

Неравенства с логарифмами по переменному основанию

1. 1. Решите неравенство: $\left| \log_x \frac{x}{4} \right| \cdot \log_{4x}(2x^2) \leq \left| \log_x \frac{x}{4} \right|$.

Решение.

Областью определения неравенства являются положительные числа, отличные от 0,25 и 1.

Выражение $\left| \log_x \frac{x}{4} \right|$ либо равно нулю при $x = 4$, при этом неравенство верно; либо положительно, и тогда на него можно разделить, не меняя знака неравенства. Имеем:

$$\log_{4x}(2x^2) \leq 1 \Leftrightarrow \log_{4x}(2x^2) \leq \log_{4x} 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,25, \\ (4x-1)(2x^2-4x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,25, \\ (4x-1)(x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \leq 2.$$

Учитывая, что $x \neq 1$, получаем ответ: $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 2] \cup \{4\}$.

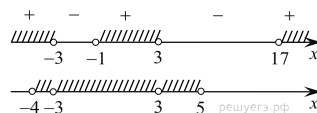
Ответ: $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 2] \cup \{4\}$.

2. 2. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$.

Решение.

Решим неравенство:

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} - \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{25-x^2}{16} > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{25-x^2}{16} - 1\right) \left(\frac{24+2x-x^2}{14} - \frac{25-x^2}{16}\right) > 0, \\ 25-x > 0, \quad 24+2x-x^2 > 0, \\ \frac{25-x^2}{16} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{9-x^2}{16}\right) \left(\frac{-x^2+16x+17}{112}\right) > 0, \\ -5 < x < 5, \\ -4 < x < 6, \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-9)(x^2-16x-17) > 0, \\ -4 < x < 5, \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -3, \\ -1 < x < 3. \end{cases}$$

Ответ: $(-4; -3) \cup (-1; 3)$.

3. 3. Решите неравенство $\frac{\log_2(2x) \cdot \log_{0,5x} 2}{\log_{0,125x} 8} \leq 1$.

Решение.

Левая часть неравенства имеет смысл при $x > 0$, $0,5x \neq 1$ и $0,125x \neq 1$, то есть при $x > 0$, $x \neq 2$ и $x \neq 8$. При этих условиях получаем:

$$\frac{\log_2(2x) \cdot \frac{1}{\log_2(0,5x)}}{\frac{3}{\log_2(0,125x)}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(\log_2 2 + \log_2 x)(\log_2 0,125 + \log_2 x)}{\log_2 0,5 + \log_2 x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 3)}{\log_2 x - 1} \leq 3.$$

Сделаем замену $y = \log_2 x$, тогда

$$\frac{(y+1)(y-3)}{y-1} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{y(y-5)}{y-1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0, \\ 1 < y \leq 5. \end{cases} t$$

Откуда $0 < x \leq 1$ или $2 < x \leq 32$. Из полученного набора нужно ещё исключить точку 8.

Получаем ответ: $(0; 1] \cup (2; 8) \cup (8; 32]$.

Ответ: $(0; 1] \cup (2; 8) \cup (8; 32]$.

4. 4. Решите неравенство $\frac{\log_2(8x) \cdot \log_{0,125x} 2}{\log_{0,5x} 16} \leq \frac{1}{4}$.

Решение.

Левая часть неравенства имеет смысл при $x > 0$, $0,5x \neq 1$ и $0,125x \neq 1$, то есть при $x > 0$, $x \neq 2$ и $x \neq 8$. При этих условиях получаем:

$$\frac{\log_2(8x) \cdot \frac{1}{\log_2(0,125x)}}{\frac{4}{\log_2(0,5x)}} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{(\log_2 8 + \log_2 x)(\log_2 0,5 + \log_2 x)}{\log_2 0,125 + \log_2 x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(\log_2 x + 3)(\log_2 x - 1)}{\log_2 x - 3} \leq 1.$$

Сделаем замену $t = \log_2 x$, тогда

$$\frac{(t+3)(t-1)}{t-3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{t(t+1)}{t-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1, \\ 0 \leq t < 3. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$\begin{cases} 0 < x \leq 0,5, \\ 1 \leq x < 8. \end{cases}$$

Из полученного набора нужно ещё исключить точку 2. Таким образом, множество решений исходного неравенства: $(0; 0,5] \cup [1; 2) \cup (2; 8)$.

Ответ: $(0; 0,5] \cup [1; 2) \cup (2; 8)$.

5. 5. Решите неравенство $\log_{6x^2-5x+1} 2 > \log_{\sqrt{6x^2-5x+1}} 2$.

Решение.

Пусть $a = 6x^2 - 5x + 1$, тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{\log_2 a} > \frac{1}{\log_2 \sqrt{a}} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 a} > \frac{2}{\log_2 a}$$

Значит, $\log_2 a < 0$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 < 1, \\ 6x^2 - 5x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(6x-5) < 0, \\ (2x-1)(3x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$.

6. 6. Решите неравенство $\log_{x^2+x} (x^2 - 2x + 1) \leq 1$.

Решение.

1) Если $x^2 + x > 1$, то

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ 0 < x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ x \neq 1, \\ 3x \geq 1, \end{cases}$$

$$\text{откуда } \frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1 \text{ или } x > 1.$$

2) Если $0 < x^2 + x < 1$, то

$$\begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x - 1 < 0, \\ x^2 - 2x + 1 \geq x^2 + x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) > 0, \\ x^2 + x - 1 < 0, \\ 3x \leq 1, \end{cases}$$

$$\text{откуда } \frac{-\sqrt{5}-1}{2} < x < -1 \text{ или } 0 < x \leq \frac{1}{3}.$$

Объединяя найденные промежутки, получаем решение неравенства:

$$\frac{-\sqrt{5}-1}{2} < x < -1 \text{ или } 0 < x \leq \frac{1}{3} \text{ или } \frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1 \text{ или } x > 1.$$

Ответ: $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}; -1\right), \left(0; \frac{1}{3}\right], \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1\right), (1; +\infty)$.

7.

7.

Решите

неравенство

$$\log_2^2(3x-1) + \log_{3x-1}^2 2 - \log_2(3x-1)^2 - \log_{3x-1} 4 + 2 \leq 0$$

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\log_2^2(3x-1) + \frac{1}{\log_2^2(3x-1)}\right) - 2\left(\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)}\right) + 2 \leq 0.$$

Пусть $\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)} = t$, тогда

$$\log_2^2(3x-1) + \frac{1}{\log_2^2(3x-1)} + 2 = t^2 \quad \text{и,} \quad \text{следовательно,}$$

$$\log_2^2(3x-1) + \frac{1}{\log_2^2(3x-1)} = t^2 - 2.$$

Далее имеем: $t^2 - 2t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2$, откуда

$$0 \leq \log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)} \leq 2 \Leftrightarrow \log_2(3x-1) = 1 \Leftrightarrow 3x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

Замечание: Нетрудно заметить, что полученный корень удовлетворяет ОДЗ.

8. 8. Решите неравенство: $(x-1)\log_{x+3}(x+2) \cdot \log_3(x+3)^2 \leq 0$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов.

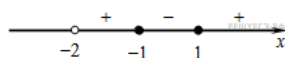
Найдём ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ x+2 > 0, \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2.$$

Найдём корни:

Из первого множителя $x = 1$, из второго $x = -1$, третий не дает корней.

Определим знаки левой части на ОДЗ (см. рис.):



Тем самым, множество решений неравенства: $[-1; 1]$.

Приведём другое решение.

Найдём сначала область определения неравенства:

$$\begin{cases} x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ x+2 > 0, \\ (x+3)^2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x \neq -2, \\ x > -2, \\ x \neq -3. \end{cases} \Leftrightarrow x > -2.$$

Далее заметим, что на области определения знак множителя $\log_{x+3}(x+2)$ совпадает со знаком выражения $(x+2)(x+1)$. Знак множителя $\log_3(x+3)^2$ совпадает со знаком выражения $((x+3)^2 - 1)$, которое на области определения неравенства всегда положительно.

Таким образом, на области определения исходное неравенство равносильно неравенству

$$(x-1)(x+2)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Учитывая область определения, получим

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Ответ: $[-1; 1]$.

9. 9. Решите неравенство: $\log_{x+1}(2x-5) + \log_{2x-5}(x+1) \leq 2$.

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\log_{x+1}(2x-5) + \frac{1}{\log_{x+1}(2x-5)} \leq 2.$$

Сделаем замену $y = \log_{x+1}(2x-5)$:

$$y + \frac{1}{y} \leq 2; \frac{(y-1)^2}{y} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Если $\log_{x+1}(2x-5) = 1$, то

$$\begin{cases} x+1 = 2x-5, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Если $\log_{x+1}(2x-5) < 0$, то

$$\begin{cases} \frac{2x-5-1}{x+1-1} < 0, \\ x+1 > 0, \\ 2x-5 > 0, \\ x+1 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x} < 0, \\ x > \frac{5}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < 3.$$

Решение первого неравенства: $\frac{5}{2} < x < 3$ или $x = 6$.

Приведём другое решение.

Найдём область определения неравенства:

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ 2x-5 > 0, \\ 2x-5 \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,5 < x < 3, \\ x > 3. \end{cases}$$

Воспользуемся свойством логарифма, получим:

$$\log_{x+1}(2x-5) + \frac{1}{\log_{x+1}(2x-5)} \leq 2.$$

Сделаем замену $t = \log_{x+1}(2x-5)$, тогда

$$t + \frac{1}{t} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $\log_{x+1}(2x-5) = 1$. На области определения оно равносильно уравнению $2x-5 = x+1$, то есть $x = 6$. Это решение входит в область определения.

Рассмотрим неравенство $\log_{x+1}(2x-5) < 0$. На области определения оно равносильно неравенству

$$(2x-5-1)(x+1-1) < 0 \Leftrightarrow 3(x-3)x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3.$$

Учитывая область определения, получим $2,5 < x < 3$.

Ответ: $\left(\frac{5}{2}; 3\right) \cup \{6\}$.

10. 10. Решите неравенство: $\log_2 16x \geq \log_{0,5x} 2 \cdot \log_4 16x^4$.

Решение.

Сделаем замену $z = \log_2 x$.

$$z + 4 \geq \frac{2z + 2}{z - 1} \Leftrightarrow \frac{z^2 + z - 6}{z - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq z < 1, \\ z \geq 2. \end{cases}$$

Тогда $-3 \leq \log_2 x < 1$ или $\log_2 x \geq 2$, откуда находим решение неравенства:

$$\left[\frac{1}{8}; 2\right) \cup [4; +\infty).$$

ОТВЕТ: $\left[\frac{1}{8}; 2\right) \cup [4; +\infty).$

11. 11. Решите неравенство: $\log_{\log_x 2x}(9x - 4) \geq 0$.

Решение.

Область допустимых значений неравенства задается соотношениями:

$$\begin{cases} \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \neq 1, \\ 9x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-1) > 0, \\ x \neq 0, \\ x > \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{9} < x < \frac{1}{2}, \\ x > 1. \end{cases}$$

На области допустимых значений справедливы равносильности:

$$\begin{aligned} \log_a b \geq 0 &\Leftrightarrow (a-1)(b-1) \geq 0, \\ \log_a b - \log_a c \geq 0 &\Leftrightarrow (a-1)(b-c) \geq 0, \\ a^b - a^c \geq 0 &\Leftrightarrow (a-1)(b-c) \geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому на ОДЗ имеем:

$$\log_{\log_x 2x}(9x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow (\log_x 2x - 1)(9x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow (\log_x 2x - \log_x x)(9x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(9x-5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{5}{9}, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ получаем: $\left(\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$

ОТВЕТ: $\left(\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$

12. 12. Решите неравенство: $\log_{\log_x 2x}(6x - 2) \geq 0$.

Решение.

Область допустимых значений неравенства задается соотношениями:

$$\begin{cases} \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \neq 1, \\ 6x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}, \\ x > 1. \end{cases}$$

На области допустимых значений справедливы равносильности:

$$\log_a b \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b-1}{a-1} \geq 0, \log_a b - \log_a c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b-c}{a-1} \geq 0, a^b - a^c \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-c) \geq 0.$$

Поэтому на ОДЗ имеем:

$$\log_{\log_x 2x}(6x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x - 3}{\log_x 2x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3(2x - 1)}{\log_x 2x - \log_x x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 1}{\frac{x}{x-1}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2x-1)(x-1)}{x} \geq 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ x > 1. \end{cases}$$

С учетом ОДЗ получаем ответ.

ОТВЕТ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$

13. 13. Решите неравенство: $\log_{x^2}(x+1)^2 \leq 1$.

Решение.

Первый способ:

Рассмотрим два случая. Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(x+1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 2x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $x < -1$.Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(x+1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq x^2 \Leftrightarrow 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ или $0 < x < 1$.Множество решений неравенства системы: $(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 1)$.Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 1)$.

Второй способ:

$$\log_{x^2}(x+1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+1)^2}{\lg x^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+1)^2 - \lg x^2}{\lg x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2 - 1} \leq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Приведём другое решение.Перепишем правую часть неравенства: $\log_{x^2}(x+1)^2 \leq \log_{x^2} x^2$.

Воспользуемся методом рационализации:

$$\begin{cases} (x^2-1)((x+1)^2-x^2) \leq 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \\ (x+1)^2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)(x+1-x)(x+1+x) \leq 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1, \\ x \neq -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

14. 14. Решите неравенство: $\log_{x^2}(x-1)^2 \leq 1$.**Решение.**Рассмотрим два случая. Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $x > 1$.Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq x^2 \Leftrightarrow 2x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем $(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$.Решение неравенства: $(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$.Ответ: $(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$.**15. 15.** Решите неравенство: $\log_{\frac{x}{3}}(3x^2-2x+1) \geq 0$.**Решение.**Заметим, что $3x^2-2x+1 > 0$ при всех x . При условиях $x > 0$ и $x \neq 3$ методом рационализации получаем неравенство

$$\frac{3x^2-2x+1-1}{\frac{x}{3}-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(3x-2)}{x-3} \geq 0.$$

С учётом указанных условий получаем ответ: $0 < x \leq \frac{2}{3}$ или $x > 3$.Ответ: $\left(0; \frac{2}{3}\right] \cup (3; +\infty)$.**16. 16.** Решите неравенство: $\log_{\frac{x}{2}}(4x^2-3x+1) \geq 0$.

Решение.

Выражение $4x^2 - 3x + 1 > 0$ при всех x . При условиях $x > 0$ и $x \neq 2$ исходное неравенство эквивалентно

$$\frac{4x^2 - 3x + 1 - 1}{\frac{x}{2} - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(4x - 3)}{x - 2} \geq 0.$$

При указанных условиях множество решений неравенства: $\left(0; \frac{3}{4}\right] \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $\left(0; \frac{3}{4}\right] \cup (2; +\infty)$.

17. 17. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(3x^2 - 2x + 1) \geq 0$.

Решение.

Решим второе неравенство. Заметим, что $3x^2 - 2x + 1 > 0$ при всех x . При условиях $x > 0$ и $x \neq 3$ получаем неравенство:

$$\left(\frac{x}{3} - 1\right)(3x^2 - 2x + 1 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 3)(3x - 2) \geq 0.$$

При указанных условиях получаем: $0 < x \leq \frac{2}{3}$ или $x > 3$.

Ответ: $\left(0; \frac{2}{3}\right] \cup (3; +\infty)$.

18. 18. Решите неравенство: $\log_{x^2}(x + 2) \leq 1$.

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(x + 2) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x + 2 \leq x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(x - 2) \geq 0, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq -1, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $-2 < x < -1$ или $x \geq 2$.

Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(x + 2) \leq 1 \Leftrightarrow x + 2 \geq x^2 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем: $-1 < x < 0$ или $0 < x < 1$.

Множество решений исходного неравенства: $(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup [2; +\infty)$.

19. 19. Решите неравенство: $\log_{x^2}(2 - x) \leq 1$.

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(2 - x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 2 - x \leq x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0, \\ 2 - x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)(x - 1) \geq 0, \\ x < 2. \end{cases}$$

Откуда, учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $x \leq -2$ или $1 < x < 2$.

Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(2 - x) \leq 1 \Leftrightarrow 2 - x \geq x^2 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем: $-1 < x < 0$ или $0 < x < 1$.

Множество решений второго неравенства: $(-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.

Приведём другое решение.

Перепишем правую часть неравенства: $\log_{x^2}(2 - x) \leq \log_{x^2} x^2$.

Воспользуемся методом рационализации:

$$\begin{cases} (x^2 - 1)(2 - x - x^2) \leq 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \\ 2 - x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2(x + 1)(x + 2) \geq 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1, \\ x < 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ -1 < x < 0, \\ 0 < x < 1, \\ 1 < x < 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.

20. 20. Решите неравенство: $\log_{2x} 0,25 \leq \log_2 32x - 1$.

Решение.

Заметим, что в ОДЗ данного неравенства входят все положительные числа за исключением $\frac{1}{2}$.
Преобразуем неравенство:

$$\frac{1}{\log_{0,25} 2x} \leq \log_2 32x - 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{\log_2 x + 1} \leq \log_2 x + 4.$$

Сделаем замену $z = \log_2 x$.

$$-\frac{2}{z+1} \leq z+4 \Leftrightarrow \frac{z^2+5z+6}{z+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(z+2)(z+3)}{z+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq z \leq -2, \\ z > -1 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} -3 \leq \log_2 x \leq -2, \\ \log_2 x > -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

21. 21. Решите неравенство: $\log_{2x} 0,25 \geq \log_2 32x - 1$.

Решение.

Заметим, что в ОДЗ данного неравенства входят все положительные числа за исключением $\frac{1}{2}$.
Преобразуем неравенство:

$$\frac{1}{\log_{0,25} 2x} \geq \log_2 32x - 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{\log_2 x + 1} \geq \log_2 x + 4.$$

Сделаем замену $z = \log_2 x$; имеем:

$$-\frac{2}{z+1} \geq z+4 \Leftrightarrow \frac{z^2+5z+6}{z+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(z+2)(z+3)}{z+1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z \leq -3 \\ -2 \leq z < -1. \end{cases}$$

Тогда $\log_2 x \leq -3$ или $-2 \leq \log_2 x < -1$, откуда получаем множество решений
неравенства: $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

22. 22. Решите неравенство: $\log_{x^2} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \leq 0$.

Решение.

Преобразуем неравенство: $\log_{x^2} \frac{x+2}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \log_{x^2} (x+2) \leq 1$.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2} (x+2) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x+2 \leq x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) \geq 0, \\ x+2 > 0. \end{cases}$$

Откуда, учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $-2 < x < -1$ или $x \geq 2$.

Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2} (x+2) \leq 1 \Leftrightarrow x+2 \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Итак, учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем: $-1 < x < 0$ или $0 < x < 1$.

Множество решений неравенства: $(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup [2; +\infty)$.

Приведём другое решение.

Заметим, что исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{x^2} \frac{x+2}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \log_{x^2} (x+2) - \log_{x^2} x^2 \leq 0.$$

Применим метод рационализации к неравенству $\log_{x^2} (x+2) \leq \log_{x^2} x^2$:

$$\log_{x^2} (x+2) \leq \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-1)(x+2-x^2) \leq 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \\ x+2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)^2(2-x) \leq 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1, \\ x > -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1, \\ -1 < x < 0, \\ 0 < x < 1, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup [2; +\infty)$.

23. 23. Решите неравенство: $\log_{x^2} \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \leq 0$.

Решение.

Преобразуем неравенство: $\log_{x^2} \frac{2-x}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \log_{x^2} (2-x) \leq 1$.

Рассмотрим два случая.

а) $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2} (2-x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 2-x \leq x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 \geq 0, \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1) \geq 0, \\ x < 2. \end{cases}$$

Откуда, учитывая условие $x^2 > 1$, находим: $x \leq -2$ или $1 < x < 2$.

б) $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2} (2-x) \leq 1 \Leftrightarrow 2-x \geq x^2 \Leftrightarrow x^2+x-2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем: $-1 < x < 0$ или $0 < x < 1$.

Множество решений неравенства: $(-\infty, -2] \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$.

Ответ: $(-\infty, -2] \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$.

24. 24. Решите неравенство: $\frac{\log_{x+3}(x^2-x+30)}{\log_{x+3}(x^2-x-1)} \geq \frac{\lg(x^4-2x^3+x^2)}{\lg(x^2-x-1)}$.

Решение.

В левой части перейдём к другому основанию:

$$\frac{\lg(x^2-x+30) \cdot \lg(x+3)}{\lg(x+3) \cdot \lg(x^2-x-1)} \geq \frac{\lg(x^4-2x^3+x^2)}{\lg(x^2-x-1)}.$$

Заметим, что при $x > -3$ и $x \neq -2$ неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{\lg(x^2-x+30)}{\lg(x^2-x-1)} \geq \frac{\lg(x^4-2x^3+x^2)}{\lg(x^2-x-1)}.$$

Положив в последнем неравенстве $y = x^2 - x$, получаем:

$$\frac{\lg(y+30)}{\lg(y-1)} \geq \frac{\lg y^2}{\lg(y-1)} \Leftrightarrow \frac{\lg y^2 - \lg(y+30)}{\lg(y-1) - \lg 1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2-y-30}{y-2} \leq 0, \\ y > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(y-6)(y+5)}{y-2} \leq 0, \\ y > 1. \end{cases} \Leftrightarrow 2 < y \leq 6.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} x^2-x > 2, \\ x^2-x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2 > 0, \\ x^2-x-6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x < -1, \\ x > 2. \end{bmatrix} \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < -1, \\ 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Учитывая то, что $x \neq -2$, получаем множество решений неравенства: $(-2; -1) \cup (2; 3]$.

Ответ: $(-2; -1) \cup (2; 3]$.

Примечание.

Поясним переход от логарифма по основанию $x+3$ к десятичному логарифму. Заметим, что при $x > -3$, $x \neq -2$ можно произвести следующие преобразования:

$$\frac{\log_{x+3}(x^2-x+30)}{\log_{x+3}(x^2-x-1)} = \log_{x^2-x-1}(x^2-x+30) = \frac{\lg(x^2-x+30)}{\lg(x^2-x-1)}.$$

25. 25. Решите неравенство: $\frac{\log_{x+5}(x^2+2x+56)}{\log_{x+5}(x^2+2x-2)} \geq \frac{\log_2(x^4+4x^3+4x^2)}{\log_2(x^2+2x-2)}$.

Решение.

Заметим, что при $x > -5$ и $x \neq -4$ исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{\log_2(x^2 + 2x + 56)}{\log_2(x^2 + 2x - 2)} \geq \frac{\log_2(x^4 + 4x^3 + 4x^2)}{\log_2(x^2 + 2x - 2)}.$$

Положив в последнем неравенстве $y = x^2 + 2x$, получаем:

$$\frac{\log_2(y + 56)}{\log_2(y - 2)} \geq \frac{\log_2 y^2}{\log_2(y - 2)} \Leftrightarrow \frac{\log_2 y^2 - \log_2(y + 56)}{\log_2(y - 2) - \log_2 1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2 - y - 56}{y - 3} \leq 0, \\ y > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < y \leq 8.$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 3, \\ x^2 + 2x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0, \\ x^2 + 2x - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x < -3, \\ x > 1, \end{bmatrix} \\ -4 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x < -3, \\ 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Учитывая то, что $x \neq -4$, получаем решение исходного неравенства: $(-4; -3) \cup (1; 2]$.

Ответ: $(-4; -3) \cup (1; 2]$.

26. 26. Решите неравенство: $\log_{4-x} \frac{(x-4)^8}{(x+5)} \geq 8$.

Решение.

Преобразуем неравенство, используя свойства логарифма:

$$\log_{4-x} \frac{(x-4)^8}{(x+5)} \geq 8 \Leftrightarrow \log_{4-x} (x-4)^8 - \log_{4-x} (x+5) \geq 8 \Leftrightarrow \log_{4-x} (x+5) \leq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 4 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x} (x+5) \leq 0, \\ 0 < 4 - x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 1, \\ 3 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$

Второй случай: $4 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x} (x+5) \leq 0, \\ 4 - x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+5 \leq 1, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x \leq -4.$$

Решение неравенства: $-5 < x \leq -4$ или $3 < x < 4$.

Приведём другое решение.

Заметим, что

$$\log_{4-x} \frac{(x-4)^8}{x+5} \geq 8 \Leftrightarrow \log_{4-x} (x-4)^8 - \log_{4-x} (x+5) \geq 8 \Leftrightarrow \log_{4-x} (x+5) \leq 0.$$

Воспользуемся методом рационализации:

$$\log_{4-x} (x+5) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (4-x-1)(x+5-1) \leq 0, \\ 4-x > 0, \\ 4-x \neq 1, \\ x+5 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(x+4) \leq 0, \\ x < 4, \\ x \neq 3, \\ x > -5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x \leq -4, \\ 3 < x < 4. \end{cases}$$

Ответ: $(-5; -4] \cup (3; 4)$.

27. 27. Решите неравенство: $\log_{5-x} (x+3) \leq 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай $0 < 5 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+3) \leq 0, \\ 0 < 5 - x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 1, \\ 4 < x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x < 5.$$

Второй случай: $5 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+3) \leq 0, \\ 5 - x > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+3 \leq 1, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x \leq -2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3 < x \leq -2$ или $4 < x < 5$.

Приведём другое решение.

Используя метод рационализации, получим

$$\log_{5-x}(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (5-x-1)(x+3-1) \leq 0, \\ 5-x > 0, \\ 5-x \neq 1, \\ x+3 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-x)(x+2) \leq 0, \\ x < 5, \\ x \neq 4, \\ x > -3. \end{cases}$$

Из первого неравенства

$$\begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq 4. \end{cases}$$

Учитывая область определения, получим

$$\begin{cases} -3 < x \leq -2, \\ 4 < x < 5. \end{cases}$$

Ответ: $(-3; -2] \cup (4; 5)$.

28. 28. Решите неравенство: $\log_{7-x}(2x+9) \leq 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0 < 7 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{7-x}(2x+9) \leq 0, \\ 0 < 7 - x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+9 \geq 1, \\ 6 < x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 6 < x < 7.$$

Второй случай: $7 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{7-x}(2x+9) \leq 0, \\ 7 - x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x+9 \leq 1, \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} < x \leq -4.$$

Множество решений неравенства: $\left(-\frac{9}{2}; -4\right] \cup (6; 7)$.

Ответ: $\left(-\frac{9}{2}; -4\right] \cup (6; 7)$.

29. 29. Решите неравенство: $x \cdot \log_{x+3}(7-2x) \geq 0$.

Решение.

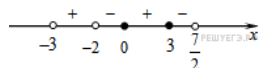
Решим неравенство методом интервалов. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ 7-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x \neq -2, \\ x < \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < \frac{7}{2}, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Найдём корни:

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 3. \end{cases}$$

Определим знаки левой неравенства на ОДЗ (см. рис.):



Тем самым, множество решений неравенства: $(-3; -2) \cup [0; 3]$.

30. 30. Решите неравенство: $\log_{6x^2-x-1}(2x^2-5x+3) \geq 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0 < 6x^2 - x - 1 < 1$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} 6x^2 - x - 1 > 0, \\ 6x^2 - x - 1 < 1, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(3x+1) > 0, \\ (2x+1)(3x-2) < 0, \\ (x-1)(2x-3) > 0, \\ (x-2)(2x-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right).$$

Второй случай: $6x^2 - x - 1 > 1$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} 6x^2 - x - 1 > 1, \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)(3x-2) > 0, \\ (x-2)(2x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [2; +\infty).$$

Приведём другое решение.

Найдём сначала область определения неравенства:

$$\begin{cases} 6x^2 - x - 1 > 0, \\ 6x^2 - x - 1 \neq 1, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0, \\ 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) \neq 0, \\ 2\left(x - 1\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

На области определения исходное неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} & (6x^2 - x - 1)(2x^2 - 5x + 3 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 12\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty) \end{aligned}$$

Учитывая область определения, получим ответ.

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup [2; +\infty).$$

31. 31. Решите неравенство: $\log_{6x^2+5x}(2x^2 - 3x + 1) \geq 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0 < 6x^2 + 5x < 1$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} 6x^2 + 5x > 0, \\ 6x^2 + 5x < 1, \\ 2x^2 - 3x + 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x + 1 \leq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(6x+5) > 0, \\ (x+1)(6x-1) < 0, \\ (x-1)(2x-1) > 0, \\ x(2x-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{6}.$$

Второй случай: $6x^2 + 5x > 1$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} 6x^2 + 5x > 1, \\ 2x^2 - 3x + 1 \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(6x-1) > 0, \\ x(2x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Множество решений неравенства: $(-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{6}\right) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

$$\text{Ответ: } (-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{6}\right) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

32. 32. Решите неравенство: $\log_{x+6} \left(\frac{x-4}{x}\right)^2 + \log_{x+6} \frac{x}{x-4} \leq 1$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2\log_{x+6} \frac{x-4}{x} - \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x+6 > 1 \Leftrightarrow x > -5$.

$$\begin{aligned} \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 &\Leftrightarrow 0 < \frac{x-4}{x} \leq x+6 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \frac{x^2+5x+4}{x} \geq 0, \\ \frac{x-4}{x} > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(x+4)}{x} \geq 0, \\ \frac{x-4}{x} > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда находим: $[-4, -1] \cup (4, +\infty)$. Полученные значения переменной удовлетворяют условию $x > -5$.

Второй случай: $0 < x+6 < 1 \Leftrightarrow -6 < x < -5$. Имеем:

$$\log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x} \geq x+6 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x+4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4, \\ -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

Учитывая условие $0 < x+6 < 1$, получаем: $-6 < x < -5$. Решение неравенства: $(-6, -5) \cup [-4, -1] \cup (4, +\infty)$.

Ответ: $(-6, -5) \cup [-4, -1] \cup (4, +\infty)$.

33. 33. Решите неравенство: $\log_{x+7} \left(\frac{3-x}{x+1} \right)^2 \leq 1 - \log_{x+7} \frac{x+1}{x-3}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2\log_{x+7} \frac{x-3}{x+1} \leq 1 + \log_{x+7} \frac{x-3}{x+1} \Leftrightarrow \log_{x+7} \frac{x-3}{x+1} \leq 1.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x+7 > 1$.

$$\begin{aligned} \log_{x+7} \frac{x-3}{x+1} \leq 1 &\Leftrightarrow 0 < \frac{x-3}{x+1} \leq x+7 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \frac{x^2+7x+10}{x+1} \geq 0, \\ \frac{x-3}{x+1} > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)(x+5)}{x+1} \geq 0, \\ \frac{x-3}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq -2, \\ x > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Все полученные значения переменной удовлетворяют условию $x+7 > 1$.

Второй случай: $0 < x+7 < 1$.

$$\log_{x+7} \frac{x-3}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \geq x+7 \Leftrightarrow \frac{x^2+7x+10}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+5)}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5, \\ -2 \leq x < -1. \end{cases}$$

Учитывая условие $0 < x+7 < 1$, получаем: $-7 < x < -6$. Множество решений второго неравенства исходной системы: $(-7; -6) \cup [-5; -2] \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-7; -6) \cup [-5; -2] \cup (3; +\infty)$.

34. 34. Решите неравенство: $\log_{4-x} (16-x^2) \leq 1$.

Решение.

Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}(16-x^2) \leq 1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(4-x)(4+x) \leq 1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(4+x) \leq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 4-x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \leq 0, \\ 0 < 4-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 1, \\ 3 < x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$

Второй случай: $4-x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \leq 0, \\ 4-x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+4 \leq 1, \\ x < 3, \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x \leq -3.$$

Множество решений неравенства: $(-4; -3] \cup (3; 4)$.

Ответ: $(-4; -3] \cup (3; 4)$.

35. 35. Решите неравенство: $\log_{4-x} \frac{-5-x}{x-4} \leq -1$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\log_{4-x} \frac{-5-x}{x-4} \leq -1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(5+x) - \log_{4-x}(4-x) \leq -1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(x+5) \leq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 4-x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+5) \leq 0, \\ 0 < 4-x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 1, \\ 3 < x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$

Второй случай: $4-x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+5) \leq 0, \\ 4-x > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+5 \leq 1, \\ x < 3, \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x \leq -4.$$

Множество решений неравенства: $(-5; -4] \cup (3; 4)$.

Ответ: $(-5; -4] \cup (3; 4)$.

36. 36. Решите неравенство: $\log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4$.

Решение.

Имеем:

$$\log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) - \log_{5-x}(x-5)^4 \geq -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 5-x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+2) \geq 0, \\ 0 < 5-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+2 \leq 1, \\ 0 < 5-x < 1 \end{cases} \text{ решений нет.}$$

Второй случай: $5-x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+2) \geq 0, \\ 5-x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 1, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 4.$$

Таким образом, множество решений данного уравнения: $[-1; 4)$.

Приведём другое решение.

Заметим, что

$$\log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) - \log_{5-x}(x-5)^4 \geq -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) \geq 0.$$

Воспользуемся методом рационализации:

$$\log_{5-x}(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (5-x-1)(x+2-1) \geq 0, \\ 5-x > 0, \\ 5-x \neq 1, \\ x+2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-x)(x+1) \geq 0, \\ x < 5, \\ x \neq 4, \\ x > -2. \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 4.$$

Ответ: $[-1; 4)$.

37. 37. Решите неравенство: $\log_{3-x} \frac{x+4}{(x-3)^2} \geq -2$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\log_{3-x} \frac{x+4}{(x-3)^2} \geq -2 \Leftrightarrow \log_{3-x}(x+4) - \log_{3-x}(x-3)^2 \geq -2 \Leftrightarrow \log_{3-x}(x+4) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая.

а) $0 < 3-x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+4) \geq 0, \\ 0 < 3-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+4 \leq 1, \\ 2 < x < 3. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет.

б) $3-x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+4) \geq 0, \\ 3-x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 1, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 2.$$

Ответ: $-3 \leq x < 2$

38. 38. Решите неравенство: $\log_x(x^3-8) \leq \log_x(x^3+2x-13)$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_x(x^3-8) \leq \log_x(x^3+2x-13) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-8 \leq x^3+2x-13, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 5, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2,5.$$

Ответ: $[2,5; +\infty)$.

39. 39. Решите неравенство: $\log_x(x^3-1) \leq \log_x(x^3+2x-4)$.

Решение.

Решим первое неравенство системы:

$$\log_x(x^3-1) \leq \log_x(x^3+2x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-1 \leq x^3+2x-4, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1,5.$$

Ответ: $[1,5; +\infty)$.

40. 40. Решите неравенство: $\log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leq \frac{4}{2x+1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство, используя свойства логарифма:

$$\begin{aligned} \log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} &\leq \frac{4}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{4}{2x+1} \cdot \log_7 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leq \frac{4}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{4}{2x+1} \cdot \left(\frac{2}{x^2+x} - 1 \right) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2-x-x^2}{(2x+1)(x^2+x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{x(2x+1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < -1, \\ -\frac{1}{2} < x < 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $[-2; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup [1; +\infty)$.

41. 41. Решите неравенство: $\log_{x-1} \left(\frac{x+1}{5} \right) \leq 0$.

Решение.

Решим неравенство, используя теорему о знаке логарифма:

$$\log_{x-1} \left(\frac{x+1}{5} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x, \\ x \neq 2, \\ (x-2) \left(\frac{x+1}{5} - 1 \right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x, \\ x \neq 2, \\ (x-2) \cdot \frac{x-4}{5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 4.$$

Ответ: $(2; 4]$.

42. 42. Решите неравенство: $\log_{4-x}(x+4) \cdot \log_{x+5}(6-x) \leq 0$.

Решение.

Значения x , при которых определено первое неравенство: $-4 < x < 3$, $3 < x < 4$.
Рассмотрим два случая.

Первый случай: $-4 < x < 3$. Получаем, что $\log_{x+5}(6-x) > 0$; $4-x > 1$. Тогда

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \cdot \log_{x+5}(6-x) \leq 0, \\ -4 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \leq 0, \\ -4 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+4 \leq 1, \\ -4 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x \leq -3.$$

Второй случай: $3 < x < 4$. Получаем, что $\log_{4-x}(x+4) < 0$; $\log_{x+5}(6-x) > 0$, следовательно, при $3 < x < 4$ первое неравенство исходной системы верно.

Таким образом, решение неравенства: $(-4; -3] \cup (3; 4)$.

Ответ: $(-4; -3] \cup (3; 4)$.

43. 43. Решите неравенство: $\log_{11-x}(x+7) \cdot \log_{x+5}(9-x) \leq 0$.

Решение.

Значения x , при которых определено первое неравенство: $-5 < x < -4$ и $-4 < x < 9$. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $-4 < x < 9$. Получаем, что $\log_{11-x}(x+7) > 0$; $x+5 > 1$. Тогда

$$\begin{cases} \log_{11-x}(x+7) \cdot \log_{x+5}(9-x) \leq 0, \\ -4 < x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x+5}(9-x) \leq 0, \\ -4 < x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 9-x \leq 1, \\ -4 < x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 8 \leq x < 9.$$

Второй случай: $-5 < x < -4$. Получаем, что $\log_{x+5}(9-x) < 0$; $\log_{11-x}(x+7) > 0$, следовательно, при $-5 < x < -4$ первое неравенство исходной системы верно.

Таким образом, решение неравенства: $(-5; -4) \cup [8; 9)$.

Ответ: $(-5; -4) \cup [8; 9)$.

44. 44. Решите неравенство: $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$.

Решение.

Значения x , при которых определено неравенство: $-2 < x < 1$ и $1 < x < 2$. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $-2 < x < 1$. Получаем, что $\log_{x+3}(3-x) > 0$; $2-x > 1$. Тогда:

$$\begin{cases} \log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0, \\ -2 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{2-x}(x+2) \leq 0, \\ -2 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+2 \leq 1, \\ -2 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq -1.$$

Второй случай: $1 < x < 2$. Получаем, что $\log_{2-x}(x+2) < 0$; $\log_{x+3}(3-x) > 0$, следовательно, при $1 < x < 2$ неравенство верно.

Ответ: $(-2; -1] \cup (1; 2)$.

45. 45. Решите неравенство: $\log_{2x-1}(4x-5) + \log_{4x-5}(2x-1) \leq 2$.

Решение.

Воспользуемся свойствами логарифма:

$$\log_{2x-1}(4x-5) + \frac{1}{\log_{2x-1}(4x-5)} \leq 2.$$

Сделаем замену $y = \log_{2x-1}(4x-5)$:

$$y + \frac{1}{y} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{(y-1)^2}{y} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y < 0. \end{cases}$$

Если $\log_{2x-1}(4x-5) = 1$, то

$$\begin{cases} 2x-1 = 4x-5, \\ 2x-1 > 0, \\ 2x-1 \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Если $\log_{2x-1}(4x-5) < 0$, то

$$\begin{cases} \frac{4x-5-1}{2x-1-1} < 0, \\ 2x-1 > 0, \\ 4x-5 > 0, \\ 2x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-3}{x-1} < 0, \\ x > \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}.$$

Значит, решение данного неравенства $\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$ или $x = 2$.

Ответ: $\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right) \cup \{2\}$.

46. 46. Решите неравенство: $\log_{3x} \frac{1}{27} \cdot \log_3 27x + 9 \geq 0$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{\log_3 27x}{\log_{\frac{1}{27}} 3x} + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3 x + 3}{-\frac{1}{3}(\log_3 x + 1)} + 9 \geq 0 \Leftrightarrow 9 - \frac{3(\log_3 x + 3)}{\log_3 x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3 x + 3}{\log_3 x + 1} \leq 3.$$

Сделаем замену $z = \log_3 x$:

$$\frac{z+3}{z+1} \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{2z}{z+1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z < -1, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Тогда $\log_3 x < -1$ или $\log_3 x \geq 0$, откуда $0 < x < \frac{1}{3}$ или $x \geq 1$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup [1; +\infty)$.

47. 47. Решите неравенство: $\log_{0,25(x+1)^2} \left(\frac{x+7}{4}\right) \leq 1$.

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0,25(x+1)^2 > 1 \Leftrightarrow |x+1| > 2$.

$$\log_{0,25(x+1)^2} \left(\frac{x+7}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{x+7}{4} \leq 0,25(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0, \\ x + 7 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2) \geq 0, \\ x > -7. \end{cases}$$

Откуда, учитывая условие $|x+1| > 2$, получаем: $-7 < x < -3$ или $x \geq 2$.

Второй случай: $0 < |x+1| < 2$.

$$\log_{0,25(x+1)^2} \left(\frac{x+7}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x+7}{4} \geq 0,25(x+1)^2 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2.$$

Учитывая условие $0 < |x+1| < 2$, получаем: $-3 < x < -1$ или $-1 < x < 1$.

Множество решений неравенства: $(-7, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$.

Ответ: $(-7, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$.

48. 48. Решите неравенство: $\log_{3x+1}(4x-6) + \log_{4x-6}(3x+1) \leq 2$.

Решение.

Воспользуемся свойствами логарифма:

$$\log_{3x+1}(4x-6) + \frac{1}{\log_{3x+1}(4x-6)} \leq 2.$$

Сделаем замену $y = \log_{3x+1}(4x-6)$:

$$y + \frac{1}{y} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{(y-1)^2}{y} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ y < 0. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной.

Первый случай:

$$\log_{3x+1}(4x-6) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = 4x-6, \\ 3x+1 > 0, \\ 3x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Второй случай:

$$\log_{3x+1}(4x-6) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-7}{3x} < 0, \\ 3x+1 > 0, \\ 4x-6 > 0, \\ 3x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-7}{x} < 0, \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{7}{4}.$$

Итак, решение неравенства: $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{4}$ или $x = 7$.

ОТВЕТ: $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right) \cup \{7\}$.

49.

49.

Решите

неравенство:

$$\log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) - \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) \geq 0.$$

Решение.

Заметим, что выражение, стоящее под знаком логарифма, не меньше 1:

$$x^2 - 12|x| + 37 = (|x| - 6)^2 + 1 \geq 1.$$

При положительных значениях переменной справедливы неравенства: $1 - \frac{x^2}{37} < 1$ и

$$1 + \frac{x^2}{37} > 1, \text{ а значит,}$$

$$\log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) \leq 0 \text{ и } \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) \geq 0.$$

Тем самым, неравенство выполнено в том и только в том случае, когда оба выражения равны нулю.

Следовательно,

$$x^2 - 12|x| + 37 = 1 \Leftrightarrow (|x| - 6)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow |x| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ x = -6. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\{-6; 6\}$.

50. 50. Решите неравенство: $\log_2 0,5x \geq \log_{16x} 2 \cdot \log_4 16x^4$.

Решение.

Решим неравенство:

$$\log_2 0,5x \geq \frac{\log_4 16x^4}{\log_2 16x} \Leftrightarrow \log_2 x - 1 \geq \frac{2\log_2 x + 2}{\log_2 x + 4}.$$

Сделаем замену $z = \log_2 x$:

$$z - 1 \geq \frac{2z + 2}{z + 4} \Leftrightarrow \frac{z^2 + z - 6}{z + 4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < z \leq -3, \\ z \geq 2. \end{cases}$$

Тогда $-4 < \log_2 x \leq -3$ или $\log_2 x \geq 2$, откуда находим решение неравенства: $\frac{1}{16} < x \leq \frac{1}{8}$ или $x \geq 4$.

ОТВЕТ: $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{8}\right] \cup [4; +\infty)$.

51. 51. Решите неравенство: $\log_{2x-3}(10-3x) \geq 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0 < 2x - 3 < 1$.

$$\begin{cases} 0 < 2x - 3 < 1, \\ \log_{2x-3}(10-3x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} < x < 2, \\ 0 < 10 - 3x \leq 1. \end{cases}$$

В первом случае решений нет.

Второй случай: $2x - 3 > 1$.

$$\begin{cases} 2x - 3 > 1, \\ \log_{2x-3}(10-3x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ 10 - 3x \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 3.$$

Решение неравенства: $2 < x \leq 3$.

Ответ: $(2; 3]$.

52. 52. Решите неравенство: $\log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \leq -2$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} \log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \leq -2 &\Leftrightarrow \log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \frac{(2x+7)(x+1)}{(x+1)^4} \leq -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_{x+1}(2x+7) \cdot (\log_{x+1}(2x+7) - 3) \leq -2. \end{aligned}$$

Пусть $t = \log_{x+1}(2x+7)$, тогда неравенство примет вид:

$$t(t-3) \leq -2 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \log_{x+1}(2x+7) \leq 2.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < x + 1 < 1$.

$$\log_{x+1}(2x+7) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+7 \leq x+1, \\ 2x+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -6 \\ x > -\frac{7}{2} \end{cases} \text{ решений нет.}$$

Второй случай: $x + 1 > 1$.

$$\begin{cases} \log_{x+1}(2x+7) \geq 1, \\ \log_{x+1}(2x+7) \leq 2, \\ x+1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+7 \geq x+1, \\ 2x+7 \leq (x+1)^2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6, \\ x^2 - 6 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{6}.$$

Решение неравенства: $x \geq \sqrt{6}$.

Ответ: $[\sqrt{6}; +\infty)$.

53. 53. Решите неравенство: $\log_{(\sqrt{5})^{x+\frac{1}{3}}} 5^{\frac{4}{x^2+3x}} \leq \frac{6}{3x+1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} \log_{(\sqrt{5})^{x+\frac{1}{3}}} 5^{\frac{4}{x^2+3x}} \leq \frac{6}{3x+1} &\Leftrightarrow \frac{6}{3x+1} \cdot \log_5 5^{\frac{4}{x^2+3x}} \leq \frac{6}{3x+1} \Leftrightarrow \frac{6}{3x+1} \cdot \left(\frac{4}{x^2+3x} - 1 \right) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4-3x-x^2}{(3x+1)(x^2+3x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+4)}{x(3x+1)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x < -3, \\ -\frac{1}{3} < x < 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $[-4; -3) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup [1; +\infty)$.

54. 54. Решите неравенство: $\log_{5-x} \frac{x+4}{(x-5)^{10}} \geq -10$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\log_{5-x} \frac{x+4}{(x-5)^{10}} \geq -10 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+4) - \log_{5-x}(x-5)^{10} \geq -10 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+4) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 5-x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+4) \leq 0, \\ 0 < 5-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+4 \leq 1, \\ 4 < x < 5 \end{cases} \text{ решений нет.}$$

Второй случай: $5-x > 1$. Имеем:

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+4) \leq 0, \\ 5-x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 1, \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 4.$$

Ответ: $[-3; 4)$.

55. 55. Решите неравенство $\log_{\frac{x}{x-1}} 5 \leq \log_{\frac{x}{x-1}} 5$.

Решение.

Неравенство имеет смысл при $\frac{x}{x-1} > 0$ и $\frac{x}{x-1} > 0$. Первое неравенство верно при $x > 0$. При этих значениях переменной числитель дроби во втором неравенстве положителен, значит, положителен и знаменатель. Следовательно, $x > 1$.

Заметим, что $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$. При $x > 1$ эта сумма больше 1. Тогда и основание, и аргумент выражения $\log_{\frac{x}{x-1}} 5$ больше 1, а значит, левая часть исходного неравенства положительна. Тогда положительна и правая часть, откуда $x > 2$.

При $x > 2$ обе части неравенства положительны, а аргументы логарифмов равны и больше 1. Значит, основание логарифма, стоящего в левой части неравенства, не меньше основания логарифма, стоящего в правой. На луче $(2; +\infty)$ имеем:

$$\frac{x}{x-1} \geq \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \geq x-1 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Тем самым, $2 < x \leq 3$.

Ответ: $(2; 3]$.

Примечание.

В решении использованы известные свойства логарифмов: если $a, b, c > 1$, то: $\log_a b > 0$ и $\log_a c \leq \log_b c \Leftrightarrow a \geq b$.

56.

56.

Решите

неравенство

$$\log_2^2(3x-1) + \log_{3x-1}^2 2 - \log_2(3x-1)^2 - \log_{3x-1} 4 + 2 \leq 0.$$

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\log_2^2(3x-1) + \frac{1}{\log_2^2(3x-1)} \right) - 2 \left(\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)} \right) + 2 \leq 0.$$

$$\text{Пусть} \quad \log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)} = t, \quad \text{тогда}$$

$$\log_2^2(3x-1) + \frac{1}{\log_2^2(3x-1)} + 2 = t^2 \text{ и, следовательно,}$$

$$\log_2^2(3x-1) + \frac{1}{\log_2^2(3x-1)} = t^2 - 2.$$

Далее имеем: $t^2 - 2t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2$, откуда

$$0 \leq \log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)} = 2 \Leftrightarrow \log_2(3x-1) = 1 \Leftrightarrow 3x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

57. 57. Решите неравенство $\frac{\log_{1-2x}((x+1)(1-4x+4x^2))}{\log_{x+1}(1-2x)} \leq -1$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} (\log_{1-2x}(x+1) + \log_{1-2x}(1-2x)^2) \cdot \log_{1-2x}(x+1) \leq -1, \\ x+1 \neq 1. \end{cases}$$

Сделаем замену $y = \log_{1-2x}(x+1)$. Получаем: $(y+2)y \leq -1$; $(y+1)^2 \leq 0$; $y = -1$.

Сделаем обратную замену: $\log_{1-2x}(x+1) = -1$. Тогда

$$\begin{cases} (1-2x)(x+1) = 1, \\ x+1 > 0, \\ 1-2x \neq 1, \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 - x = 0, \\ x > -1, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

откуда $x = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

58. 58. Решите неравенство $\frac{\log_{1-x}((3x+1)(1-2x+x^2))}{\log_{3x+1}(1-x)} \leq -1$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} (\log_{1-x}(3x+1) + \log_{1-x}(1-x)^2) \cdot \log_{1-x}(3x+1) \leq -1, \\ 3x+1 \neq 1. \end{cases}$$

Сделаем замену $y = \log_{1-x}(3x+1)$. Получаем: $(y+2)y \leq -1$; $(y+1)^2 \leq 0$; $y = -1$.

Сделаем обратную замену: $\log_{1-x}(3x+1) = -1$. Тогда

$$\begin{cases} (3x+1)(1-x) = 1, \\ 1-x > 0, \\ 1-x \neq 1, \\ 3x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 2x = 0, \\ x < 1, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{2}{3}$.

Ответ: $x = \frac{2}{3}$.

59. 59. Решите неравенство $\log_x 512 \leq \log_2 \frac{64}{x}$.

Решение.

Ограничения на x : $x > 0$; $x \neq 1$.

$$\log_x 512 \leq \log_2 \frac{64}{x} \Leftrightarrow \log_x 2^9 \leq \log_2 2^6 - \log_2 x \Leftrightarrow \frac{9}{\log_2 x} - 6 + \log_2 x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2^2 x - 6\log_2 x + 9}{\log_2 x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_2 x - 3)^2}{\log_2 x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 3, \\ \log_2 x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ \log_2 x < \log_2 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1) \cup \{8\}$.

60. 60. Решите неравенство $\log_{9x} 27 \leq \frac{1}{\log_3 x}$.

Решение.

Найдем ограничения на x .

$$\begin{cases} x > 0, \\ 9x \neq 1, \\ \log_3 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{9}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

В логарифмах перейдем к основанию 3. Будем иметь: $\frac{3}{\log_3 x + 2} \leq \frac{1}{\log_3 x}$. Пусть $\log_3 x = t$, тогда:

$$\frac{3}{t+2} - \frac{1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3t - t - 2}{t(t+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2t - 2}{t(t+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t - 1}{t(t+2)} \leq 0.$$

Последнее неравенство решим методом интервалов.

Интервалы	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
Знак рационального выражения	-	+	-	+

Итак, будем иметь: $\begin{cases} t < -2, \\ 0 < t \leq 1. \end{cases}$ Теперь перейдем к переменной x .

$$\log_3 x < -2 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{9};$$

$$0 < \log_3 x \leq 1 \Leftrightarrow \log_3 1 < \log_3 x \leq \log_3 3 \Leftrightarrow 1 < x \leq 3.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (1; 3]$.

61. 61. Решите неравенство $\log_{(x-2)^2} \frac{5-x}{4-x} \leq 1 + \log_{(x-2)^2} \frac{1}{x^2 - 9x + 20}$

Решение.

Найдем ограничения на x .

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3, \\ \frac{x-5}{x-4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3, \\ \begin{cases} x < 4, \\ x > 5. \end{cases} \end{cases}$$

Далее заданное неравенство будем рассматривать только на множестве $M = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 4) \cup (5; +\infty)$.

На M :

$$\begin{aligned} \log_{(x-2)^2} \frac{5-x}{4-x} \leq 1 + \log_{(2-x)^2} \frac{1}{x^2 - 9x + 20} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_{|x-2|} |x-5| - \frac{1}{2} \log_{|x-2|} |x-4| \leq 1 - \frac{1}{2} \log_{|x-2|} |x-5| - \frac{1}{2} \log_{|x-2|} |x-4| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_{|x-2|} |x-5| \leq 1 \Leftrightarrow \log_{|x-2|} |x-5| \leq \log_{|x-2|} |x-2| \Leftrightarrow (|x-2| - 1) \cdot (|x-5| - |x-2|) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-2-1) \cdot (x-2+1) \cdot (x-5-x+2) \cdot (x-5+x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot (x-1) \cdot (2x-7) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-3) \cdot (x-1) \cdot (x-3,5) \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство решим методом интервалов.

Интервалы	$(-\infty; 1)$	$(1; 3)$	$(3; 3,5)$	$(3,5; +\infty)$
Знак рационального выражения	-	+	-	+

С учетом ограничений на x получим множество решений исходного неравенства: $(1; 2) \cup (2; 3) \cup [3,5; 4) \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $(1; 2) \cup (2; 3) \cup [3,5; 4) \cup (5; +\infty)$.

62. 62. Решите неравенство $\log_{2x}(x+4) \cdot \log_x(2-x) \leq 0$

Решение.

Найдем ограничения на x .

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ x \neq 1, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Далее неравенство будем решать методом рационализации и будем его рассматривать только на множестве $M = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 2)$.

$$\log_{2x}(x+4) \cdot \log_x(2-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in M, \\ (2x-1)(x+4-1)(x-1)(2-x-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in M, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)(x-1)^2 \geq 0. \end{cases}$$

На M : $x+3 > 0$, $(x-1)^2 > 0$. Следовательно,

$$\begin{cases} x \in M, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)(x-1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in M, \\ x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Окончательно: $\frac{1}{2} < x < 1$; $1 < x < 2$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 2)$.

63. 63. Решите неравенство $\log_{x+1} 2 \leq \log_{3-x} 2$.

Решение.

Найдем ограничения на x :

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ 3-x > 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x < 3, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Заданное неравенство мы будем рассматривать только на множестве

$$M = (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 3).$$

$$\log_{x+1} 2 \leq \log_{3-x} 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in M, \\ (x+1-1) \cdot (3-x-1)(3-x-x-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in M, \\ x \cdot (x-2) \cdot (2x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in M, \\ x \cdot (x-2) \cdot (x-1) \leq 0 \end{cases}$$

Далее решение поведем на M методом интервалов.

Интервалы	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; 3)$
Знак выражения	-	+	-	+

Ответ: $(-1; 0) \cup [1; 2)$.

64. 64. Решите неравенство $0,5 \log_{x-2}(x^2 - 10x + 25) + \log_{5-x}(-x^2 + 7x - 10) \geq 3$.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{1}{2} \log_{x-2}(x-5)^2 + \log_{5-x}((5-x)(x-2)) \geq 3.$$

Любое решение неравенства удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ 5-x > 0, \\ x-2 \neq 1, \\ 5-x \neq 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 2 < x < 5, \\ x \neq 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Для таких x имеем неравенство

$$\log_{x-2}(5-x) + \log_{5-x}(x-2) \geq 2.$$

Замена: $\log_{x-2}(5-x) = z$. Получаем $z + \frac{1}{z} \geq 2$, откуда $z > 0$. Обратная замена:

$$\log_{(x-2)}(5-x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(5-x)-1}{(x-2)-1} > 0 \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$

Ответ: $(3; 4)$.

65. 65. Решите неравенство $0,5 \log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) \geq 3$.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{1}{2} \log_{x-1}(x-4)^2 + \log_{4-x}((4-x)(x-1)) \geq 3.$$

Любое решение неравенства удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ 4-x > 0, \\ x-1 \neq 1, \\ 4-x \neq 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 1 < x < 4, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Для таких x имеем неравенство

$$\log_{x-1}(4-x) + \log_{4-x}(x-1) \geq 2.$$

Замена: $\log_{x-1}(4-x) = z$. Получаем $z + \frac{1}{z} \geq 2$, откуда $z > 0$. Обратная замена:

$$\log_{(x-1)}(4-x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(4-x)-1}{(x-1)-1} > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Ответ: $(2; 3)$.

66. 66. Решите неравенство $\log_{x-3}(x^2 - 12x + 36) \leq 0$.

Решение.

Заменим $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$, получим $\log_{x-3}(x-6)^2 \leq 0$. Определим область допустимых значений:

$$\begin{cases} x-6 \neq 0, \\ x-3 > 0, \\ x-3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 6, \\ x > 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

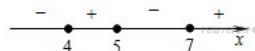
Решаем с помощью метода декомпозиции, то есть представляем логарифм в виде

$$\log_{a(x)} f(x) \rightarrow (a(x)-1)(f(x)-1),$$

получим неравенство:

$$(x-3-1)((x-6)^2-1) \leq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-6-1)(x-6+1) \leq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-7)(x-5) \leq 0,$$

Расставим точки на числовой прямой и определим знаки данного выражения на каждом из промежутков:



Учитывая область допустимых значений, получим ответ: $(3; 4) \cup [5; 6) \cup (6; 7]$.

Ответ: $(3; 4) \cup [5; 6) \cup (6; 7]$.

67. 67. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$.

Решение.

Определим область допустимых значений:

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ 3-x > 0, \\ 2-x > 0, \\ x+3 > 0, \\ 2-x \neq 1, \\ x+3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 3, \\ x < 2, \\ x > -3, \\ x \neq 1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Таким образом $x \in (-2; 1) \cup (1; 2)$.

Воспользуемся функцией перехода логарифма к другому основанию, получим:

$$\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)} \cdot \frac{\ln(3-x)}{\ln(x+3)} \leq 0$$

И учитывая правило декомпозиции $\log_a f \rightarrow (a-1) \cdot (f-1)$, где множитель $a-1 > 0$ можно сразу отбросить, получим

$$\frac{(x+2-1) \cdot (3-x-1)}{(2-x-1) \cdot (x+3-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x+2)}{(-x+1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \leq 0,$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} x = -1, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$


Ответ: $x \in (-2; -1] \cup (1; 2)$.

68. 68. Решите неравенство $\log_{3x-3} 3 + \log_{(x-1)^2} 27 \geq 2$.

Решение.

Перейдем к основанию 3 и упростим левую часть неравенства:

$$\begin{aligned} \log_{3x-3} 3 + \log_{(x-1)^2} 27 \geq 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{\log_3(3x-3)} + \frac{3}{\log_3(x-1)^2} \geq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3(3(x-1))} + \frac{3}{\log_3(x-1)^2} \geq 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{1+\log_3(x-1)} + \frac{3}{2\log_3(x-1)} \geq 2. \end{aligned}$$

Обозначим $t = \log_3(x-1)$, тогда $\frac{1}{1+t} + \frac{3}{2t} \geq 2$. Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{1}{1+t} + \frac{3}{2t} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{5t+3}{2t^2+2t} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{4t^2-t-3}{2t(1+t)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t \leq -\frac{3}{4}, \\ 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} -1 < \log_3(x-1) \leq -\frac{3}{4}, \\ 0 < \log_3(x-1) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} < x \leq 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}, \\ 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{4}{3}; 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right] \cup (2; 4]$.

69. 69. Решите неравенство $\frac{\log_{2(x-1)^2-1}(\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3))}{\log_{2(x-1)^2-1}(x^2+4x+5)} \geq 0$.

Решение.

Чтобы был определен логарифм по основанию $2^{(x-1)^2-1}$, это выражение должно быть положительно и отлично от 1. Находим: $(x-1)^2-1 \neq 0$, откуда $x \neq 0$, $x \neq 2$. Упростим неравенство: $\log_{x^2+4x+5}(\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3)) \geq 0$.

Заметим, что $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 \geq 1$, причем равенство достигается только при $x = -2$.

При $x \neq -2$ получаем: $\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3) \geq 1$.

Выделим полный квадрат в основании логарифма: $2x^2-2x+3 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$. Это выражение больше 1 при всех допустимых x .

Таким образом, $x^2-4x+3 \geq 2x^2-2x+3$.

Тогда $x^2+2x \leq 0$, откуда $-2 \leq x \leq 0$. Учитывая, что $x \neq 0$ и $x \neq -2$, получаем $-2 < x < 0$.

Ответ: $(-2, 0)$.

70. 70. Решите неравенство
$$\frac{\log_{2^{(x+1)^2-1}}(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x))}{\log_{2^{(x+1)^2-1}}(x^2+6x+10)} \geq 0.$$

Решение.

Заметим, что

1. $2^{(x+1)^2}-1 \geq 0$ и обращается в ноль только при $x = -1$, то есть и $2^{(x+1)^2}-1 > 0$ при $x \neq -1$.

2. $2^{(x+1)^2}-1 \neq 1$ при $x \neq 0$ и $x \neq -2$.

3. $2x^2+2x+3 = (x+1)^2+x^2+2 > 1$.

4. $x^2+6x+10 = (x+3)^2+1 \geq 1$ и $(x+3)^2+1 = 1$ при $x = -3$, то есть $(x+3)^2+1 > 1$ при $x \neq -3$.

Следовательно, при $x \neq -3$, $x \neq -2$, $x \neq -1$, $x \neq 0$ имеем:

$$\frac{\log_{2^{(x+1)^2-1}}(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x))}{\log_{2^{(x+1)^2-1}}(x^2+6x+10)} \geq 0 \Leftrightarrow \log_{x^2+6x+10} \log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) \geq 1 \Leftrightarrow x^2-2x \geq 2x^2+2x+3$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1.$$

Откуда с учетом выколотых точек, получаем $-3 < x < -2$ или $-2 < x < -1$.

Ответ: $(-3; -2) \cup (-2; -1)$.

71. 71. Решите неравенство
$$\frac{\log_{7^{x+3}}49}{\log_{7^{x+3}}(-49x)} \leq \frac{1}{\log_7 \log_{\frac{1}{7}} 7^x}$$

Решение.

Решение ищем на множестве:
$$\begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq -\frac{1}{49}, \\ x \neq -3, \\ x < 0. \end{cases}$$

Пусть $\log_7(-x) = t$, тогда

$$\frac{2}{2+t} \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < t < -2, \\ 0 < t \leq 2. \end{cases}$$

Значит, $-49 \leq x < -1$ или $-\frac{1}{49} < x < 0$.

С учетом рассмотренных выше ограничений получаем множество решений исходного неравенства: $[-49; -3) \cup (-3; -1) \cup \left(-\frac{1}{49}; 0\right)$.

Ответ: $[-49; -3) \cup (-3; -1) \cup \left(-\frac{1}{49}; 0\right)$.

72. 72. Решите неравенство $\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \leq 0$.

Решение.

Запишем неравенство в виде:

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 3x} - \frac{6}{\log_3 9x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{1 + \log_3 x} - \frac{6}{2 + \log_3 x} \leq 0.$$

Сделаем замену $y = \log_3 x$ и приведем левую часть к общему знаменателю:

$$\frac{1}{y} + \frac{2}{1+y} - \frac{6}{2+y} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2 + 3y + 2 + 2y^2 + 4y - 6y^2 - 6y}{y(y+1)(y+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3y^2 + y + 2}{y(y+1)(y+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(3y+2)}{y(y+1)(y+2)} \geq 0.$$

Решением полученного неравенства является множество $(-2; -1) \cup \left[-\frac{2}{3}; 0\right) \cup [1; +\infty)$.

Возвращаясь к переменной x , находим множество решений исходного неравенства:

$$\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right) \cup \left[3^{-\frac{2}{3}}; 1\right) \cup [3; +\infty).$$

Ответ: $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right) \cup \left[3^{-\frac{2}{3}}; 1\right) \cup [3; +\infty).$

73. 73. Решите неравенство $\log_x(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2) \cdot \log_5(x^2 + 2x - 2) \geq \log_x 4$.

Решение.

Область определения неравенства задается условиями $x^2 + 2x - 3 \geq 0$, $x > 0$, $x \neq 1$, откуда получаем $x > 1$. На этом множестве $\log_x 4 > 0$ и данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_x(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2)}{\log_x 4} \cdot \log_5(x^2 + 2x - 2) \geq 1,$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$\log_4(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2) \cdot \log_5(x^2 + 2x - 2) \geq 1.$$

Положив $t = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$, где $t \geq 0$ получаем неравенство $\log_4(t+2) \cdot \log_5(t^2+1) \geq 1$. Заметим, что при $t \geq 0$ функция $f(t) = \log_4(t+2) \cdot \log_5(t^2+1)$ возрастает (произведение двух положительных возрастающих функций) и $f(2) = 1$. Таким образом, множество решений этого неравенства является луч $t \geq 2$.

Далее имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 2, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 7 \geq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2\sqrt{2} - 1.$$

Ответ: $[2\sqrt{2} - 1; +\infty)$.

74. 74. Решите неравенство $\log_x(\sqrt{x^2 + x - 2} + 1) \cdot \log_7(x^2 + x + 1) \leq \log_x 3$.

Решение.

Область определения неравенства задается условиями $x^2 + x - 2 \geq 0$, $x > 0$, $x \neq 1$, откуда получаем $x > 1$. На этом множестве $\log_x 3 > 0$ и данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_x(\sqrt{x^2 + x - 2} + 1)}{\log_x 3} \cdot \log_7(x^2 + x + 1) \leq 1,$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$\log_3(\sqrt{x^2 + x - 2} + 1) \cdot \log_7(x^2 + x + 1) \leq 1.$$

Положив $t = \sqrt{x^2 + x - 2}$, где $t \geq 0$ получаем неравенство $\log_3(t+1) \cdot \log_7(t^2+3) \leq 1$. Заметим, что при $t \geq 0$ функция $f(t) = \log_3(t+1) \cdot \log_7(t^2+3)$ возрастает (произведение двух положительных возрастающих функций) и $f(2) = 1$. Таким образом, множество решений этого неравенства задаётся двойным неравенством $0 \leq t \leq 2$.

Далее имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 2} \leq 2, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 2.$$

Ответ: $(1; 2]$.

75. 75. Решите неравенство $2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{2 \cdot \frac{x}{x+1} + 3} + 8 \leq 2^{2 \cdot \frac{x}{x+1}}.$$

Сделаем замену $y = 2^{\frac{x}{x+1}} > 0$. Тогда данное неравенство принимает вид

$$y - 8y^2 + 8 \leq y^2 \Leftrightarrow 9y^2 - y - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)(9y+8) \geq 0 \Leftrightarrow_{y>0} y \geq 1$$

Сделаем обратную замену:

$$2^{\frac{x}{x+1}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x < -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$.

76. 76. Решите неравенство $(4x-7) \cdot \log_{x^2-4x+5}(3x-5) \geq 0$.

Решение.

Заметим, что $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1$ при любых значениях x . Значит, выражение

$\log_{x^2-4x+5}(3x-5)$ положительно при $x > 2$, отрицательно при $\frac{5}{3} < x < 2$ и не определено при $x \leq \frac{5}{3}$ и $x = 2$.

При $x > 2$ выражение $4x-7$ положительно, а при $\frac{5}{3} < x < 2$ исходное неравенство равносильно неравенству $4x-7 \leq 0$, откуда $x \leq \frac{7}{4}$. Таким образом, решение исходного

неравенства: $x \in \left(\frac{5}{3}; \frac{7}{4}\right] \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{4}\right] \cup (2; +\infty)$.

77. 77. Решите неравенство $\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}} \left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2} \right) \leq 0$.

Решение.

Поскольку $1 - \frac{1}{(x-1)^2} < 1$ при $x \neq 1$, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2} \geq 1, \\ 1 - \frac{1}{(x-1)^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x+3}{(x-2)(x-1)} \geq 0, \\ x(x-2) > 0, \end{cases}$$

откуда $-\frac{3}{4} \leq x < 0$ или $x > 2$.

Решение исходного неравенства: $-\frac{3}{4} \leq x < 0$; $x > 2$.

Ответ: $\left[-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (2; +\infty)$.

78. 78. Решите неравенство $\log_{|x+1|}^2(x+1)^4 + \log_2(x+1)^2 \leq 22$.

Решение.

Решим неравенство:

$$\log_{|x+1|}^2(x+1)^4 + \log_2(x+1)^2 \leq 22 \Leftrightarrow 16 \log_{|x+1|}^2|x+1| + \log_2(x+1)^2 \leq 22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+1)^2 \leq 6, \\ x \neq -2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \leq 64, \\ x \neq -2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq x \leq 7, \\ x \neq -2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Ответ: $[-9; -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0; 7]$.

79. 79. Решите неравенство $7^{\ln(x^2-2x)} \leq (2-x)^{\ln 7}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned}\ln\left(7^{\ln(x^2-2x)}\right) &\leq \ln((2-x)^{\ln 7}) \Leftrightarrow \ln 7 \cdot \ln(x^2-2x) \leq \ln 7 \cdot \ln(2-x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(x^2-2x) \leq \ln(2-x) \Leftrightarrow 0 < x^2-2x \leq 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x > 0, \\ (x-2)(x+1) \leq 0, \end{cases}\end{aligned}$$

откуда получаем, что $-1 \leq x < 0$.

Ответ: $[-1; 0)$.

80. 80. Решите неравенство $\log_{x+2}(x^2-2) \geq 2$.

Решение.

Перепишем правую часть неравенства:

$$\log_{x+2}(x^2-2) \geq \log_{x+2}(x+2)^2.$$

Воспользуемся методом рационализации:

$$\begin{cases} (x+2-1)(x^2-2-(x+2)^2) \geq 0, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ x^2-2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1,5) \leq 0, \\ x > -2, \\ x \neq -1, \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty). \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -\sqrt{2}.$$

Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right)$.

81. 81. Решите неравенство $\log_{\frac{x}{3}}(3x^2-2x+1) \geq 0$.

Решение.

Заметим, что $3x^2-2x+1 > 0$ при всех x . Значит, область определения неравенства $x \in (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

На области определения исходное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\frac{x}{3}-1\right)(3x^2-2x+1-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)x\left(x-\frac{2}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

Учитывая область определения, получим

$$\begin{cases} 0 < x \leq \frac{2}{3}, \\ x > 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \frac{2}{3}\right] \cup (3; \infty)$.

82. 82. Решите неравенство: $\log_{x^2-x} \log_{x^2+x} x \geq 0$.

Решение.

Дважды применим метод рационализации на ОДЗ:

$$\begin{aligned}\log_{x^2-x} \log_{x^2+x} x \geq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x > 0, x^2-x \neq 1, \\ \log_{x^2+x} x > 0 \\ (x^2-x-1)(\log_{x^2+x} x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x > 0, x^2-x \neq 1, \\ x^2+x > 0, x^2+x \neq 1, \\ x > 0, \\ (x^2+x-1)(x-1) > 0, \\ (x^2-x-1)(x^2+x-1)(x-(x^2+x)) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2-x-1 \neq 0, \\ -x^2(x^2-x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2-x-1 \neq 0, \\ x^2-x-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2-x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Приведём другое решение.

Из неравенств $x > 0$ и $x^2-x > 0$ следует, что $x > 1$. Тогда $0 < \log_{x^2+x} x < 1$, поскольку основание этого логарифма больше 2, аргумент больше 1, причем аргумент меньше основания. Тогда для выполнения неравенства основание внешнего логарифма должно быть меньше 1, откуда $x^2-x < 1$ при $x > 1$. Это и даёт ответ: $1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.