{(3a-2b)(a-b)}{3-b}\le 0,$$
$$\frac{(2\cdot 3^x-3\cdot 2^x)(3^x-2^x)}{3^x-3}\ge 0,$$
$$\frac{(3^{x-1}-2^{x-1})(3^x-2^x)}{3^x-3}\ge 0.$$

Первый множитель числителя положителен при $x>1$ и отрицателен при $x<1$, как и знаменатель.

Второй множитель числителя положителен при $x>0$ и отрицателен при $x<0$. При $x=0$ он равен нулю.

Поэтому множество решений неравенства будет таким $x\in[0;1)\cup(1;\infty)$.

Ответ: $x\in[0;1)\cup(1;\infty)$.

63. 63. Решите неравенство $\dfrac{25^x-5^{x+2}+26}{5^x-1}+\dfrac{25^x-7\cdot 5^x+1}{5^x-7}\le 2\cdot 5^x-24.$

Решение.

Пусть $5^x=t>0$, тогда имеем:

$$\frac{t^2-25t+26}{t-1}+\frac{t^2-7t+1}{t-7}\le 2t-24\Leftrightarrow\frac{t(t-1)-24t+26}{t-1}+\frac{t(t-7)+1}{t-7}\le 2t-24\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t+\frac{-24(t-1)+2}{t-1}+t+\frac{1}{t-7}\le 2t-24\Leftrightarrow -24+\frac{2}{t-1}+\frac{1}{t-7}\le -24\Leftrightarrow\frac{2}{t-1}+\frac{1}{t-7}\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{2(t-7)+(t-1)}{(t-1)(t-7)}\le 0\Leftrightarrow\frac{3(t-5)}{(t-1)(t-7)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<1,\\ 5\le t<7.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l}5^x<1,\\ 5\le 5^x<7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0,\\ 1\le x<\log_5 7.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup[1;\ \log_5 7)$.

64. 64. Решите неравенство $8^x - 3\cdot 4^x + \dfrac{9\cdot 4^x - 288}{2^x - 9} \le 32.$

Решение.

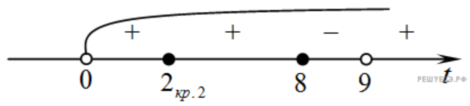
Пусть $2^x = t,\ t > 0$, тогда

$$t^3 - 3t^2 + \frac{9t^2 - 288}{t-9} \le 32 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + \frac{9t^2 - 288}{t-9} - 32 \le 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + \frac{9t^2 - 288 - 32t + 288}{t-9} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + \frac{9t^2 - 32t}{t-9} \le 0 \left(t^2 - 3t + \frac{9t-32}{t-9}\right) \le 0 \Leftrightarrow t\cdot\frac{t^3 - 3t^2 - 9t^2 + 27t + 9t - 32}{t-9} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t(t^3 - 12t^2 + 36t - 32)}{t-9} \le 0 \Leftrightarrow \frac{t(t^2(t-8) - 4t(t-8) + 4(t-8))}{t-9} \le 0 \Leftrightarrow \frac{t(t-2)^2(t-8)}{t-9} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ 8 \le t < 9. \end{array}\right.$$

Таким образом, $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ или $8 \le 2^x < 9 \Leftrightarrow 3 \le x < \log_2 9.$



Ответ: $\{1\} \cup [3;\ \log_2 9)$.

65. 65. Решите неравенство $3^x + \dfrac{2\cdot 3^{x+1}}{3^x - 3} + \dfrac{9^x + 26\cdot 3^x + 21}{9^x - 4\cdot 3^{x+1} + 27} \le 1.$

Решение.

Пусть $3^x = t$, тогда имеем

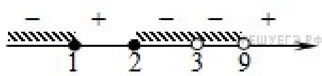
$$t + \frac{6t}{t-3} + \frac{t^2 + 26t + 21}{t^2 - 12t + 27} \le 1 \Leftrightarrow t + \frac{6t}{t-3} + \frac{t^2 + 26t + 21}{(t-3)(t-9)} \le 1 \Leftrightarrow t - 1 + \frac{6t(t-9) + t^2 + 26t + 21}{(t-3)(t-9)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6t^2 - 54t + t^2 + 26t + 21}{(t-3)(t-9)} + t - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{7t^2 - 28t + 21}{(t-3)(t-9)} + t - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{7(t^2 - 4t + 3)}{(t-3)(t-9)} + t - 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7(t-3)(t-1)}{(t-3)(t-9)} + t - 1 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7(t-1)}{t-9} + t - 1 \le 0, \\ t \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7t - 7 + (t-1)(t-9)}{t-9} \le 0, \\ t \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t-9} \le 0, \\ t \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(t-1)(t-2)}{t-9} \le 0, \\ t \ne 3. \end{cases}$$

Решим неравенство методом интервалов. Корни числителя $t = 1$ и $t = 2$. Корень знаменателя $t = 9$. (см. рис.)



Таким образом, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} t \le 1, \\ 2 \le t < 3, \\ 3 < t < 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x \le 1, \\ 2 \le 3^x < 3, \\ 3 < 3^x < 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ \log_3 2 \le x < 1, \\ 1 < x < 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [\log_3 2;\ 1) \cup (1;\ 2)$.

66. 66. Решите неравенство $\dfrac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10\cdot 9^x + 10\cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10\cdot 3^x + 3} \le 3^x + \dfrac{1}{3^x - 2} + \dfrac{1}{3^{x+1} - 1}.$

Решение.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{3t^3-10t^2+10t-5}{3t^2-10t+3} \le t+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t(3t^2-10t+3)}{3t^2-10t+3}+\frac{6t-2}{3t^2-10t+3}+\frac{t-3}{3t^2-10t+3} \le t+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t+\frac{2}{t-3}+\frac{1}{3t-1} \le t+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \frac{2}{t-3} \le \frac{1}{t-2}, \text{ где } t \ne \frac{1}{3};$$

$$\frac{t-1}{(t-2)(t-3)} \le 0, \text{ где } t \ne \frac{1}{3},$$

откуда $t < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} < t \le 1$; $2 < t < 3$.

При $t < \frac{1}{3}$ получим: $3^x < \frac{1}{3}$, откуда $x < -1$.

При $\frac{1}{3} < t \le 1$ получим: $\frac{1}{3} < 3^x \le 1$, откуда $-1 < x \le 0$.

При $2 < t < 3$ получим: $2 < 3^x < 3$, откуда $\log_3 2 < x < 1$.

Решение исходного неравенства: $x < -1$; $-1 < x \le 0$; $\log_3 2 < x < 1$.

Ответ: $(-\infty;\ -1)$; $(-1;\ 0]$; $(\log_3 2;\ 1)$.

67. 67. Решите неравенство $2^x + \frac{2^{x+2}}{2^x-4} + \frac{4^x+7\cdot 2^x+20}{4^x-3\cdot 2^{x+2}+32} \le 1$.

Решение.

Пусть $2^x = t$, тогда

$$t+\frac{4t}{t-4}+\frac{t^2+7t+20}{t^2-3\cdot 2^{x+2}+32} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t+\frac{4t}{t-4}+\frac{19t-12}{(t-4)(t-8)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{t(t-4)(t-8)+(t-4)(4t+3)}{(t-4)(t-8)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(t-1)(t-3)}{t-8} \le 0, \\ t \ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & t \le 1, \\ & 3 \le t < 4, \\ & 4 < t < 8 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x \le 0, \\ & \log_2 3 \le x < 2, \\ & 2 < x < 3. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [\log_2 3;\ 2) \cup (2;\ 3)$.

68. 68. Решите неравенство $\frac{25^x-5^{x+2}+26}{5^x-1} + \frac{25^x+7\cdot 5^x+1}{5^x-7} \le 2\cdot 5^x - 24$.

Решение.

Пусть $5^x = t$, тогда имеем:

$$\frac{t^2-25t+26}{t-1}+\frac{t^2+7t+1}{t-7}\le 2t-24 \Leftrightarrow \frac{t(t-1)-24t+26}{t-1}+\frac{t(t-7)+14t+1}{t-7}\le 2t-24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t-\frac{24t-26}{t-1}+t+\frac{14t+1}{t-7}\le 2t-24 \Leftrightarrow$$

$$24-\frac{24t-26}{t-1}+\frac{14t+1}{t-7}\le 0 \Leftrightarrow \frac{24t-24-24t+26}{t-1}+\frac{14t+1}{t-7}\le 0 \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow \frac{2}{t-1}+\frac{14t+1}{t-7}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2(t-7)+(14t+1)(t-1)}{(t-1)(t-7)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{14t^2-11t-15}{(t-1)(t-7)}\le 0 \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow \frac{14\left(t-\frac{3}{2}\right)\left(t+\frac{5}{7}\right)}{(t-1)(t-7)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{7}\le t<1, \\ \dfrac{3}{2}\le t<7. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{7}\le 5^x<1, \\ \dfrac{3}{2}\le 5^x<7 \end{array}\right. \underset{5^x>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 5^x<1, \\ \dfrac{3}{2}\le 5^x<7 \end{array}\right. \underset{5>1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x<0, \\ \log_5\dfrac{3}{2}\le x<\log_5 7. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup\left[\log_5\dfrac{3}{2};\ \log_5 7\right)$.

69. 69. Решите неравенство $125^x-25^x+\dfrac{4\cdot 25^x-20}{5^x-5}\le 4$.

Решение.

Пусть $t=5^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t^3-t^2+\frac{4t^2-20}{t-5}\le 4 \Leftrightarrow t^3-t^2+\frac{4t^2-4t}{t-5}\le 0 \Leftrightarrow (t^2-t)\left(t+\frac{4}{t-5}\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t(t-1)(t^2-5t+4)}{t-5}\le 0 \Leftrightarrow \frac{t(t-1)^2(t-4)}{t-5}\le 0,$$

откуда $t\le 0;\ t=1;\ 4\le t<5$.

При $t\le 0$ получим: $5^x\le 0$, решений нет.

При $t=1$ получим: $5^x=1$, откуда $x=0$.

При $4\le t<5$ получим: $4\le 5^x<5$, откуда $\log_5 4\le x<1$.

Решение исходного неравенства: $x=0;\ \log_5 4\le x<1$.

Ответ: $\{0\}\cup[\log_5 4;\ 1)$.

70. 70. Решите неравенство $9^{x-3}-9^{x-2}+9^{x-1}>511$.

Решение.

Решим неравенство:

$$9^{x-3}-9^{x-2}+9^{x-1}>511 \Leftrightarrow 9^{x-3}(1-9+81)>511 \Leftrightarrow 9^{x-3}>\frac{511}{73} \Leftrightarrow 9^{x-3}>7 \Leftrightarrow x-3>\log_9 7 \Leftrightarrow x>3+\log_9 7.$$

Ответ: $(3+\log_9 7;+\infty)$.

71. 71. Решите неравенство $2^x+3\cdot 2^{-x}\le 4$.

Решение.

Решим неравенство:

$$2^x+3\cdot 2^{-x}\le 4 \underset{2^x>0}{\Leftrightarrow} 2^{2x}+3-4\cdot 2^x\le 0 \Leftrightarrow 2^{2x}-4\cdot 2^x+3\le 0 \Leftrightarrow 1\le 2^x\le 3 \Leftrightarrow 0\le x\le \log_2 3.$$

Ответ: $[0;\ \log_2 3]$.

72. 72. Решите неравенство $\dfrac{5^{2x+1}-75\cdot 0,2^{2x}-10}{x+2}\le 0.$

Решение.

Имеем:

$$\frac{5^{2x+1}-75\cdot 0,2^{2x}-10}{x+2}\le 0;$$
$$\frac{5\cdot 25^x-\frac{75}{25^x}-10}{x+2}\le 0;$$
$$\frac{25^{2x}-2\cdot 25^x-15}{25^x(x+2)}\le 0;$$
$$\frac{(25^x-5)(25^x+3)}{x+2}\le 0;$$
$$\frac{25^x-5}{x+2}\le 0.$$

Решая неравенство, находим $x\in(-2;0,5]$.

Ответ: (−2; 0,5].

73. 73. Решите неравенство: $(9^x-2\cdot 3^x)^2-62(9^x-2\cdot 3^x)-63\ge 0.$

Решение.

Неравенство является квадратным относительно выражения в скобках:

$$(9^x-2\cdot 3^x)^2-62(9^x-2\cdot 3^x)-63\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9^x-2\cdot 3^x\ge 63,\\ 9^x-2\cdot 3^x\le -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9^x-2\cdot 3^x-63\ge 0,\\ (3^x-1)^2\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x\ge 9,\\ 3^x\le -7\ \text{(решений нет)},\\ 3^x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2,\\ x=0.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{0\}\cup[2;\infty)$.

74. 74. Решите неравенство: $9^x+3^{x+1}+3^{1-x}+\dfrac{1}{9^x}\le 8.$

Решение.

Положив $t=3^x>0$, получаем неравенство $t^2+3t+\dfrac{3}{t}+\dfrac{1}{t^2}\le 8$ или $\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}\right)+3\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\le 8.$ Пусть теперь $y=t+\dfrac{1}{t}>0$, тогда $t^2+\dfrac{1}{t^2}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-2=y^2-2$ и данное неравенство принимает вид $y^2+3y-10\le 0$. Решая последнее неравенство, находим $-5\le y\le 2$. Учитывая условие $y>0$, получаем $0<t+\dfrac{1}{t}\le 2$, откуда $t=1,\ 3^x=1,\ x=0.$

Ответ: 0.

75. 75. Решите неравенство: $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9}\ge\dfrac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}.$

Решение.

Пусть $3^x = t$, тогда:

$$\frac{t+9}{t-9}+\frac{t-9}{t+9}\geq\frac{12t+144}{t^2-81}\Leftrightarrow\frac{t^2+18t+81}{(t-9)(t+9)}+\frac{t^2-18t+81}{(t-9)(t+9)}-\frac{12t+144}{(t-9)(t+9)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2t^2-12t+18}{(t-9)(t+9)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-9,\\ t=3,\\ t>9.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}3^x<-9,\\ 3^x=3,\\ 3^x>9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x>2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{1\}\cup(2;\ +\infty)$.

76. 76. Решите неравенство: $\dfrac{2^x+8}{2^x-8}+\dfrac{2^x-8}{2^x+8}\geq\dfrac{2^{x+4}+96}{4^x-64}$.

Решение.

Пусть $2^x = t$, тогда:

$$\frac{t+8}{t-8}+\frac{t-8}{t+8}\geq\frac{16t+96}{t^2-64}\Leftrightarrow\frac{t^2+16t+64}{(t-8)(t+8)}+\frac{t^2-16t+64}{(t-8)(t+8)}-\frac{16t+96}{(t-8)(t+8)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2t^2-16t+32}{(t-8)(t+8)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2(t-4)^2}{(t-8)(t+8)}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-8,\\ t=4,\\ t>8.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}2^x<-8,\\ 2^x=4,\\ 2^x>8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x>3.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{2\}\cup(3;\ +\infty)$.

77. 77. Решите неравенство $\dfrac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1}\geq\dfrac{3}{8^x-1}+\dfrac{8}{64^x-5\cdot 8^x+4}$.

Решение.

Обозначим 8^x за t. Получим $\dfrac{t}{t-4} \geq \dfrac{3}{t-1} + \dfrac{8}{t^2-5t+4}$.

$$\frac{t(t-1)-(3)(t-4)-8}{(t-1)(t-4)} \geq 0,$$
$$\frac{t^2-4t+4}{(t-1)(t-4)} \geq 0,$$
$$\frac{(t-2)^2}{(t-1)(t-4)} \geq 0.$$

Используя метод интервалов, получаем $t \in (-\infty; 1) \cup \{2\} \cup (4;\ +\infty)$.

$$8^x \in (-\infty; 1) \cup \{2\} \cup (4;\ +\infty),$$
$$x \in (-\infty; 0) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left(\frac{2}{3}\ \ +\infty\right).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup \left\{\dfrac{1}{3}\right\} \cup \left(\dfrac{2}{3}\ \ +\infty\right)$.

78. 78. Решите неравенство: $\dfrac{8^{x+1}-40}{2\cdot 64^x - 32} \leq 1$.

Решение.

Пусть $t = 8^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{4t-20}{t^2-16} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{t^2-4t+4}{t^2-16} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-2)^2}{(t-4)(t+4)} \geq 0,$$

откуда $t < -4;\ t = 2;\ t > 4$.

При $t < -4$ получим $8^x < -4$, решений нет.

При $t = 2$ получим $8^x = 2$, откуда $x = \dfrac{1}{3}$.

При $t > 4$ получим $8^x > 4$, откуда $x > \dfrac{2}{3}$.

Решение исходного неравенства: $x = \dfrac{1}{3};\ x > \dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{3}\right\} \cup \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

79. 79. Решите неравенство: $\dfrac{3^x}{3^x-3} + \dfrac{3^x+1}{3^x-2} + \dfrac{5}{9^x - 5\cdot 3^x + 6} \leq 0$.

Решение.

Пусть $3^x = t$, тогда:

$$\frac{t}{t-3} + \frac{t+1}{t-2} + \frac{5}{t^2-5t+6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2-2t}{(t-3)(t-2)} + \frac{t^2-2t-3}{(t-3)(t-2)} + \frac{5}{(t-3)(t-2)} \leq 0$$
$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ 2 < t < 3. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x = 1, \\ 2 < 3^x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \log_3 2 < x < 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0\} \cup (\log_3 2;\ 1)$.

80. 80. Решите неравенство $9^{4x-x^2-1} - 36\cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0$.

Решение.

Пусть $t = 3^{4x-x^2-1}$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 36t + 243 \geq 0 \Leftrightarrow (t-9)(t-27) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 9, \\ t \geq 27. \end{array}\right.$$

При $t \leq 9$ получим:

$$3^{4x-x^2-1} \leq 9 \Leftrightarrow 4x - x^2 - 1 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x \geq 3. \end{array}\right.$$

При $t \geq 27$ получим:

$$3^{4x-x^2-1} \geq 27 \Leftrightarrow 4x - x^2 - 1 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Решение исходного неравенства: $x \leq 1;\ x = 2;\ x \geq 3.$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.

81. 81. Решите неравенство $\dfrac{1}{3^x - 1} + \dfrac{9^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x+3} + 3}{3^x - 9} \geq 3^{x+1}$.

Решение.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{t-1} + \frac{3t^2 - 27t + 3}{t-9} \geq 3t \Leftrightarrow \frac{1}{t-1} + \frac{3t(t-9)}{t-9} + \frac{3}{t-9} \geq 3t \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{t-1} + 3t + \frac{3}{t-9} \geq 3t \Leftrightarrow \frac{t-3}{(t-1)(t-9)} \geq 0,$$

откуда $1 < t \leq 3;\ t > 9$.

При $1 < t \leq 3$ получим: $1 < 3^x \leq 3$, откуда $0 < x \leq 1$.

При $t > 9$ получим: $3^x > 9$, откуда $x > 2$.

Ответ: $(0; 1] \cup (2; +\infty)$.

82. 82. Решите неравенство $4 \cdot 4^{x^2+2x-5} - 33 \cdot 2^{x^2+2x-5} + 8 \geq 0$.

Решение.

Пусть $t = 2^{x^2+2x-5}$, тогда неравенство примет вид:

$$4t^2 - 33t + 8 \geq 0;\ (4t-1)(t-8) \geq 0,$$

откуда $t \leq \dfrac{1}{4};\ t \geq 8$.

При $t \leq \dfrac{1}{4}$ получим: $2^{x^2+2x-5} \leq \dfrac{1}{4};\ x^2 + 2x - 5 \leq -2;\ x^2 + 2x - 3 \leq 0$, откуда $-3 \leq x \leq 1$.

При $t \geq 8$ получим: $2^{x^2+2x-5} \geq 8;\ x^2 + 2x - 5 \geq 3;\ x^2 + 2x - 8 \geq 0$, откуда $x \leq -4;\ x \geq 2$.

Решение исходного неравенства:

$$x \leq -4;\ -3 \leq x \leq 1;\ x \geq 2.$$

Ответ: $(-\infty; -4]; [-3; 1]; [2; +\infty)$.