Логарифмические неравенства

1. 1. Решите неравенство:

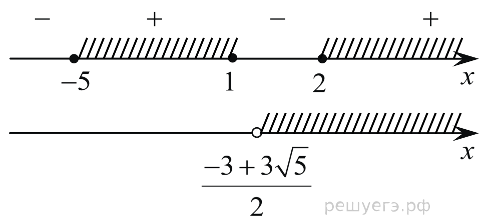
$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right).$$

Решение.

Решим неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3(x^3+3x^2+1-10x), \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-9 \le x^3+3x^2+1-10x, \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}, \\ x > \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}, \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+2x^2-13x+10 \ge 0, \\ x > \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 2.$$

Ответ: $[2;+\infty)$.

2. 2. Решите неравенство: $9\log_7(x^2+x-2) \le 10+\log_7\dfrac{(x-1)^9}{x+2}$.

Решение.

Найдём значения x, при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases} x^2+x-2>0, \\ \dfrac{(x-1)^9}{x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1)>0, \\ \dfrac{(x-1)^9}{x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>1. \end{array}\right.$$

Для таких x получаем:

$$9\log_7(x+2)(x-1)+\log_7\frac{x+2}{(x-1)^9} = \log_7\frac{(x+2)^9(x-1)^9(x+2)}{(x-1)^9} = \log_7(x+2)^{10}.$$

Тогда исходное неравенство примет вид: $\log_7(x+2)^{10} \le 10$. Учитывая, что неравенство определено на множестве $(-\infty;\,-2)\cup(1;\,+\infty)$, имеем:

$$5\log_7(x+2)^2 \le 10 \Leftrightarrow (x+2)^2 \le 7^2 \Leftrightarrow (x-5)(x+9) \le 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} -9 \le x < -2, \\ 1 < x \le 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-9;\,-2)\cup(1;\,5]$

3. 3. Решите неравенство: $\log_2(x^2-4)-3\log_2\dfrac{x+2}{x-2}>2$.

Решение.

Из неравенства следует, что либо $x>2$, либо $x<-2$. Если $x>2$, то неравенство принимает вид:

$$\log_2(x+2)+\log_2(x-2)-3\log_2(x+2)+3\log_2(x-2)>2 \Leftrightarrow \log_2(x+2)-2\log_2(x-2)<-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2 2(x+2)<\log_2(x-2)^2 \Leftrightarrow 2x+4<(x-2)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x>0 \Leftrightarrow x(x-6)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ x>6. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $x>2$, получаем: $x>6$.

Если $x<-2$, то неравенство принимает вид:

$$\log_2(-x-2)+\log_2(-x+2)-3\log_2(-x-2)+3\log_2(-x+2)>2 \Leftrightarrow \log_2(-x-2)-2\log_2(2-x)<-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2 2(-x-2)<\log_2(2-x)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2x-4<(2-x)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+8>0.$$

Полученное неравенство выполняется при всех x.

Таким образом, решение исходного неравенства: $(-\infty;\ -2)\cup(6;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup(6;\ +\infty)$.

4. 4. Решите неравенство: $\dfrac{\log_2 x-5}{1-2\log_2 x}\geq 2\log_2 x$.

Решение.

Пусть $y=\log_2 x$, получаем:

$$\frac{\log_2 x-5}{1-2\log_2 x}\geq 2\log_2 x \Leftrightarrow \frac{y-5}{1-2y}\geq 2y \Leftrightarrow \frac{4y^2-y-5}{2y-1}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(y+1)(4y-5)}{2y-1}\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\leq -1, \\ \dfrac{1}{2}<y\leq \dfrac{5}{4}. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x\leq -1, \\ 0,5<\log_2 x\leq 1,25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\leq \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{2}<x\leq \sqrt[4]{32}. \end{array}\right.$$

Таким образом, решение исходного неравенства $(0;\ 0,5]\cup(\sqrt{2};\ \sqrt[4]{32}]$.

Ответ: $(0;\ 0,5]\cup(\sqrt{2};\ \sqrt[4]{32}]$.

5. 5. Решите неравенство: $\log_3(x^2-x-3)+\log_3(2x^2+x-3)\geq \log_3(x^2-2)^2+2+\log_{\frac{1}{3}}4$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} \log_3(4(x^2-x-3)(2x^2+x-3)) \geq \log_3(3x^2-6)^2, \\ x^2-x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2-x-3)(2x^2+x-3) \geq (3x^2-6)^2, \\ x^2-x-3>0, \\ 3x^2-6 \neq 0. \end{cases}$$

Заметим, что $3x^2-6=(x^2-x-3)+(2x^2+x-3)$. Пусть $x^2-x-3=a$, $2x^2+x-3=b$. Тогда неравенство системы принимает вид:

$$4ab \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \leq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 0.$$

Данное неравенство выполняется только при $a=b$. Значит,

$$x^2-x-3=2x^2+x-3 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

С учётом ограничений из первой системы получаем, что $x=-2$

Ответ: -2.

6. 6. Решите неравенство: $\dfrac{\lg(5y^2-2y+1)}{\lg(4y^2-5y+1)^3} \leq \dfrac{\log_{5^3}7}{\log_5 7}$.

Решение.

Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{\lg(5y^2-2y+1)}{\lg(4y^2-5y+1)^3} \leq \frac{\log_{5^3}7}{\log_5 7} \Leftrightarrow \frac{\lg(5y^2-2y+1)}{3\lg(4y^2-5y+1)} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_{4y^2-5y+1}(5y^2-2y+1) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{4y^2-5y+1}\left(\frac{5y^2-2y+1}{4y^2-5y+1}\right) \leq 0.$$

Перейдём к системе:

$$\begin{cases} 4y^2-5y+1>0, \\ 4y^2-5y+1 \neq 1, \\ 5y^2-2y+1>0, \\ (4y^2-5y+1-1)\left(\dfrac{5y^2-2y+1}{4y^2-5y+1}-1\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4y-1)(y-1)>0, \\ y(4y-5) \neq 0, \\ (4y-5)(y+3) \leq 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $y<\dfrac{1}{4}$ или $y>1$. Из второго равенства получаем, что $y \neq 0$ и $y \neq \dfrac{5}{4}$. Решение третьего неравенства: $-3 \leq y \leq \dfrac{5}{4}$.

Таким образом, решением неравенства является множество $[-3;\ 0) \cup \left(0;\ \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(1;\ \dfrac{5}{4}\right)$.

Ответ: $[-3;\ 0) \cup \left(0;\ \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(1;\ \dfrac{5}{4}\right)$.

7. 7. Решите неравенство: $\dfrac{\ln(3y^2-2y+1)}{\ln(5y^2-6y+1)^5} \geq \dfrac{\log_{7^5}3}{\log_7 3}$.

Решение.

Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{\ln(3y^2-2y+1)}{\ln(5y^2-6y+1)^5} \geq \frac{\log_{7^5} 3}{\log_7 3} \Leftrightarrow \frac{\ln(3y^2-2y+1)}{5\ln(5y^2-6y+1)} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \log_{5y^2-6y+1}(3y^2-2y+1) \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{5y^2-6y+1}\left(\frac{3y^2-2y+1}{5y^2-6y+1}\right) \geq 0.$$

Применим к последнему неравенству метод рационализации:

$$\begin{cases} 5y^2-6y+1>0, \\ 5y^2-6y+1 \neq 1, \\ 3y^2-2y+1>0, \\ (5y^2-6y+1-1)\left(\dfrac{3y^2-2y+1}{5y^2-6y+1}-1\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5y-1)(y-1)>0, \\ y(5y-6) \neq 0, \\ (5y-6)(y-2) \leq 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $y<\frac{1}{5}$ или $y>1$.

Из второго равенства получаем, что $y \neq 0$ и $y \neq \frac{6}{5}$. Решение третьего неравенства: $\frac{6}{5} \leq y \leq 2$.

Таким образом, получаем, что решением неравенства является промежуток $\left(\frac{6}{5};\ 2\right]$.

Ответ: $\left(\frac{6}{5};\ 2\right]$.

8. 8. Решите неравенство: $\dfrac{\lg(3x+2\sqrt{x}-1)}{\lg(5x+3\sqrt{x}-2)^5} \geq \dfrac{\log_{32} 11}{\log_2 11}$.

Решение.

Сделаем замену $\sqrt{x} = y,\ y \geq 0$ и упростим левую и правую части: $\dfrac{\lg(3y^2+2y-1)}{\lg(5y^2+3y-2)} \geq 1.$

Учитывая, что $y \geq 0$, домножая на знаменатель, получаем два случая :

Первый случай (знаменатель положителен):

$$1 < 5y^2+3y-2 \leq 3y^2+2y-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2+3y-3>0, \\ 2y^2+y-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > \dfrac{\sqrt{69}-3}{10}, \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ решений нет.}$$

Второй случай (знаменатель отрицателен):

$$\begin{cases} 5y^2+3y-2<1, \\ 5y^2+3y-2 \geq 3y^2+2y-1, \\ 3y^2+2y-1>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2+3y-3<0, \\ 3y^2+2y-1>0, \\ 2y^2+y-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y < \dfrac{\sqrt{69}-3}{10}, \\ y > \dfrac{1}{3}, \\ y \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y < \frac{\sqrt{69}-3}{10}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt{x} < \frac{\sqrt{69}-3}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{39-3\sqrt{69}}{50}.$$

Ответ: $\left[0{,}25;\ \dfrac{39-3\sqrt{69}}{50}\right)$.

9. 9. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{11}(3x+2\sqrt{x+1}+2)}{\log_{11}(5x+3\sqrt{x+1}+3)^3} \geq \dfrac{\log_{27}11}{\log_3 11}.$

Решение.

Сделаем замену $\sqrt{x+1}=y,\ y\geq 0$ и упростим левую и правую части: $\dfrac{\log_{11}(3y^2+2y-1)}{\log_{11}(5y^2+3y-2)}\geq 1.$

Учитывая, что $y\geq 0$, получаем:

$$1<5y^2+3y-2\leq 3y^2+2y-1 \text{ или } \begin{cases}5y^2+3y-2<1,\\ 5y^2+3y-2\geq 3y^2+2y-1,\\ 3y^2+2y-1>0.\end{cases}$$

Первый случай:

$$\begin{cases}5y^2+3y-3>0,\\ 2y^2+y-1\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y>\dfrac{\sqrt{69}-3}{10},\\ 0\leq y\leq \dfrac{1}{2}\end{cases} \text{ решений нет.}$$

Второй случай:

$$\begin{cases}5y^2+3y-3<0,\\ 3y^2+2y-1>0,\\ 2y^2+y-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\leq y<\dfrac{\sqrt{69}-3}{10},\\ y>\dfrac{1}{3},\\ y\geq \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq y<\frac{\sqrt{69}-3}{10}.$$

Тогда $\dfrac{1}{4}\leq x+1<\dfrac{39-3\sqrt{69}}{50}$, откуда $-\dfrac{3}{4}\leq x<\dfrac{-11-3\sqrt{69}}{50}$.

Ответ: $\left[-0,75;\ \dfrac{-11-3\sqrt{69}}{50}\right)$.

10. 10. Решите неравенство: $x^2\log_{16}x\geq \log_{16}x^5+x\log_2 x$.

Решение.

Перенесём все члены в левую часть и умножим на 4:

$$x^2\log_2 x-4x\log_2 x-5\log_2 x\geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2-4x-5\right)\log_2 x\geq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1)\log_2 x\geq 0.$$

Заметим, что $x>0$, поэтому $x+1>0$. Получаем: $(x-5)\log_2 x\geq 0$. Решение неравенства: $0<x\leq 1$ или $x\geq 5$.

Ответ: $(0;\ 1]\cup[5;\ +\infty)$.

11. 11. Решите неравенство: $x^2\log_{25}x\geq \log_{25}x^3+x\log_5 x$.

Решение.

Перенесём все члены в правую часть и умножим на 2:

$$x^2\log_5 x-3\log_5 x-2x\log_5 x\geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x-3\right)\log_5 x\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)\log_5 x\geq 0.$$

Заметим, что $x>0$, поэтому $x+1>0$. Получаем $(x-3)\log_5 x\geq 0$. Решение неравенства: $0<x\leq 1$ или $x\geq 3$.

Ответ: $(0;\ 1]\cup[3;\ +\infty)$.

12. 12. Решите неравенство: $\log_2^2 x+6>5\log_2 x$.

Решение.

Решение неравенства ищем при условии $x>0$. Последовательно получаем:

$$\log_2^2 x-5\log_2 x+6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x>3,\\ \log_2 x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>8,\\ 0<x<4.\end{array}\right.$$

Ответ: $(0;\ 4)\cup(8;\ +\infty)$.

13. 13. Решите неравенство: $\log_2^2 x+5\log_2 x+6>0$.

Решение.

Решение неравенства ищем при условии $x>0$. Получаем:

$$\log_2^2 x+5\log_2 x+6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x<-3,\\ \log_2 x>-2.\end{array}\right.$$

Значит, $0<x<\dfrac{1}{8}$ или $x>\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{8}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4};\ +\infty\right)$.

14. 14. Решите неравенство: $2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}\le 256$.

Решение.

Область определения неравенства задается условием $x>0$. На множестве $(0;\ +\infty)$ имеем:

$$2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}\le 256 \Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x}+\left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x}\le 256 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{\log_2^2 x}\le 256 \Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x}\le 2^7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2^2 x\le 7 \Leftrightarrow -\sqrt{7}\le \log_2 x\le \sqrt{7} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{7}}\le x\le 2^{\sqrt{7}}.$$

Ответ: $[2^{-\sqrt{7}};\ 2^{\sqrt{7}}]$.

15. 15. Решите неравенство: $2\log_2\dfrac{x+2}{x-3,7}+\log_2(x-3,7)^2\ge 2$.

Решение.

Первое слагаемое определено при $\dfrac{x+2}{x-3,7}>0$, то есть при $x<-2$ или $x>3,7$. На этих лучах, преобразуем неравенство:

$$\log_2\frac{(x+2)^2}{(x-3,7)^2}+\log_2(x-3,7)^2\ge 2 \Leftrightarrow \log_2(x+2)^2\ge 2 \Leftrightarrow (x+2)^2\ge 4 \Leftrightarrow x(x+4)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -4,\\ x\ge 0.\end{array}\right.$$

Решение неравенства: $x\le -4$ или $x>3,7$.

Ответ: $(-\infty;\ -4]\cup(3,7;\ +\infty)$.

16. 16. Решите неравенство: $\log_3(x^2-x-2)\le 1+\log_3\dfrac{x+1}{x-2}$.

Решение.

Имеем:

$$\log_3((x+1)(x-2)) - \log_3\frac{x+1}{x-2} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\dfrac{(x+1)(x-2)^2}{x+1} \le 1, \\ (x+1)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-2)^2 \le 1, \\ (x+1)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \le 3, \\ (x+1)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} \le x-2 \le \sqrt{3}, \\ (x+1)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \le 2+\sqrt{3}.$$

Ответ: $(2;\ 2+\sqrt{3}]$.

17. 17. Решите неравенство: $2\log_2\dfrac{x-1}{x+1,3} + \log_2(x+1,3)^2 \ge 2$.

Решение.

Первое слагаемое определено при $\dfrac{x-1}{x+1,3} > 0$, второе — при $x \ne -1,3$, поэтому область определения неравенства $x \in (-\infty; -1,3) \cup (1; +\infty)$. При этих значениях переменной имеем:

$$\log_2\frac{(x-1)^2}{(x+1,3)^2} + \log_2(x+1,3)^2 \ge 2 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \ge 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 4 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 3. \end{array}\right.$$

Учитывая область определения, получаем решение неравенства: $x < -1,3$ или $x \ge 3$.

Ответ: $(-\infty;\ -1,3) \cup [3;\ +\infty)$.

18. 18. Решите неравенство: $\log_2^2(-\log_2 x) + \log_2\log_2^2 x \le 3$.

Решение.

Из условия следует, что $-\log_2 x > 0$ и поэтому

$$\log_2\log_2^2 x = \log_2(\log_2 x)^2 = 2\log_2(-\log_2 x).$$

Пусть $\log_2(-\log_2 x) = z$. Решим неравенство:

$$z^2 + 2z \le 3 \Leftrightarrow (z-1)(z+3) \le 0 \Leftrightarrow -3 \le z \le 1.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$-3 \le \log_2(-\log_2 x) \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le -\log_2 x \le 2 \Leftrightarrow -2 \le \log_2 x \le -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{2}}.$$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$.

19. 19. Решите неравенство: $\log_{0,5}^2(-\log_3 x) - \log_{0,5}\log_3^2 x \le 3$.

Решение.

Из условия следует, что $-\log_3 x > 0$ и поэтому

$$\log_{0,5}\log_3^2 x = -2\log_2(-\log_3 x).$$

Пусть $\log_2(-\log_3 x) = z$. Решим неравенство:

$$z^2 + 2z \le 3 \Leftrightarrow (z-1)(z+3) \le 0 \Leftrightarrow -3 \le z \le 1.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$-3 \le \log_2(-\log_3 x) \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le -\log_3 x \le 2 \Leftrightarrow -2 \le \log_3 x \le -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{9} \le x \le \frac{1}{\sqrt[8]{3}}$$

Ответ: $\left[\frac{1}{9};\ \frac{1}{\sqrt[8]{3}}\right]$.

20. 20. Решите неравенство: $\log_3^2 x + 2 > 3\log_3 x$.

Решение.

Решим неравенство как квадратное относительно $\log_3 x$:

$$\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x < 1,\\ \log_3 x > 2.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < x < 3,\\ x > 9.\end{array}\right.$$

Решение неравенства: $(0;\ 3) \cup (9;\ +\infty)$.

Ответ: $(0;\ 3) \cup (9;\ +\infty)$.

21. 21. Решите неравенство: $\log_2^2 x + 6 \ge 5\log_2 x$.

Решение.

Решим неравенство как квадратное относительно $\log_2 x$:

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \ge 0.$$

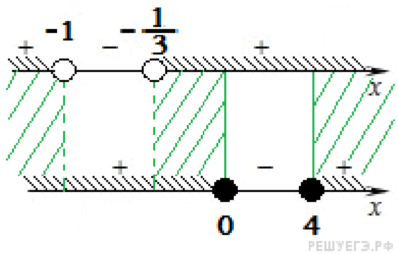
Получаем: $\log_2 x \le 2$ или $\log_2 x \ge 3$. Следовательно, $0 < x \le 4$ или $x \ge 8$.

Ответ: $(0;\ 4] \cup [8;\ +\infty)$.

22. 22. Решите неравенство: $2\log_9\left(4x^2+1\right) \ge \log_3\left(3x^2+4x+1\right)$.

Решение.

Используя формулу $\log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_a b$, получаем:



$$2\log_9(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow \log_3(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+1>0, \\ 3x^2+4x+1>0, \\ 4x^2+1 \geq 3x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1)>0, \\ x(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ -\frac{1}{3}<x \leq 0, \\ x \geq 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -1) \cup \left(-\frac{1}{3};\ 0\right] \cup [4;\ +\infty)$.

23. 23. Решите неравенство $\log_5^2 \frac{(x-4)^2 \cdot (x-3)}{48} > \log_{0,2}^2 \frac{x-3}{3}$.

Решение.

Так как $\log_{0.2}^2 \dfrac{x-3}{3} = \left(-\log_5 \dfrac{x-3}{3}\right)^2$, то данное неравенство можно записать в виде:

$$\log_5^2 \frac{(x-4)^2 \cdot (x-3)}{48} - \log_5^2 \frac{x-3}{3} > 0.$$

Воспользовавшись формулой разности квадратов и преобразуя выражение $\log_5 \dfrac{(x-4)^2 \cdot (x-3)}{48} \pm \log_5 \dfrac{x-3}{3}$, по формулам суммы и разности логарифмов, получаем, что данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$(1) \quad \begin{cases} x-3>0, \\ \log_5 \dfrac{(x-4)^2}{16} < 0, \\ \log_5 \dfrac{(x-4)^2 \cdot (x-3)^2}{144} < 0 \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} x-3>0, \\ \log_5 \dfrac{(x-4)^2}{16} > 0, \\ \log_5 \dfrac{(x-4)^2 \cdot (x-3)^2}{144} > 0. \end{cases}$$

Решим систему (1), произведя её равносильные преобразования:

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x \neq 4, \\ \left(\dfrac{x-4}{4}\right)^2 < 1, \\ \left(\dfrac{x^2-7x+12}{12}\right)^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x \neq 4, \\ \left(\dfrac{x-4}{4}-1\right) \cdot \left(\dfrac{x-4}{4}+1\right) < 0, \\ \left(\dfrac{x^2-7x+12}{12}-1\right) \cdot \left(\dfrac{x^2-7x+12}{12}+1\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x>3, \\ x \neq 4, \\ (x-8)x<0, \\ \left(x^2-7x\right)\left(x^2-7x+24\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x \neq 4 \\ (x-8)x<0, \\ (x-7)x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<x<7, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Из приведённых выкладок легко усмотреть, что преобразовывая аналогичным образом систему (2), приходим к равносильной системе:

$$\begin{cases} x>3, \\ x \neq 4, \\ (x-8)x>0, \\ (x-7)x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>8.$$

Объединяя множества решений (1), (2), получаем решение исходного неравенства: $(3;\ 4) \cup (4;\ 7) \cup (8;\ +\infty)$

Ответ: $(3;\ 4) \cup (4;\ 7) \cup (8;\ +\infty)$.

24. 24. Решите неравенство $\lg^2 \dfrac{(x+2)^2(x+5)}{5} < \lg^2 \dfrac{x+5}{20}$.

Решение.

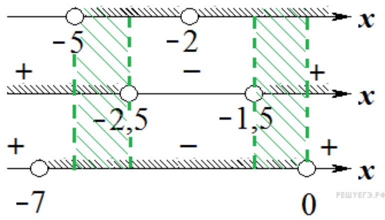
Данное неравенство можно записать в виде:

$$\lg^2\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}-\lg^2\frac{x+5}{20}<0.$$

Воспользовавшись формулой разности квадратов и преобразуя выражение $\lg\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}\pm\lg\frac{x+5}{20}$ по формулам суммы и разности логарифмов, получаем, что данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+5>0 \\ \lg\frac{(x+2)^2(x+5)^2}{100}<0, \\ \lg\left(4(x+2)^2\right)>0. \end{cases} (1) \qquad \begin{cases} x+5>0, \\ \lg\frac{(x+2)^2(x+5)^2}{100}>0, \\ \lg\left(4(x+2)^2\right)<0. \end{cases} (2)$$

Решим систему (1), произведя её равносильные преобразования:

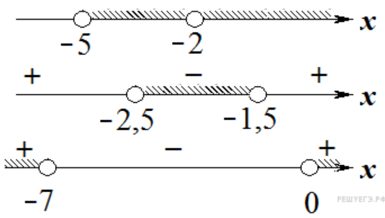


$$\begin{cases} x+5>0, \\ x\neq-2, \\ (2(x+2))^2>1, \\ \left(\frac{x^2+7x+10}{10}\right)^2<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5, \\ x\neq-2, \\ (2x+4-1)(2x+4+1)>0, \\ \left(\frac{x^2+7x+10}{10}-1\right)\left(\frac{x^2+7x+10}{10}+1\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-5,\ x\neq-2, \\ (2x+3)(2x+5)>0, \\ (x^2+7x)(x^2+7x+20)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5,\ x\neq-2, \\ (2x+3)(2x+5)>0, \\ x(x+7)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &-5<x<-2,5, \\ &-1,5<x<0. \end{aligned}\right.$$

Из приведённых выкладок легко усмотреть, что преобразовываннная аналогичным образом система (2), равносильна системе

$$\begin{cases} x>-5,\ x\neq-2, \\ (2x+3)(2x+5)<0, \\ (x+7)x>0, \end{cases}$$



которая не имеет решений. Таким образом, ответ: $(-5;\ -2,5)\cup(-1,5;\ 0)$.

Ответ: $(-5;\ -2,5)\cup(-1,5;\ 0)$.

25. 25. Решите неравенство $\log_5^2(25-x^2)-3\log_5(25-x^2)+2\geq 0.$

Решение.

Обозначая $t=\log_5(25-x^2)$, получаем квадратное неравенство $t^2-3t+2\ge 0$, откуда $t\le 1$ или $t\ge 2$. Тогда имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\log_5(25-x^2)\le 1,\\ \log_5(25-x^2)\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<25-x^2\le 5,\\ 25-x^2\ge 25\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}20\le x^2<25,\\ x^2\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-5<x\le-\sqrt{20},\\ \sqrt{20}\le x<5,\\ x=0.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-5;-\sqrt{20}]\cup\{0\}\cup[\sqrt{20};5)$.

26. 26. Решите неравенство $\dfrac{5\lg^2x-1}{\lg^2x-1}\ge 1$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{5\lg^2x-1}{\lg^2x-1}\ge 1\Leftrightarrow\frac{5\lg^2x-1}{\lg^2x-1}-1\ge 0\Leftrightarrow\frac{4\lg^2x}{\lg^2x-1}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lg x<-1,\\ \lg x=0,\\ \lg x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<\dfrac{1}{10},\\ x=1,\\ x>10.\end{array}\right.$$

27. 27. Решите неравенство $\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10>0$.

Решение.

Найдем ОДЗ: $4+3x-x^2>0\Leftrightarrow x^2-3x-4<0\Leftrightarrow(x-4)(x+1)<0\Leftrightarrow -1<x<4$.

$$\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10>0\Leftrightarrow\log_2^2(4+3x-x^2)-7\log_2(4+3x-x^2)+10>0.$$

Пусть $\log_2(4+3x-x^2)=t$, тогда $t^2-7t+10>0\left[\begin{array}{l}t>5,\\ t<2.\end{array}\right.$

Переходим к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(4+3x-x^2)>5,\\ \log_2(4+3x-x^2)<2\end{array}\right.\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}4+3x-x^2>32,\\ 4+3x-x^2<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+28<0,\\ x^2-3x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow x^2-3x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<0.\end{array}\right.$$

Неравенство $x^2-3x+28<0$ — решений не имеет, т. к. $x^2-3x+28>0$.

Учитывая ОДЗ, получаем:

$$\left\{\begin{array}{l}-1<x<4,\\ \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0,\\ 3<x<4.\end{array}\right.\text{ или } x\in(-1;0)\cup(3;4).$$

Ответ: $(-1;0)\cup(3;4)$.

28. 28. Решите неравенство $\log_{x+1}(x-1)\cdot\log_{x+1}(x+2)\le 0$.

Решение.

Определим область допустимых значений:

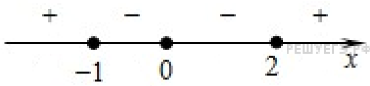
$$\begin{cases} x-1>0, \\ x+2>0, \\ x+1>0, \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x>-2, \\ x>-1, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x>1$$

Решаем с помощью метода декомпозиции, то есть представляем логарифм в виде

$$\log_{a(x)} f(x) \to (a(x)-1)(f(x)-1),$$

получим неравенство:

$$(x+1-1)(x-1-1)(x+1-1)(x+2-1)\leq 0 \Leftrightarrow x(x-2)x(x+1)\leq 0 \Leftrightarrow x^2(x-2)(x+1)\leq 0,$$



откуда $-1\leq x\leq 2$.

С учётом ОДЗ получаем ответ:
$1<x\leq 2$

Ответ: $x \in (1;\ 2]$.

29. 29. Решите неравенство $(\log_2(x+4,2)+2)(\log_2(x+4,2)-3)\geq 0$.

Решение.

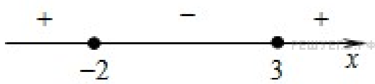
Определим область допустимых значений: $x+4,2>0 \Leftrightarrow x>-4,2$.

Произведём замену: $\log_2(x+4,2)=t$, получим неравенство $(t+2)(t-3)\geq 0$, откуда $t\leq -2$ и $t\geq 3$. Соответственно

$$\log_2(x+4,2)\leq -2 \text{ и } \log_2(x+4,2)\geq 3.$$

Решим полученные неравенства:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(x+4,2)\leq \log_2 0,25, \\ \log_2(x+4,2)\geq \log_2 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x+4,2\leq 0,25, \\ x+4,2\geq 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4,2<x\leq -3,95, \\ x\geq 3,8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(-4,2;\ -3,95], \\ x\in[3,8;\ +\infty). \end{array}\right.$$



Ответ: $x \in (-4,2; -3,95] \cup [3,8; +\infty)$.

30. 30. Решите неравенство $\log_2(x^2+4x)+\log_{0,5}\dfrac{x}{4}+2\geq \log_2(x^2+3x-4)$.

Решение.

Неравенство имеет смысл при

$$\begin{cases} x^2+4x>0, \\ x>0, \\ x^2+3x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+4)>0, \\ x>0, \\ (x-1)(x+4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Для таких x получаем:

$$\log_2(x(x+4))-\log_2\frac{x}{4}+2\geq\log_2((x-1)(x+4))\Leftrightarrow\log_2 x+\log_2(x+4)-\log_2 x+4\geq\log_2(x-1)+\log_2(x+4)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_2(x-1)\leq 4\Leftrightarrow x-1\leq 16\Leftrightarrow x\leq 17.$$

Значит, $1<x\leq 17$.

Ответ: $(1;\ 17]$.

31. 31. Решите неравенство $3\log_{11}(x^2+8x-9)\leq 4+\log_{11}\frac{(x-1)^3}{x+9}$.

Решение.

Найдём значения x, при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases} x^2+8x-9>0, \\ \dfrac{(x-1)^3}{x+9}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x-1)>0, \\ \dfrac{(x-1)^3}{x+9}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-9, \\ x>1. \end{array}\right.$$

Для таких x получаем:

$$3\log_{11}(x+9)(x-1)+\log_{11}\frac{x+9}{(x-1)^3}=\log_{11}\frac{(x+9)^3(x-1)^3(x+9)}{(x-1)^3}=\log_{11}(x+9)^4.$$

Тогда исходное неравенство примет вид: $\log_{11}(x+9)^4\leq 4$. Учитывая, что неравенство определено на множестве $(-\infty,\,-9)\cup(1,\,+\infty)$, имеем:

$$2\log_{11}(x+9)^2\leq 4\Leftrightarrow(x+9)^2\leq 11^2\Leftrightarrow(x-2)(x+20)\leq 0\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l} -20\leq x<-9, \\ 1<x\leq 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-20;\ -9)\cup(1;\ 2]$.

32. 32. Решите неравенство $\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}}4\geq\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}}(5-2^x)$.

Решение.

Заметим, что $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}>1$, поскольку равносильны следующие неравенства

$$5-\sqrt{2}<\sqrt{13}\Leftrightarrow 27-10\sqrt{2}<13\Leftrightarrow 14<10\sqrt{2}\Leftrightarrow 49<50.$$

С учётом этого имеем

$$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}}4\geq\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}}(5-2^x)\Leftrightarrow 4\geq 5-2^x>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2^x\geq 1, \\ 2^x<5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq 0, \\ x<\log_2 5. \end{cases}$$

Ответ: $[0;\ \log_2 5)$.

33. 33. Решите неравенство $(3x+7)\cdot\log_{2x+5}(x^2+4x+5)\geq 0$.

Решение.

Найдём область определения уравнения:

$$\begin{cases} 2x+5>0, \quad 2x+5\neq 1 \\ x^2+4x+5>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2,5, \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Применим теорему о знаке логарифма: знак $\log_a b$ на ОДЗ совпадает со знаком произведения $(a-1)(b-1)$. Имеем:

$$(3x+7)\log_{2x+5}(x^2+4x+5)\geq 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (3x+7)(2x+4)(x^2+4x+4)\geq 0 \Leftrightarrow 2(3x+7)(x+2)^3\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -\frac{7}{3}, \\ x\geq -2. \end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ получаем: $-\frac{5}{2}<x\leq -\frac{7}{3}$ или $x>-2$.

Ответ: $\left(-\frac{5}{2};-\frac{7}{3}\right]\cup(-2;+\infty)$.

Приведём другое решение.

Заметим, что аргумент логарифма не меньше 1: $x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$ при любых значениях x. Значит, логарифм положителен, если его основание больше 1, т. е. при $x>-2$, и отрицателен, если его основание меньше 1, если $-2,5<x<-2$.

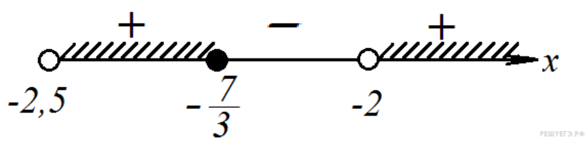
При $x>-2$ выражение $3x+7$ положительно, а при $-2,5<x<-2$ исходное неравенство равносильно неравенству $3x+7\leq 0$, откуда $x\leq -\frac{7}{3}$.

Таким образом, решение исходного неравенства:

$$-\frac{5}{2}<x\leq -\frac{7}{3} \quad \text{или} \quad x>-2.$$

Приведём решение методом интервалов.

Найдем область определения уравнения, значения переменной, при котором множители обращаются в 0, и значения переменной, при котором основание логарифма равно 1. Нанесем найденные значения на числовую ось и расставим знаки на промежутках между ними с учетом ОДЗ.



Это и даст ответ.

34. 34. Решите неравенство $(5x-13)\cdot\log_{2x-5}(x^2-6x+10)\geq 0$.

Решение.

Заметим, что $x^2-6x+10=(x-3)^2+1\geq 1$, то есть аргумент логарифма не меньше 1 при любых значениях x. Значит, выражение $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)$ положительно при $x>3$, отрицательно при $\dfrac{5}{2}<x<3$ и не определено при $x\leq\dfrac{5}{2}$ и $x=3$.

При $x>3$ выражение $5x-13$ положительно, а при $\dfrac{5}{2}<x<3$ исходное неравенство равносильно неравенству $5x-13\leq 0$, откуда $x\leq\dfrac{13}{5}$.

Таким образом, решение исходного неравенства:

$$\frac{5}{2}<x\leq\frac{13}{5}\quad\text{или}\quad x>3.$$

Ответ: $\left(\dfrac{5}{2};\ \dfrac{13}{5}\right]\cup(3;\ +\infty)$.

35. 35. Решите неравенство $\lg^4 x-4\lg^3 x+5\lg^2 x-2\lg x\geq 0$.

Решение.

Пусть $t=\lg x$, тогда неравенство примет вид:

$$t^4-4t^3+5t^2-2t\geq 0\Leftrightarrow t(t-1)^2(t-2)\geq 0,$$

откуда $t\leq 0,\ t=1,\ t\geq 2$.

При $t\leq 0$ получим: $\lg x\leq 0$, откуда $0<x\leq 1$.

При $t=1$ получим: $\lg x=1$, откуда $x=10$.

При $t\geq 2$ получим: $\lg x\geq 2$, откуда $x\geq 100$.

Решение исходного неравенства: $0<x\leq 1,\ x=10,\ x\geq 100$.

Ответ: $(0;\ 1]\cup\{10\}\cup[100;\ +\infty)$.

36. 36. Решите неравенство $(\log_2^2 x-2\log_2 x)^2<11\log_2^2 x-22\log_2 x-24$.

Решение.

Пусть $t=\log_2 x$, тогда неравенство примет вид:

$$(t^2-2t)^2-11(t^2-2t)+24<0\Leftrightarrow(t^2-2t-3)(t^2-2t-8)<0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(t-3)(t+1)(t-4)(t+2)<0,$$

откуда $-2<t<-1,\ 3<t<4$.

При $-2<t<-1$ получим: $-2<\log_2 x<-1$, откуда $\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}$.

При $3<t<4$ получим: $3<\log_2 x<4$, откуда $8<x<16$.

Решите исходного неравенства: $\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2},\ 8<x<16$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2}\right)\cup(8;\ 16)$.

37. 37. Решите неравенство $2\log_{(x^2-8x+17)^2}(3x^2+5)\leq\log_{x^2-8x+17}(2x^2+7x+5)$.

Решение.

Основание логарифма равно 1 при $x = 4$, и больше 1 при прочих значениях переменной. Поэтому:

$$\log_{(x-4)^2+1}(3x^2+5) \le \log_{(x-4)^2+1}(2x^2+7x+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 4, \\ 0 < 3x^2+5 \le 2x^2+7x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 4, \\ x(x-7) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x < 4, \\ 4 < x \le 7. \end{array}\right.$$

Ответ: $[0;4) \cup (4;7]$.

38. 38. Решите неравенство $\log_{5-x} \dfrac{x+2}{(x-5)^4} \ge -4$.

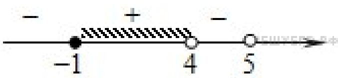
Решение.

Решим неравенство преобразовывая и применяя метод рационализации:

$$\log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \ge -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) - \log_{5-x}(x-5)^4 \ge -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) - 4\log_{5-x}(5-x) \ge -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) - 4 \ge -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) \ge 0 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) \ge \log_{5-x} 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5-x-1)(x+2-1) \ge 0, \\ 5-x > 0, \\ 5-x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-x)(x+1) \ge 0, \\ x < 5, \\ x \ne 4 \end{cases} \underset{\text{см.рис.}}{\Leftrightarrow} -1 \le x < 4.$$



Ответ: $[-1;\ 4)$.

39. 39. Решите неравенство $1 + \log_6(4-x) \le \log_6(16-x^2)$.

Решение.

Решим неравенство:

$$1 + \log_6(4-x) \le \log_6(16-x^2) \Leftrightarrow \log_6(24-6x) \le \log_6(16-x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24-6x > 0, \\ 16-x^2 \ge 24-6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x^2-6x+8 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ 2 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x < 4.$$

Ответ: $[2;\ 4)$.

40. 40. Решите неравенство $\log_3{}^2(25-x^2) - 3\log_3(25-x^2) + 2 \ge 0$.

Решение.

Пусть $t = \log_3(25-x^2)$, тогда $t^2 - 3t + 2 \ge 0$, откуда $t \le 1$ или $t \ge 2$. Далее имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(25-x^2) \le 1, \\ \log_3(25-x^2) \ge 2 \end{array}\right. \underset{3>1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 25-x^2 > 0, \\ 25-x^2 \le 3, \end{cases} \\ 25-x^2 \ge 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 25-x^2 > 0, \\ 22-x^2 \le 0, \end{cases} \\ 16-x^2 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5 < x \le -\sqrt{22}, \\ -4 \le x \le 4, \\ \sqrt{22} \le x < 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-5; -\sqrt{22}] \cup [-4;\ 4] \cup [\sqrt{22};\ 5)$.

41. 41. Решите неравенство $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \dfrac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \ge \dfrac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$.

Решение.

Пусть $t=\log_4 x$, решим рациональное неравенство:

$$\frac{t+3}{t-3}+\frac{t-3}{t+3}\geq\frac{4t+16}{t^2-9}\Leftrightarrow\frac{t^2+6t+9}{(t-3)(t+3)}+\frac{t^2-6t+9}{(t-3)(t+3)}-\frac{4t+16}{(t-3)(t+3)}\geq 0$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}\Leftrightarrow\frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-3,\\ t=1,\\ t>3.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной, получим: $0<x<\frac{1}{64},\ x=4,\ x>64.$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\{4\}\cup(64;+\infty).$

42. 42. Решите неравенство $\dfrac{\log_4(16x^4)+11}{\log_4^2 x-9}\geq -1.$

Решение.

Преобразуем неравенство, используя свойства логарифма:

$$\frac{\log_4(16x^4)+11}{\log_4^2 x-9}\geq -1\Leftrightarrow\frac{\log_4 16+\log_4(x^4)+11}{\log_4^2 x-9}\geq -1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4\log_4 x+13}{\log_4^2 x-9}+1\geq 0\ \Leftrightarrow\frac{\log_4^2 x+4\log_4 x+4}{\log_4^2 x-9}\geq 0\ .$$

Пусть $\log_4 x$ = t, тогда:

$$\frac{(t+2)^2}{(t-3)(t+3)}\geq 0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-3,\\ t=-2,\\ t>3.\end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной, получим:

$$\left[\begin{array}{l}\log_4 x<-3,\\ \log_4 x=-2,\\ \log_4 x>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<\dfrac{1}{64},\\ x=\dfrac{1}{16},\\ x>64.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{64}\right)\cup\left\{\frac{1}{16}\right\}\cup(64;\ +\infty).$

43. 43. Решите неравенство $\dfrac{\log_3(9x)-13}{\log_3^2 x+\log_3 x^4}\leq 1.$

Решение.

Преобразуем неравенство, используя свойство логарифма:

$$\frac{\log_3(9x)-13}{\log_3^2 x+\log_3 x^4}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_3 9+\log_3 x-13}{\log_3^2 x+4\log_3 x}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_3 x-11}{\log_3^2 x+4\log_3 x}-1\leq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x+3\log_3 x+11}{\log_3^2 x+4\log_3 x}\geq 0.$$

Пусть $\log_3 x$ = t, тогда:

$$\frac{t^2+3t+11}{t(t+4)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t(t+4)}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>0, \\ t<-4. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x>0, \\ \log_3 x<-4 \end{array}\right. \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x>1, \\ 0<x<\dfrac{1}{81}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{81}\right)\cup(1;\ +\infty)$.

44. 44. Решите неравенство $\dfrac{\log_6(36x)-1}{\log_6^2 x-\log_6 x^3}\geq 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство, используя свойство логарифма:

$$\frac{\log_6(36x)-1}{\log_6^2 x-\log_6 x^3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_6 36+\log_6 x-1}{\log_6^2 x-3\log_6 x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_6 x+1}{\log_6^2 x-3\log_6 x}\geq 0.$$

Пусть $\log_6 x$ = t, тогда:

$$\frac{t+1}{t(t-3)}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\leq t<0, \\ t>3. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной, получим:

$$\left[\begin{array}{l} -1\leq \log_6 x<0, \\ \log_6 x>3 \end{array}\right. \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{6}\leq x<1, \\ x>216. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{6};1\right)\cup(216;\ +\infty)$.

45. 45. Решите неравенство $\dfrac{(\log_4 x+2)^2}{\log_4^2 x-9}\geq 0.$

Решение.

Пусть $t=\log_4 x$, решим рациональное неравенство:

$$\frac{(t+2)^2}{t^2-9}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t+2)^2}{(t-3)(t+3)}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-3, \\ t=-2, \\ t>3. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной, получим: $0<x<\dfrac{1}{64},\ x=\dfrac{1}{16},\ x>64.$

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right)\cup\{\dfrac{1}{16}\}\cup(64;+\infty)$.

46. 46. Решите неравенство $1+\dfrac{10}{\log_2 x-5}+\dfrac{16}{\log_2^2 x-\log_2(32x^{10})+30}\geq 0.$

Решение.

Пусть $t=\log_2 x$, решим рациональное неравенство:

$$1+\frac{10}{t-5}+\frac{16}{t^2-(10t+5)+30}\geq 0\Leftrightarrow 1+\frac{10}{t-5}+\frac{16}{t^2-10t+25}\geq 0$$

$$\frac{(t-5)^2+10(t-5)+16}{(t-5)^2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{t^2-9}{(t-5)^2}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\leq -3,\\ 3\leq t<5,\\ t>5.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной, получим: $0<x\leq\dfrac{1}{8},\ 8\leq x<32,\ x>32.$

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{8}\right]\cup[8;32)\cup(32;+\infty).$

47. 47. Решите неравенство $\dfrac{\log_3 x}{\log_3\left(\frac{x}{27}\right)}\geq\dfrac{2}{\log_3 x}+\dfrac{5}{\log_3^2 x-\log_3 x^3}.$

Решение.

Пусть $t=\log_3 x$, решим рациональное неравенство:

$$\frac{t}{t-3}\geq\frac{2}{t}+\frac{5}{t^2-3t}\Leftrightarrow\frac{t\cdot t-2(t-3)-5}{t(t-3)}\geq 0$$

$$\frac{t^2-2t+1}{t(t-3)}\Leftrightarrow\frac{(t-1)^2}{t(t-3)}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<0,\\ t=1,\\ t>3.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной, получим: $0<x<1,\ x=3,\ x>27.$

Ответ: $(0;1)\cup\{3\}\cup(27;+\infty).$

48. 48. Решите неравенство $\dfrac{\log_5(5x-27)}{\log_5(x-5)}\geq 1.$

Решение.

Знаменатель левой части неравенства определён при $5<x<6$ и $x>6$.

При $5<x<6$ знаменатель левой части неравенства отрицателен и неравенство принимает вид:

$$\log_5(5x-27)\leq\log_5(x-5);\ 0<5x-27\leq x-5,$$

откуда $\dfrac{27}{5}<x\leq\dfrac{11}{2}.$

При $x>6$ знаменатель левой части неравенства положителен и неравенство принимает вид:

$$\log_5(5x-27)\geq\log_5(x-5);\ 5x-27\geq x-5,$$

откуда $x\geq\dfrac{11}{2}$. В этом случае решение неравенства: $x>6$.

Таким образом, решение исходного неравенства:

$$\frac{27}{5}<x\leq\frac{11}{2};\ x>6.$$

Ответ: $\left(\dfrac{27}{5};\dfrac{11}{2}\right];\ (6;+\infty).$