

Неравенства с модулем

1. 1. Решите неравенство

$$((x+1)^{-1} - (x+6)^{-1})^2 \leq \frac{|x^2 - 10x|}{(x^2 + 7x + 6)^2}.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$((x+1)^{-1} - (x+6)^{-1})^2 \leq \frac{|x^2 - 10x|}{(x^2 + 7x + 6)^2} \Leftrightarrow \frac{|x^2 - 10x| - 25}{(x^2 + 7x + 6)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -6, \\ x \neq -1, \\ |x^2 - 10x| \geq 25. \end{cases}$$

Решим неравенство $|x^2 - 10x| \geq 25$:

$$\begin{cases} x^2 - 10x - 25 \geq 0, \\ x^2 - 10x + 25 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 + 5\sqrt{2}, \\ x \leq 5 - 5\sqrt{2}, \\ x = 5. \end{cases}$$

Исключая из полученного набора точки -6 и -1 получаем множество решений исходного неравенства: $(-\infty; -6) \cup (-6; 5 - 5\sqrt{2}] \cup \{5\} \cup [5 + 5\sqrt{2}; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-6; 5 - 5\sqrt{2}] \cup \{5\} \cup [5 + 5\sqrt{2}; +\infty)$.

2. 2. Решите неравенство

$$((-x+1)^{-1} - (-x+4)^{-1})^2 \leq \frac{|x^2 + 6x|}{(x^2 - 5x + 4)^2}.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$((-x+1)^{-1} - (-x+4)^{-1})^2 \leq \frac{|x^2 + 6x|}{(x^2 - 5x + 4)^2} \Leftrightarrow \frac{|x^2 + 6x| - 9}{(x^2 - 5x + 4)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 4, \\ |x^2 + 6x| \geq 9. \end{cases}$$

Решим неравенство $|x^2 + 6x| \geq 9$:

$$\begin{cases} x^2 + 6x - 9 \geq 0, \\ x^2 + 6x + 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 - 3\sqrt{2}, \\ x \geq -3 + 3\sqrt{2}, \\ x = -3. \end{cases}$$

Исключая из полученного набора точки 1 и 4 , получаем множество решений исходного неравенства: $(-\infty; -3 - 3\sqrt{2}] \cup \{-3\} \cup [-3 + 3\sqrt{2}; 4) \cup (4; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3 - 3\sqrt{2}] \cup \{-3\} \cup [-3 + 3\sqrt{2}; 4) \cup (4; +\infty)$.

3. 3. Решите неравенство: $25x^2 - 3|3 - 5x| < 30x - 9$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$25x^2 - 30x + 9 - 3|3 - 5x| < 0 \Leftrightarrow (5x - 3)^2 - 3|3 - 5x| < 0.$$

Сделав замену $t = |3 - 5x|$, получаем неравенство $t^2 - 3t < 0$, откуда $0 < t < 3$,

Тогда: $0 < |5x - 3| < 3$, откуда $0 < x < \frac{3}{5}$ или $\frac{3}{5} < x < \frac{6}{5}$.

Ответ: $\left(0; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

4. 4. Решите неравенство: $25x^2 - 4|8 - 5x| < 80x - 64$.

Решение.

Решим второе неравенство системы:

$$25x^2 - 80x + 64 - 4|8 - 5x| < 0 \Leftrightarrow (5x - 8)^2 - 4|8 - 5x| < 0.$$

Сделаем замену $y = |8 - 5x|$. Тогда $y^2 - 4y < 0 \Leftrightarrow 0 < y < 4$.

Вернемся к исходной переменной:

$$0 < |8 - 5x| < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 8 - 5x < 4, \\ -4 < 8 - 5x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{5} < x < \frac{8}{5}, \\ \frac{8}{5} < x < \frac{12}{5}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right) \cup \left(\frac{8}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

5. 5. Решите неравенство: $3|x + 3| - 3x \leq 14 - |2 - x|$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} 3|x + 3| + |2 - x| \leq 3x + 14 &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 14 \leq 3(x + 3) + (2 - x) \leq 3x + 14, \\ -3x - 14 \leq 3(x + 3) - (2 - x) \leq 3x + 14. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 14 \leq 2x + 11 \leq 3x + 14, \\ -3x - 14 \leq 4x + 7 \leq 3x + 14. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5, \\ x \geq -3, \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 7. \\ x \leq 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $[-3; 7]$.

Приведем другое решение:

Как и в первом решении запишем неравенство в виде:

$$3|x + 3| + |x - 2| \leq 3x + 14.$$

Заметим, что левая часть представляет из себя кусочно-линейную функцию, которая возрастает при $x \geq -3$ и убывает при $x \leq -3$. Это означает, что в точке -3 она достигает минимума равного 5. Таким образом правая часть $3x + 14 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq -3$. Тогда неравенство принимает вид:

$$3(x + 3) + |x - 2| \leq 3x + 14 \Leftrightarrow |x - 2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x - 2 \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 7.$$

6. 6. Решите неравенство: $3|x + 1| + \frac{1}{2}|x - 2| - \frac{3}{2}x \leq 8$.

Решение.

Раскрывая модули, получаем три случая:

Первый случай.

$$\begin{cases} -3x - 3 - \frac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x \leq 10, \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1.$$

Второй случай.

$$\begin{cases} 3x + 3 - \frac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ -1 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4, \\ -1 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 2.$$

Третий случай.

$$\begin{cases} 3x + 3 + \frac{1}{2}x - 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 6, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 3.$$

Объединяя промежутки, получаем $-2 \leq x \leq 3$.

Ответ: $[-2; 3]$.

7. 7. Решите неравенство: $3x - |x + 8| - |1 - x| \leq -6$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$-|x + 8| - |1 - x| \leq -3x - 6 \Leftrightarrow |x + 8| + |1 - x| \geq 3x + 6.$$

Последнее неравенство заведомо выполняется, если правая часть отрицательна, то есть при $x < -2$.

Если $x \geq -2$, то

$$x + 8 + |x - 1| \geq 3x + 6 \Leftrightarrow |x - 1| \geq 2(x - 1).$$

Это верно тогда и только тогда, когда $x - 1 \leq 0$. Решение неравенства: $x \leq 1$.

Ответ: $(-\infty; 1]$.

8. 8. Решите неравенство: $|x + 2| - x|x| \leq 0$.

Решение.

При любом $x \leq 0$ неравенство $|x + 2| - x|x| \leq 0$ не выполняется. При $x > 0$ неравенство равносильно неравенству $x^2 - x - 2 \geq 0$, решением которого с учетом условия $x > 0$ является луч $x \geq 2$.

Ответ: $[2; +\infty)$.

9. 9. Решите неравенство: $\left| 2x^2 + \frac{19}{8}x - \frac{1}{8} \right| \geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}$.

Решение.

Неравенство равносильно совокупности:

$$\begin{aligned} \left[\begin{aligned} 2x^2 + \frac{19}{8}x - \frac{1}{8} &\geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}, \\ -2x^2 - \frac{19}{8}x + \frac{1}{8} &\geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8} \end{aligned} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{4} &\leq 0, \\ x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} &\leq 0 \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} (x-3)\left(x+\frac{3}{4}\right) &\leq 0, \\ (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) &\leq 0 \end{aligned} \right] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Ответ: $[-1; 3]$.

10. 10. Решите неравенство: $\left| x^2 - \frac{29}{12}x - \frac{35}{12} \right| \geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12}$.

Решение.

Неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\begin{aligned} \left| x^2 - \frac{29}{12}x - \frac{35}{12} \right| \geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12} &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x^2 - \frac{29}{12}x - \frac{35}{12} &\geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12}, \\ -x^2 + \frac{29}{12}x + \frac{35}{12} &\geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12} \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{3} &\leq 0, \\ x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} &\leq 0 \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} (x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right) &\leq 0, \\ (x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) &\leq 0 \end{aligned} \right] \Leftrightarrow -0,5 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Ответ: $[-0,5; 3]$.

11. 11. Решите неравенство: $\left| \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right|^{x-1,2} + \left| \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right|^{1,2-x} \leq 2$.

Решение.

Неравенство имеет смысл при $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \neq 0$, то есть при $x \neq 1$.

Пусть $\left| \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right|^{x-1,2} = t$. Тогда неравенство принимает вид $t + \frac{1}{t} \leq 2$, откуда $t = 1$ или $t < 0$. При всех допустимых x основание степени положительно и, следовательно, $t > 0$. Значит, неравенство выполняется только при $t = 1$.

Выясним, при каких x это происходит:

$$\left| \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right|^{x-1,2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \left| \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right| &= 1, \\ \begin{cases} x-1,2=0, \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x=2,5, \\ x=1,2, \\ x=-0,5. \end{cases}$$

Ответ: $\{-0,5; 1,2; 2,5\}$.

12. 12. Решите неравенство: $|2x - 6|^{x+1} + |2x - 6|^{-x-1} \leq 2$.

Решение.

Неравенство имеет смысл при $2x - 6 \neq 0$, то есть при $x \neq 3$.

Пусть $|2x - 6|^{x+1} = t, t > 0$. Тогда неравенство принимает вид

$$t + \frac{1}{t} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t} \leq 0.$$

Последнее неравенство выполнено только при $t = 1$. Значит,

$$|2x - 6|^{x+1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 6| = 1, \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,5, \\ x = 3,5, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: $\{-1; 2,5; 3,5\}$.

13. 13. Решите неравенство $1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}$.

Решение.

Заметим, что $x^2 = |x|^2$ и преобразуем неравенство:

$$\frac{x^2 - 2|x| - 23}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(|x| - 1 - 2\sqrt{6})(|x| - 1 + 2\sqrt{6})}{x^2} \leq 0.$$

Учитывая, что $|x| + 2\sqrt{6} - 1 > 0$ при всех значениях x , получаем: $|x| - 1 - 2\sqrt{6} \leq 0$ при условии $x \neq 0$.

Тогда $-1 - 2\sqrt{6} \leq x < 0$ или $0 < x \leq 1 + 2\sqrt{6}$.

Ответ: $[-1 - 2\sqrt{6}; 0) \cup (0; 1 + 2\sqrt{6}]$.

14. 14. Решите неравенство $2^{|x|} - 6 - \frac{9 \cdot 2^{|x|} - 37}{4^{|x|} - 7 \cdot 2^{|x|} + 12} \leq \frac{1}{2^{|x|} - 4}$.

Решение.

Сделаем замену $y = 2^{|x|}$.

Получим

$$y - 6 - \frac{9y - 37}{y^2 - 7y + 12} \leq \frac{1}{y - 4};$$

$$y - 6 - \frac{9y - 37}{y^2 - 7y + 12} - \frac{1}{y - 4} \leq 0;$$

$$y - 6 - \left(\frac{9y - 37}{y^2 - 7y + 12} + \frac{1}{y - 4} \right) \leq 0;$$

$$y - 6 - \frac{9y - 37 + y - 3}{(y - 3)(y - 4)} \leq 0;$$

$$y - 6 - \frac{10(y - 4)}{(y - 3)(y - 4)} \leq 0;$$

$$\frac{(y - 8)(y - 1)(y - 4)}{(y - 3)(y - 4)} \leq 0.$$

$$y \leq 1; \quad 3 < y < 4; \quad 4 < y \leq 8.$$

После	обратной	замены	получаем	
$-3 \leq x < -2;$	$-2 < x < -\log_2 3;$	$x = 0;$	$\log_2 3 < x < 2;$	$2 < x \leq 3.$

Ответ: $[-3; -2) \cup (-2; -\log_2 3) \cup \{0\} \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3].$