Смешанные неравенства

1. 1. Решите неравенство

$$\log_2\left(\left(7^{-x^2}-3\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_2\frac{7^{-x^2}-3}{7^{-x^2+16}-1}>\log_2\left(7^{7-x^2}-2\right)^2.$$

Решение.

Пусть $t=7^{-x^2}$, $0<t\le 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_2\left((t-3)\left(7^{16}t-1\right)\right)+\log_2\frac{t-3}{7^{16}t-1}>\log_2\left(7^7t-2\right)^2.$$

Так как $t-3<0$, имеем $7^{16}t-1<0$, а значит, $0<t<\dfrac{1}{7^{16}}<\dfrac{2}{7^7}$.

Получаем:

$$\begin{cases}\log_2(t-3)^2>\log_2(7^7t-2)^2,\\ 0<t<\dfrac{1}{7^{16}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|t-3|>\left|7^7t-2\right|,\\ 0<t<\dfrac{1}{7^{16}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-t>2-7^7t,\\ 0<t<\dfrac{1}{7^{16}}\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<\frac{1}{7^{16}}.$$

Поясним: неравенство $3-t>2-7^7t$ эквивалентно неравенству $(7^7-1)t>-1$ и выполнено для всех значений переменной. Итак,

$$7^{-x^2}<7^{-16}\Leftrightarrow x^2>16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<-4.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$.

2. 2. Решите неравенство $(2x+1)\log_5 10+\log_5\left(4^x-\dfrac{1}{10}\right)\le 2x-1$.

Решение.

Воспользуемся свойствами логарифмов:

$$(2x+1)\log_5 10+\log_5\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\le 2x-1\Leftrightarrow\log_5\left(10^{2x+1}\cdot\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\right)\le\log_5 5^{2x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4^x-\dfrac{1}{10}>0,\\ 10^{2x+1}\cdot\left(4^x-\dfrac{1}{10}\right)\le 5^{2x-1}.\end{cases}$$

Решим второе неравенство полученной системы:

$$10\cdot 10^{2x}\cdot\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\le\frac{5^{2x}}{5}\Leftrightarrow 4^x\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\le\frac{1}{50}.$$

Пусть $4^x=y$, тогда имеем:

$$y^2-\frac{1}{10}y-\frac{1}{50}\le 0\Leftrightarrow-\frac{1}{10}\le y\le\frac{1}{5}.$$

Откуда, учитывая первое неравенство системы, получаем:

$$\frac{1}{10}<4^x\le\frac{1}{5}\Leftrightarrow-\log_4 10<x\le-\log_4 5.$$

Ответ: $(-\log_4 10;\ -\log_4 5]$.

3. 3. Решите неравенство $5^{-|x-2|}\cdot\log_2(4x-x^2-2)\ge 1$.

Решение.

Покажем, что наибольшее значение левой части неравенства равно 1. Действительно,

$$0 < 5^{-|x-2|} \le 5^0 = 1.$$

В силу тождества $4x - x^2 - 2 = 2 - (x-2)^2$ имеем:

$$\log_2(4x - x^2 - 2) = \log_2(2 - (x-2)^2) \le \log_2 2 = 1.$$

Поскольку левая часть не больше 1, а правая равна 1, неравенство выполнено тогда и только тогда, когда оба множителя равны 1, откуда

$$\begin{cases} \log_2(4x - x^2 - 2) = 1, \\ 5^{-|x-2|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - (x-2)^2 = 2, \\ |x-2| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

4. 4. Решите неравенство: $\dfrac{\log_4(2^x - 1)}{x-1} \le 1$.

Решение.

Пусть $y = 2^x - 1$, тогда $x = \log_2(y+1)$, и неравенство принимает вид

$$\frac{\log_4 y}{\log_2(y+1) - 1} \le 1 \Leftrightarrow \frac{\log_4 y - \log_2(y+1) + 1}{\log_2(y+1) - 1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\log_4 \frac{4y}{(y+1)^2}}{\log_2 \frac{y+1}{2}} \le 0.$$

Перейдём к системе неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{4y}{(y+1)^2} - 1}{\frac{y+1}{2} - 1} \le 0, \\ y + 1 > 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2 - 2y + 1}{(y+1)^2(y-1)} \le 0, \\ y > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(y-1)^2}{y-1} \ge 0, \\ y > 0. \end{cases} \Leftrightarrow y > 1.$$

Вернёмся к исходной переменной, тогда: $2^x - 1 > 1 \Leftrightarrow 2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1$.

Ответ: $(1;\ +\infty)$.

5. 5. Решите неравенство $(x+1)\log_3 6 + \log_3\left(2^x - \dfrac{1}{6}\right) \le x - 1$.

Решение.

Воспользуемся свойствами логарифмов:

$$(x+1)\log_3 6+\log_3\left(2^x-\frac{1}{6}\right)\le x-1 \Leftrightarrow \log_3\left(6^{x+1}\cdot\left(2^x-\frac{1}{6}\right)\right)\le \log_3 3^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x-\dfrac{1}{6}>0, \\ 6^{x+1}\cdot\left(2^x-\dfrac{1}{6}\right)\le 3^{x-1}. \end{cases}$$

Решим второе неравенство полученной системы:

$$6^{x+1}\cdot\left(2^x-\frac{1}{6}\right)\le 3^{x-1} \Leftrightarrow 2^x\left(2^x-\frac{1}{6}\right)\le\frac{1}{18}.$$

Пусть $2^x=y$, тогда неравенство примет вид:

$$y^2-\frac{1}{6}y-\frac{1}{18}\le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le y\le\frac{1}{3}.$$

Откуда, учитывая первое неравенство системы, получаем:

$$\frac{1}{6}<2^x\le\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\log_2 6<x\le-\log_2 3.$$

Ответ: $(-\log_2 6;\ -\log_2 3]$.

6. 6. Решите неравенство: $\dfrac{(x^2+x)\lg(x^2+2x-2)}{|x-1|}\ge\dfrac{\lg(-x^2-2x+2)^2}{x-1}$.

Решение.

Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{(x^2+x)\lg(x^2+2x-2)}{|x-1|}\ge\frac{\lg(-x^2-2x+2)^2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(x^2+x)\lg(x^2+2x-2)}{|x-1|}\ge\frac{2\lg(x^2+2x-2)}{x-1}.$$

При $x>1$:

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2+x-2)\lg(x^2+2x-2)}{x-1}\ge 0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+2)\lg(x^2+2x-2)}{x-1}\ge 0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2+2x-2)\ge 0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-2\ge 1, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+3)\ge 0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

При $x<1$:

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2+x+2)\lg(x^2+2x-2)}{1-x}\ge 0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\lg(x^2+2x-2)}{1-x}\ge 0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2+2x-2)\ge 0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-2\ge 1, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3\ge 0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+3)\ge 0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow x\le -3.$$

Таким образом, получаем, что решение неравенства — множество $(-\infty;\,-3]\cup(1;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,-3]\cup(1;\,+\infty)$.

7. 7. Решите неравенство: $\dfrac{(x^2+x)\log_8(x^2+4x-4)}{|x-2|}\ge\dfrac{\log_8(-x^2-4x+4)^6}{x-2}$.

Решение.

Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{(x^2+x)\log_8(x^2+4x-4)}{|x-2|} \geq \frac{\log_8(-x^2-4x+4)^6}{x-2} \Leftrightarrow \frac{(x^2+x)\log_8(x^2+4x-4)}{|x-2|} \geq \frac{6\log_8(x^2+4x-4)}{x-2}.$$

При $x>2$:

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2+x-6)\log_8(x^2+4x-4)}{x-2} \geq 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+3)\log_8(x^2+4x-4)}{x-2} \geq 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8(x^2+4x-4) \geq 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-4 \geq 1, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+5) \geq 0, \\ x>2. \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$$

При $x<2$:

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2+x+6)\log_8(x^2+4x-4)}{2-x} \geq 0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_8(x^2+4x-4)}{2-x} \geq 0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8(x^2+4x-4) \geq 0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-4 \geq 1, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-5 \geq 0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+5) \geq 0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -5, \\ 1 \leq x < 2. \end{array}\right.$$

Таким образом, получаем, что решение неравенства — множество $(-\infty;-5]\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-5]\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$.

8. 8. Решите неравенство: $\dfrac{1-\sqrt{1-4\log_8^2 x}}{\log_8 x} < 2$.

Решение.

После замены $t=\log_8 x$, получаем $\dfrac{1-\sqrt{1-4t^2}-2t}{t}<0$. Значит,

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-4t^2}-2t>0,\\ t<0\end{cases}\quad \text{или} \quad \begin{cases}1-\sqrt{1-4t^2}-2t<0,\\ t>0.\end{cases}$$

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-4t^2}-2t>0,\\ t<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1-4t^2<4t^2-4t+1,\\ 4t^2\le 1,\\ t<0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le t<0.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$-\frac{1}{2}\le \log_8 x<0\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{8}}\le x<1$$

Решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-4t^2}-2t<0,\\ t>0.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1-4t^2>4t^2-4t+1,\\ 4t^2\le 1,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<\frac{1}{2}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$0<\log_8 x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1<x<\sqrt{8}$$

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4};\ 1\right)\cup(1;\ \sqrt{8})$.

Ответ: $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4};\ 1\right)\cup(1;\ \sqrt{8})$.

9. 9. Решите неравенство: $\dfrac{1-\sqrt{1-8\log_2^2 x}}{2\log_2 x}<1$.

Решение.

После замены $t=2\log_2 x$, получаем $\dfrac{1-\sqrt{1-2t^2}-t}{t}<0$. Значит,

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-2t^2}-t>0,\\ t<0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}1-\sqrt{1-2t^2}-t<0,\\ t>0.\end{cases}$$

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-2t^2}-t>0,\\ t<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2t^2<t^2-2t+1,\\ 2t^2\le 1,\\ t<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t(3t-2)>0,\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le t\le\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ t<0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le t<0.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\le 2\log_2 x<0\Leftrightarrow 2^{-\frac{\sqrt{2}}{4}}\le x<1$$

Решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-2t^2}-t<0,\\ t>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2t^2>t^2-2t+1,\\ 2t^2\le 1,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<t<\dfrac{2}{3},\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le t\le\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<\frac{2}{3}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$0<2\log_2 x<\frac{2}{3}\Leftrightarrow 1<x<2^{\frac{1}{3}}$$

Таким образом, получаем, что решением исходного неравенства является множество $\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{4}};\ 1\right)\cup(1;\ 2^{\frac{1}{3}})$.

Ответ: $\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{4}};\ 1\right)\cup\left(1;\ 2^{\frac{1}{3}}\right)$.

10. 10. Решите неравенство: $\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\sqrt{3^x-10\sqrt{3^x}+9}\ge 0$.

Решение.

Найдём, при каких значениях x подкоренное выражение неотрицательно. Пусть $\sqrt{3^x}=t$:

$$t^2-10t+9\geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-9)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leq 1, \\ t\geq 9. \end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

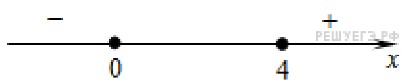
$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3^x}\leq 1, \\ \sqrt{3^x}\geq 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x\leq 1, \\ 3^x\geq 81 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 0, \\ x\geq 4. \end{array}\right.$$

Тем самым, область определения неравенства: $(-\infty;\ 0]\cup[4;\ +\infty)$.
Решим неравенство методом интервалов. Найдём нули левой части:

$$3^{\frac{x-2}{2}}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2}=0 \Leftrightarrow x=2,$$

$$3^x-10\sqrt{3^x}+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Расставим точки на прямой и определим знаки на области определения:



Таким образом, решение исходного неравенства: $\{0\}\cup[4;\ +\infty)$.

Ответ: $\{0\}\cup[4;\ +\infty)$.

11. 11. Решите неравенство: $\left(2^{\frac{x-4}{2}}-1\right)\sqrt{2^x-10\sqrt{2^x}+16}\geq 0.$

Решение.

Найдём, при каких значениях x подкоренное выражение неотрицательно. Пусть $\sqrt{2^x}=t$:

$$t^2-10t+16\ge 0\Leftrightarrow (t-2)(t-8)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le 2, \\ t\ge 8. \end{array}\right.$$

Тогда:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2^x}\le 2, \\ \sqrt{2^x}\ge 8 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x\le 4, \\ 2^x\ge 64 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 2, \\ x\ge 6. \end{array}\right.$$

Тем самым, область определения неравенства: $(-\infty;\ 2]\cup[6;\ +\infty)$.
Решим неравенство методом интервалов. Найдём нули левой части:

$$2^{\frac{x-4}{2}}-1=0\Leftrightarrow \frac{x-4}{2}=0\Leftrightarrow x=4, \text{(не входит в ОДЗ)}$$

$$2^x-10\sqrt{2^x}+16=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Расставим точки на прямой и определим знаки на области определения:

Таким образом, решение исходного неравенства: $\{2\}\cup[6;\ +\infty)$.

Ответ: $\{2\}\cup[6;\ +\infty)$.

12. 12. Решите неравенство $\log_x(\log_9(3^x-9))<1$.

Решение.

Поскольку $3^x>9$, сразу имеем $x>2$. Поэтому $0<\log_9(3^x-9)<x$. Это значит, что $1<3^x-9<9^x$. Для первого неравенства имеем $x>\log_3 10$. Второе неравенство выполнено всегда, так как $t^2-t+9>0$ при всех t из-за отрицательности дискриминанта (замена $3^x=t$). Таким образом, $(\log_3 10;+\infty)$.

Ответ: $(\log_3 10;\ +\infty)$.

13. 13. Решите неравенство $\dfrac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}\ge 1$.

Решение.

Поскольку знак разности $\log_a b - \log_a c$ на ОДЗ совпадает с знаком произведения $(a-1)(b-c)$, имеем :

$$\frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)-\log_2 2^x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2-1)(3\cdot 2^{x-1}-1-2^x)}{x} \geq 0, \\ 3\cdot 2^{x-1}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 2^x-1}{x} \geq 0, \\ 2^{x-1} > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2^x-2^1}{x} \geq 0, \\ 2^x > \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} \geq 0, \\ x > \log_2\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 1, \\ x < 0. \end{array}\right. \\ x > \log_2\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2\dfrac{2}{3} < x < 0, \\ x \geq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\log_2\dfrac{2}{3};\ 0\right)\cup[1;\ +\infty)$.

14. 14. Решите неравенство: $\dfrac{2}{5^x-1}+\dfrac{5^x-2}{5^x-3} \geq 2$.

Решение.

Пусть $z=5^x$, получаем:

$$\frac{2}{z-1}+\frac{z-2}{z-3} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<z\leq 2, \\ 3<z\leq 5. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $0<x\leq \log_5 2$ или $\log_5 3<x\leq 1$.

Ответ: $(0;\ \log_5 2]\cup(\log_5 3;\ 1]$.

15. 15. Решите неравенство: $\dfrac{0,2^{|x^2-4x+2|}-0,04}{3-x} \leq 0$.

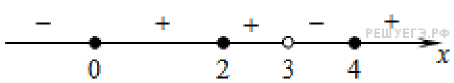
Решение.

Решим неравенство методом интервалов. Найдём нули числителя:

$$0,2^{|x^2-4x+2|}-0,04=0 \Leftrightarrow 0,2^{|x^2-4x+2|}=0,2^2 \Leftrightarrow |x^2-4x+2|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+2=2, \\ x^2-4x+2=-2. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x=0, \\ x^2-4x+4=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Расставим знаки на числовой прямой:



Таким образом, множество решений второго уравнения: $(-\infty;\ 0]\cup\{2\}\cup(3;\ 4]$.

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup\{2\}\cup(3;\ 4]$.

16. 16. Решите неравенство: $\dfrac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x} \geq 0$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x}\geq 0\Leftrightarrow \frac{3^{|x^2-2x-1|}-3^2}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3-1)(|x^2-2x-1|-2)}{x}\geq 0\Leftrightarrow \frac{|x^2-2x-1|^2-2^2}{x}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)}{x}\geq 0\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)(x-1)^2}{x}\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\leq x<0,\\ x=1,\\ x\geq 3.\end{array}\right.$$

Ответ: $[-1;\ 0)\cup\{1\}\cup[3;\ +\infty)$.

17. 17. Решите неравенство: $9^{\lg x}+x^{2\lg 3}\geq 6$.

Решение.

Решение неравенства ищем при условии $x>0$. Так как при этом условии $9^{\lg x}=3^{2\lg x}=\left(x^{\log_x 3}\right)^{\frac{2}{\log_x 10}}=x^{2\lg 3}$, то получаем

$$9^{\lg x}\geq 3\Leftrightarrow \lg x\geq \frac{1}{2}\Leftrightarrow x\geq \sqrt{10}.$$

Ответ: $\left[\sqrt{10};\ +\infty\right)$.

18. 18. Решите неравенство: $9^{\lg x}+x^{2\lg 3}\leq \frac{2}{3}$.

Решение.

Заметим, что $x^{2\lg 3}=x^{\lg 9}=9^{\lg x}$ решим показательное неравенство, сводящееся к логарифмическому:

$$9^{\lg x}+x^{2\lg 3}\leq \frac{2}{3}\Leftrightarrow 9^{\lg x}+9^{\lg x}\leq \frac{2}{3}\Leftrightarrow 9^{\lg x}\leq 3^{-1}\Leftrightarrow 3^{2\lg x}\leq 3^{-1}\Leftrightarrow 2\lg x\leq -1\Leftrightarrow \lg x\leq -\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x\leq \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$.

19. 19. Решите неравенство: $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}\geq 2\sqrt[4]{5}$.

Решение.

Приведем второе слагаемое к основанию 5:

$$x^{\log_5 x}=\left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x}=5^{\log_5^2 x}.$$

Неравенство принимает вид:

$$2\cdot 5^{\log_5^2 x}\geq 2\sqrt[4]{5}\Leftrightarrow 5^{\log_5^2 x}\geq 5^{0,25}\Leftrightarrow |\log_5 x|\geq \frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\leq \frac{1}{\sqrt{5}},\\ x\geq \sqrt{5}.\end{array}\right.$$

Решение неравенства: $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right]\cup[\sqrt{5};\ +\infty)$.

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right]\cup[\sqrt{5};\ +\infty)$.

20. 20. Решите неравенство: $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}>2\sqrt[4]{3}$.

Решение.

Приведем второе слагаемое к основанию 3:

$$x^{\log_3 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = 3^{\log_3^2 x}.$$

Неравенство принимает вид $2 \cdot 3^{\log_3^2 x} > 2\sqrt[4]{3} \Leftrightarrow 3^{\log_3^2 x} > 3^{0,25} \Leftrightarrow |\log_3 x| > \dfrac{1}{2}.$

Получаем: $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ или $x > \sqrt{3}.$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup (\sqrt{3};\ +\infty).$

21. 21. Решите неравенство: $\dfrac{9^x - 3^x - 90}{3^x - 82} \le 1.$

Решение.

Пусть $y = 3^x$:

$$\frac{y^2 - y - 90}{y - 82} \le 1 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 2y - 8}{y - 82} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-4)(y+2)}{y-82} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \le -2, \\ 4 \le y < 82. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $3^x > 0$, получаем: $4 \le 3^x < 82$, откуда находим решение неравенства: $\log_3 4 \le x < \log_3 82.$

Ответ: $[\log_3 4;\ \log_3 82).$

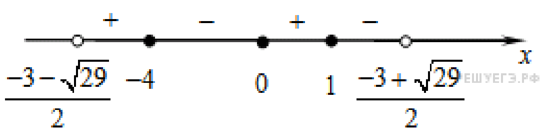
22. 22. Решите неравенство: $x \cdot \log_4(5 - 3x - x^2) \ge 0.$

Решение.

Решим второе неравенство методом интервалов. Поскольку корнями уравнения $5 - 3x - x^2 = 1$ являются числа -4 и 1, левая часть неравенства обращается в нуль в точках -4, 0 и 1. Учитывая, что

$$5 - 3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 5 < 0 \Leftrightarrow \frac{-3 - \sqrt{29}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2},$$

определим знаки левой части на ОДЗ (см. рис.):



Тем самым, получаем ответ: $\left(\dfrac{-3 - \sqrt{29}}{2};\ -4\right] \cup [0;\ 1].$

Ответ: $\left(\dfrac{-3 - \sqrt{29}}{2};\ -4\right] \cup [0;\ 1].$

23. 23. Решите неравенство: $\dfrac{3 - 0,25^x}{2 - 2^{-x}} \ge 1,5.$

Решение.

Сделаем замену $y = 2^{-x}$.

$$\frac{3-y^2}{2-y} \geq 1,5 \Leftrightarrow \frac{y^2-1,5y}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y(y-1,5)}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1,5 \\ y > 2. \end{array}\right.$$

Тогда $0 < 2^{-x} \leq \frac{3}{2}$ или $2^{-x} > 2$, откуда находим: $x < -1$ или $x \geq -\log_2 1,5$.

Ответ: $(-\infty;\ -1) \cup [-\log_2 1,5;\ +\infty)$.

24. 24. Решите неравенство: $\dfrac{3-4^x}{2-2^x} \geq \dfrac{3}{2}$.

Решение.

Сделаем замену $y = 2^x$:

$$\frac{3-y^2}{2-y} \geq 1,5 \Leftrightarrow \frac{y^2-\frac{3}{2}y}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y\left(y-\frac{3}{2}\right)}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq y \leq \frac{3}{2} \\ y > 2. \end{array}\right.$$

Тогда $0 \leq 2^x \leq \frac{3}{2}$ или $2^x > 2$, откуда: $x \leq \log_2 \frac{3}{2}$ или $x > 1.$

Ответ: $\left(-\infty;\ \log_2 \frac{3}{2}\right] \cup (1;\ +\infty)$.

25. 25. Решите неравенство: $\dfrac{8^{-x}-5\cdot 0,5^x}{2^{-x}-2^{x+4}} \geq 0$.

Решение.

Сделаем замену $y = 2^{-x}, y > 0$.

$$\frac{y^3-5y}{y-\frac{16}{y}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2(y^2-5)}{y^2-16} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})}{(y-4)(y+4)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq |y| \leq \sqrt{5}, \\ |y| > 4. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $y = 2^{-x} > 0$, получаем $0 < 2^{-x} \leq \sqrt{5}$ или $2^{-x} > 4$, откуда находим множество решений первого неравенства системы: $(-\infty, -2) \cup [-\log_4 5, +\infty)$.

Ответ: $(-\infty, -2) \cup [-\log_4 5, +\infty)$.

26. 26. Решите неравенство: $\dfrac{8^x-5\cdot 2^x}{2^x-2^{4-x}} \geq 0$.

Решение.

Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 2^x, y > 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y^3-5y}{y-\frac{16}{y}} \geq 0, \\ y > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{y^4-5y^2}{y^2-16} \geq 0, \\ y > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})}{(y-4)(y+4)} \geq 0, \\ y > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < y \leq \sqrt{5}, \\ y > 4. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим: $x \leq \log_4 5$ или $x > 2.$

Ответ: $(-\infty;\ \log_4 5] \cup (2;\ +\infty)$.

27. 27. Решите неравенство: $\sqrt{2\cdot 9^x-7\cdot 3^{x+1}+10} \geq 3^x-10$.

Решение.

Пусть $3^x = t,\ t > 0$ тогда данное неравенство принимает вид:

$$\sqrt{2t^2 - 21t + 10} \geq t - 10.$$

Область определения этого неравенства задается неравенством:

$$2t^2 - 21t + 10 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq \dfrac{1}{2}, \\ t \geq 10. \end{array}\right.$$

При $t \leq \dfrac{1}{2}$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, следовательно, неравенство выполняется при всех $t \leq \dfrac{1}{2}$.

Далее имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{2t^2 - 21t + 10} \geq t - 10, \\ t \geq 10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-10)(2t-1) \geq (t-10)^2, \\ t \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-10)(t+9) \geq 0, \\ t \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 10.$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем, что неравенство верно если:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x \leq 2^{-1}, \\ 3^x \geq 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\log_3 2, \\ x \geq \log_3 10. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -\log_3 2] \cup [\log_3 10;\ +\infty)$.

28. 28. Решите неравенство: $\sqrt{3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 3} \geq 2^x - 3$.

Решение.

Пусть $2^x = t,\ t > 0$, тогда данное неравенство принимает вид:

$$\sqrt{3t^2 - 10t + 3} \geq t - 3.$$

Область определения этого неравенства задается условием:

$$3t^2 - 10t + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq \dfrac{1}{3}, \\ t \geq 3. \end{array}\right.$$

При $t \leq \dfrac{1}{3}$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, следовательно, неравенство выполняется при всех $t \leq \dfrac{1}{3}$.

Имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{3t^2 - 10t + 3} \geq t - 3, \\ t \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-3)(3t-1) \geq (t-3)^2, \\ t \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-3)(2t+2) \geq 0, \\ t \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 3.$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x \leq 3^{-1}, \\ 2^x \geq 3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\log_2 3, \\ x \geq \log_2 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -\log_2 3] \cup [\log_2 3;\ +\infty)$.

29. 29. Решите неравенство: $\left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)} + \left(7x^2-3x+1\right)^{\lg\left(x^2+1\right)} \leq 2$.

Решение.

Так как $x^2+1>0$ и $7x^2-3x+1>0$ для любого x, воспользовавшись тождеством $x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$ и методом интервалов, получаем:

$$\left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)}+\left(7x^2-3x+1\right)^{\lg\left(x^2+1\right)}\le 2\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)}\le 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg\left(\left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)}\right)\le \lg 1\Leftrightarrow \lg\left(7x^2-3x+1\right)\lg\left(x^2+1\right)\le 0\Leftrightarrow 7x^2-3x+1\le 1\Leftrightarrow 0\le x\le\frac{3}{7}.$$

Ответ: $\left[0;\ \frac{3}{7}\right]$.

30. 30. Решите неравенство: $\dfrac{36-9^{-x}}{9-3^{-x}}\ge 4$.

Решение.

Сделаем замену $t=3^{-x}$. Имеем:

$$\frac{36-t^2}{9-t}\ge 4\Leftrightarrow\frac{36-t^2-36+4t}{9-t}\ge 0\Leftrightarrow\frac{t(4-t)}{9-t}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le t\le 4,\\ t>9\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le 3^{-x}\le 4,\\ 3^{-x}>9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge-\log_3 4,\\ x<-2.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup[-\log_3 4;\ +\infty)$.

31. 31. Решите неравенство: $\log_{2x+1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x+1)\le 2$.

Решение.

$$\log_{2x+1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x+1)\le 2\ \Leftrightarrow\ \log_{2x+1}(4x-5)+\frac{1}{\log_{2x+1}(4x-5)}\le 2.$$

Сделаем замену $\log_{2x+1}(4x-5)=t$ тогда:

$$t+\frac{1}{t}\le 2\ \Leftrightarrow\ \frac{t^2-2t+1}{t}\le 0\ \Leftrightarrow\ \frac{(t-1)^2}{t}\le 0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}t=1,\\ t<0.\end{array}\right.$$

Из уравнения совокупности получаем:

$$\log_{2x+1}(4x-5)=1\ \Leftrightarrow\begin{cases}2x+1=4x-5,\\ 2x+1>0,\\ 2x+1\ne 1,\end{cases}\Leftrightarrow\ x=3.$$

Из неравенства совокупности получаем:

$$\log_{2x+1}(4x-5)<0\Leftrightarrow\frac{\lg(4x-5)}{\lg(2x+1)}<0\Leftrightarrow\frac{\lg(4x-5)-\lg 1}{\lg(2x+1)-\lg 1}<0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4x-6}{2x}<0,\\ 4x-5>0,\\ 2x+1>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<\dfrac{3}{2},\\ x>\dfrac{5}{4},\end{cases}\Leftrightarrow\ \frac{5}{4}<x<\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)\cup\{3\}$

32. 32. Решите неравенство: $\dfrac{9^x+11\cdot 3^x-93}{3^x-82}\le 1$.

Решение.

Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y=3^x$:

$$\frac{y^2+11y-93}{y-82}\le 1 \Leftrightarrow \frac{y^2+10y-11}{y-82}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(y+11)}{y-82}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\le -11, \\ 1\le y<82. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $3^x>0$, получаем: $1\le 3^x<82$, откуда находим решение неравенства: $0\le x<\log_3 82$.

Ответ: $[0;\ \log_3 82)$.

33. 33. Решите неравенство $\dfrac{8\cdot 7^x-4^{x\log_2 7}-11}{(2x-1)^2}\ge 0.$

Решение.

Точка $x=\dfrac{1}{2}$ не является решением неравенства. При $x\ne\dfrac{1}{2}$ получаем:

$$8\cdot 7^x-49^x-11\ge 0.$$

Пусть $y=7^x$, тогда $4-\sqrt{5}\le y\le 4+\sqrt{5}$. Получаем $4-\sqrt{5}\le 7^x\le 4+\sqrt{5}$, откуда $\log_7(4-\sqrt{5})\le x\le\log_7(4+\sqrt{5})$.

Нужно сравнить границы полученного отрезка с $\dfrac{1}{2}$. Имеем:

$$4-\sqrt{5}<2<\sqrt{7},\quad 4+\sqrt{5}>6>\sqrt{7}.$$

Следовательно, $\log_7(4-\sqrt{5})<\dfrac{1}{2}<\log_7(4+\sqrt{5})$, и поэтому решением неравенства являются два промежутка: $\log_7(4-\sqrt{5})\le x<\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{2}<x\le\log_7(4+\sqrt{5})$.

Ответ: $\left[\log_7(4-\sqrt{5});\ \dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\ \log_7(4+\sqrt{5})\right]$.

34. 34. Решите неравенство $\log_2\dfrac{8}{x}-\dfrac{10}{\log_2 16x}\ge 0.$

Решение.

Относительно $t=\log_2 x$ неравенство имеет вид:

$$3-t-\frac{10}{t+4}\ge 0,\ \frac{(3-t)(t+4)-10}{t+4}\ge 0,\ \frac{-t^2-t+2}{t+4}\ge 0,\ \frac{(t+2)(1-t)}{t+4}\ge 0.$$

Значит, $t<-4$ или $-2\le t\le 1$. Возвращаясь к x, получаем:

$$\log<-4,\ 0<x<\frac{1}{16}$$

или

$$-2\le\log_2 x\le 1,\ \frac{1}{4}\le x\le 2.$$

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{16}\right)\cup\left[\dfrac{1}{4};2\right]$.

35. 35. Решите неравенство $\dfrac{\log_9(2-x)-\log_{15}(2-x)}{\log_{15}x-\log_{25}x}\le\log_{25}9.$

Решение.

Левая часть неравенства определена при $x \in (0,1) \cup (1,2)$.

При $0 < x < 1$ получаем $\log_{15} x < \log_{25} x$, $\log_9(2-x) > \log_{15}(2-x)$, поэтому левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25} 9$.

При $1 < x < 2$ получаем $\log_{15} x > \log_{25} x$, $\log_9(2-x) < \log_{15}(2-x)$, поэтому левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25} 9$.

Таким образом, решение исходного неравенства (0; 1) и (1; 2).

Ответ: $(0;\ 1) \cup (1;\ 2)$.

36. 36. Решите неравенство $\log_{x-1} \sqrt{x+2} \cdot \log_3\left(x^2-2x+1\right) \geq \log_9(10-x)$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2\log_{x-1} \sqrt{x+2} \cdot \log_3(x-1) \geq \log_9(10-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3 (x-1)^{\log_{x-1}\sqrt{x+2}} \geq \log_9(10-x) \Leftrightarrow 2\log_3\sqrt{x+2} \geq \log_9(10-x)$$

при условиях $x > 1$ и $x \neq 2$. Далее:

$$\log_3(x+2) \geq \log_9(10-x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9\left(x^2+4x+4\right) \geq \log_9(10-x), \\ x+2 > 0. \end{cases}$$

Учитывая условие $x > 1$, неравенство $x+2 > 0$ можно опустить. Переходим к системе

$$\begin{cases} x^2+4x+4 \geq 10-x, \\ 10-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6 \geq 0, \\ x < 10. \end{cases}$$

откуда $x \leq -6$ или $1 \leq x < 10$. Учитывая, что $x > 1$ и $x \neq 2$, находим.

Ответ: $(1;\ 2) \cup (2;\ 10)$.

37. 37. Решите неравенство $\dfrac{81^x + 2\cdot 25^{x\log_5 3} - 5}{(4x-1)^2} \geq 0$.

Решение.

Точка $x = \dfrac{1}{4}$ не является решением неравенства. При $x \neq \dfrac{1}{4}$ получаем:

$$81^x + 2\cdot 9^x - 5 \geq 0.$$

Пусть $y = 9^x$, тогда:

$$y^2+2y-5 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \leq -1-\sqrt{6}, \\ y \geq \sqrt{6}-1. \end{array}\right.$$

Неравенство $9^x \leq -1-\sqrt{6}$ не имеет решений, а из неравенства $9^x \geq \sqrt{6}-1$ получаем: $x \geq \log_9(\sqrt{6}-1)$. Сравним $\log_9(\sqrt{6}-1)$ и $\dfrac{1}{4}$:

$$\sqrt{6}-1 < 2{,}5-1 = 1{,}5 < \sqrt{3} = 9^{\frac{1}{4}}.$$

Следовательно, $\log_9(\sqrt{6}-1) < \dfrac{1}{4}$, и поэтому решением неравенства являются два промежутка: $\log_9(\sqrt{6}-1) \leq x < \dfrac{1}{4}$ и $x > \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\left[\log_9(\sqrt{6}-1);\ \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4};\ +\infty\right)$.

38. 38. Решите неравенство $|6-7^x| \leq (7^x-6)\cdot\log_6(x+1)$.

Решение.

Ограничение на x: $x>-1$.

1) Пусть $6-7^x<0 \quad \Leftrightarrow \quad 7^x>6 \quad \Leftrightarrow \quad 7^x>7^{\log_7 6} \quad \Leftrightarrow \quad x>\log_7 6$, тогда $|6-7^x|=7^x-6$.

На рассматриваемом множестве и при $x>-1$:

$$|6-7^x| \le (7^x-6)\cdot\log_6(x+1) \Leftrightarrow (7^x-6)-(7^x-6)\cdot\log_6(x+1)\le 0 \Leftrightarrow (7^x-6)(1-\log_6(x+1))\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-\log_6(x+1)\le 0 \Leftrightarrow \log_6(x+1)\ge \log_6 6 \Leftrightarrow x+1\ge 6 \Leftrightarrow x\ge 5.$$

При $x\ge 5$ выполняются оба условия: $x>-1$ и $6-7^x<0$.

Мы получили часть решения исходного неравенства.

2) Пусть $6-7^x\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7^x\le 6 \quad \Leftrightarrow \quad 7^x\le 7^{\log_7 6} \quad \Leftrightarrow \quad x\le\log_7 6$, тогда $|6-7^x|=6-7^x$,

На рассматриваемом множестве и при $x>-1$:

$$|6-7^x| \le (7^x-6)\cdot\log_6(x+1) \Leftrightarrow (6-7^x)+(6-7^x)\cdot\log_6(x+1)\le 0 \Leftrightarrow (6-7^x)(1+\log_6(x+1))\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_7 6, \\ \log_6(x+1)\le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_7 6, \\ \log_6(x+1)\le \log_6\dfrac{1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_7 6, \\ x+1\le\dfrac{1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_7 6, \\ x\le -\dfrac{5}{6}. \end{array}\right.$$

С учетом ограничения на x получим:

$$\left[\begin{array}{l} x=\log_7 6, \\ -1<x\le -\dfrac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Значения $x\in\left[-1;-\dfrac{5}{6}\right]$ удовлетворяют условию $6-7^x\ge 0$, т.е.неравенству $x\le\log_7 6$, поскольку $\log_7 6>0$.

Итак, решениями исходного неравенства являются элементы множества $\left(-1;-\dfrac{5}{6}\right]\cup[5;+\infty)\cup\{\log_7 6\}$.

Ответ: $\left(-1;-\dfrac{5}{6}\right]\cup[5;+\infty)\cup\{\log_7 6\}$.

39. 39. Решите неравенство $\log_7((5^{-x^2}-5)(5^{-x^2+16}-1))+\log_7\dfrac{5^{-x^2}-5}{5^{-x^2+16}-1}>\log_7(5^{13-x^2}-4)^2$.

Решение.

Пусть $t=5^{-x^2}$, $0<t\le 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_7((t-5)(5^{16}t-1))+\log_7\frac{t-5}{5^{16}t-1}>\log_7(5^{13}t-4)^2.$$

Очевидно $t-5<0$, поэтому $5^{16}t-1<0$, то есть $0<t<\dfrac{1}{5^{16}}$. Заметим также, что $\dfrac{1}{5^{16}}<\dfrac{4}{5^{13}}$, поэтому больше никаких ограничений на t не возникает. Получаем:

$$\begin{cases} \log_7(t-5)^2>\log_7(5^{13}t-4)^2, \\ 0<t<\dfrac{1}{5^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-5| \ > \ |5^{13}t-4|, \\ 0<t<\dfrac{1}{5^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-t>4-5^{13}t, \\ 0<t<\dfrac{1}{5^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow 0<t<\frac{1}{5^{16}}.$$

Тогда

$$5^{-x^2}<5^{-16} \Leftrightarrow x^2>16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4, \\ x<-4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty,\ -4)\cup(4,\ +\infty)$.

40. 40. Решите неравенство $\dfrac{\log_4(x^4-4x^3+4x^2)+\log_{0,25}(6x^2-12x-9)}{x^2-2x-8}\geq 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство

$$\frac{\log_4(x^4-4x^3+4x^2)+\log_{0,25}\left(6x^2-12x-9\right)}{x^2-2x-8}\geq 0\Leftrightarrow\frac{\log_4(x^2-2x)^2-\log_4(6(x^2-2x)-9)}{(x^2-2x)-8}\geq 0.$$

Сделав замену переменной $t=x^2-2x$, получаем:

$$\frac{\log_4 t^2-\log_4(6t-9)}{t-8}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t^2-6t+9}{t-8}\geq 0,\\ t>1,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(t-3)^2}{t-8}\geq 0,\\ t>1,5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3,\\ t>8.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$x^2-2x=3\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=3;\end{array}\right.$$

$$x^2-2x>8\Leftrightarrow x^2-2x-8>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2,\\ x>4.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty,\,-2)\cup\{-1;\,3\}\cup(4,\,+\infty)$.

41. 41. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,5}(8x^2+24x-16)+\log_2(x^4+6x^3+9x^2)}{x^2+3x-10}\geq 0.$

Решение.

$$\frac{\log_{0,5}(8x^2+24x-16)+\log_2(x^4+6x^3+9x^2)}{x^2+3x-10}\geq 0\Leftrightarrow\frac{\log_2(x^2+3x)^2-\log_2(8(x^2+3x)-16)}{(x^2+3x)-10}\geq 0.$$

Сделав замену переменной $t=x^2+3x$, получаем:

$$\frac{\log_2 t^2-\log_2(8t-16)}{t-10}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t^2-8t+16}{t-10}\geq 0,\\ t>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(t-4)^2}{t-10}\geq 0,\\ t>2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4,\\ t>10.\end{array}\right.$$

$$x^2+3x=4\Leftrightarrow x^2+3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=1.\end{array}\right.$$

$$x^2+3x>10\Leftrightarrow x^2+3x-10>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-5,\\ x>2.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty,\,-5)\cup\{-4,\,1\}\cup(2,\,+\infty)$.

42. 42. Решите неравенство $\dfrac{10^x}{2\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)}\leq\dfrac{(15\cdot 3^x)^x}{9\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)}.$

Решение.

Разделим обе части неравенства на 5^x :

$$\frac{2^{x-1}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \le \frac{3^{x^2+x-2}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{(x-1)(x+2)}-2^{(x-1)}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{3^{(x-1)(x+2)}-3^{(x-1)\log_3 2}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \ge 0.$$

Решение будем искать при условиях

$$\begin{cases} x+1 \ne 0, \\ (x+1)^2 \ne 1, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1, \\ x \ne 0, \\ x > -2. \end{cases}$$

При этих условиях получаем неравенство:

$$\frac{(x-1)(x+2)-(x-1)\log_3 2}{(x+2)-1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2-\log_3 2)}{x+1} \ge 0.$$

Таким образом, множество решений исходного неравенства:

Ответ: $[\log_3 2-2;\ -1)\cup[1;\ +\infty)$.

43. 43. Решите неравенство: $\dfrac{14^{1+\lg x}}{7\lg^2(100x)\lg(0,1x)} \ge \dfrac{\left(4\cdot 2^{\lg(10x)}\right)^{1+\lg x}}{4\lg^2(100x)\lg(0,1x)}$.

Решение.

Преобразуем обе части неравенства:

$$\frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq \frac{2^{2(1+\lg x)}\cdot 2^{(1+\lg x)^2}}{4(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \Leftrightarrow \frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq \frac{2^{(1+\lg x)}\cdot 2^{\lg x^2+3\lg x+2}}{4(\lg x+2)^2(\lg x-1)}.$$

Разделив обе части на $2^{1+\lg x}$ и сократив левую часть на 7, а правую на 4, получим:

$$\frac{7^{\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq \frac{2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \Leftrightarrow \frac{7^{\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2^{\log_2 7\cdot\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq 0.$$

Сделаем замену: $y=\lg x$, тогда получим

$$\frac{2^{y\log_2 7}-2^{y^2+3y}}{(y+2)^2(y-1)} \geq 0,$$

откуда

$$\frac{y\cdot\log_2 7-(y^2+3y)}{(y+2)^2(y-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y(y-(\log_2 7-3))}{(y+2)^2(y-1)} \leq 0.$$

Решим полученное рациональное неравенство:

$$\left[\begin{array}{l} -\infty<y<-2, \\ -2<y\leq\log_2 7-3, \\ 0\leq y<1. \end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} 0<x<\dfrac{1}{100}, \\ \dfrac{1}{100}<x\leq 10^{\log_2 7-3}, \\ 1\leq x<10. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{100}\right)\cup\left(\dfrac{1}{100};\ 10^{\log_2 7-3}\right]\cup[1;\ 10)$.

44. 44. Решите неравенство $7^{-|x-3|}\cdot\log_2(6x-x^2-7)\geq 1$.

Решение.

Покажем, что наибольшее значение левой части неравенства равно 1. Действительно,

$$0<7^{-|x-3|}\leq 7^0=1.$$

В силу тождества $6x-x^2-7=-(x^2-6x+9)+2=2-(x-3)^2$ имеем:

$$\log_2(6x-x^2-7)=\log_2(2-(x-3)^2)\leq\log_2 2=1.$$

Поскольку левая часть не больше 1, а правая равна 1, неравенство выполнено тогда и только тогда, когда оба множителя равны 1, откуда

$$\begin{cases} \log_2(2-(x-3)^2)=1, \\ 7^{-|x-3|}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-(x-3)^2=2, \\ |x-3|=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

45. 45. Решите неравенство $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\dfrac{x}{3}\right)>0$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 2x^2-7x+6>0, \\ 2x^2-7x+6\neq 1, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)(x-2)>0, \\ (2x-5)(x-1)\neq 0, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1, \\ 1<x<\dfrac{3}{2}, \\ 2<x<\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{5}{2}<x<+\infty. \end{array} \right.$$

Рассмотрим исходное неравенство на множестве $(0;\ 1)\cup\left(\dfrac{5}{2};\ +\infty\right)$. тогда $2x^2-7x+6>1$, откуда $\dfrac{x}{3}>1$, то есть $3<x<+\infty$.

Рассмотрим исходное неравенство на множестве $\left(1;\ \dfrac{3}{2}\right)\cup\left(2;\ \dfrac{5}{2}\right)$, тогда $2x^2-7x+6<1$, откуда $0<\dfrac{x}{3}<1$ то есть $1<x<\dfrac{3}{2}$ или $2<x<\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)\cup\left(2, \dfrac{5}{2}\right)\cup(3, +\infty)$.

46. 46. Решите неравенство $(4^{x^2-x-6}-1)\cdot\log_{0,25}(4^{x^2+2x+2}-3)\leq 0$.

Решение.

Решение 1.

Применим теоремы о знаках на ОДЗ:

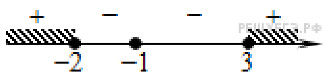
$$sgn\log_a b \underset{\text{ОДЗ}}{=} sgn((a-1)(b-1)),$$
$$sgn(a^b-1) \underset{\text{ОДЗ}}{=} sgn((a-1)\cdot b).$$

Имеем:

$$\begin{cases} 4^{x^2+2x+2}-3>0, \\ (4^{x^2-x-6}-1)(\frac{1}{4}-1)(4^{x^2+2x+2}-4)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2+2x+2}>3, \\ (x^2-x-6)(x^2+2x+1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{(x+1)^2}>\dfrac{3}{4} \quad (*), \\ (x+2)(x-3)(x+1)^2\ge 0. \end{cases}$$

Неравенство (*) верно при всех x, так как его левая часть не меньше 1, а решение второго будет выглядеть так:



Ответ: $(-\infty;\ -2]\cup\{-1\}\cup[3;\ +\infty)$.

Решение 2.

Заметим, что $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\ge 1$, откуда $4^{x^2+2x+2}-3\ge 4^1-3=1$. Поэтому второй множитель определен при всех x и, кроме того, при $x=-1$ он равен нулю (и вся правая часть вместе с ним), а при прочих x он меньше нуля, поэтому неравенство при прочих x превратится в такое

$$4^{x^2-x-6}-1\ge 0,$$
$$4^{x^2-x-6}\ge 4^0,$$
$$x^2-x-6\ge 0,$$
$$(x-3)(x+2)\ge 0,$$
$$x\in(-\infty;-2]\cup[3;\infty).$$

Ответ: $x\in(-\infty;-2]\cup\{-1\}\cup[3;\infty)$.

47. 47. Решите неравенство $x\cdot\log_{x+3}(2x+7)\ge 0$.

Решение.

Применим метод рационализации. Учтем также, что по ОДЗ $x>-3,\ x\ne -2$.

$$x\frac{\log_2(2x+7)-\log_2 1}{\log_2(x+3)-\log_2 1}\ge 0,$$
$$\frac{x(2x+6)}{x+2}\ge 0,$$
$$x\in(-3;-2)\cup[0;\infty).$$

Ответ: $x\in(-3;-2)\cup[0;\infty)$.

48. 48. Решите неравенство $\dfrac{3^x-1}{3^x-3}\le 1+\dfrac{1}{3^x-2}$.

Решение.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t-1}{t-3} \le 1 + \frac{1}{t-2} \Leftrightarrow \frac{t-1}{(t-2)(t-3)} \le 0,$$

откуда $t \le 1;\ 2 < t < 3.$

При $t \le 1$ получим: $3^x \le 1$,откуда $x \le 0.$

При $2 < t < 3$ получим: $2 < 3^x < 3$,откуда $\log_3 2 < x < 1.$

Решение исходного неравенства: $x \le 0;\ \log_3 2 < x < 1.$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup (\log_3 2;\ 1).$

49. 49. Решите неравенство $\dfrac{2x^2+9x+7}{\log_3(x^2+6x+9)} \ge 0.$

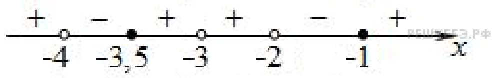
Решение.

При условии $x \ne -3$, учитывая монотонное возрастание логарифмической функции с основанием, большим 1, имеем:

$$\frac{2x^2+9x+7}{\log_3(x^2+6x+9)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+9x+7}{\log_3(x+3)^2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+9x+7}{\log_3(x+3)^2 - \log_3 1} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(2x+7)}{(x+3)^2-1} \ge 0, \\ x \ne -3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(2x+7)(x+3)}{(x+4)(x+2)(x+3)} \ge 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов



окончательно получаем: $x < -4;\quad -3,5 \le x < -3;\quad -3 < x < -2;\quad x \ge -1.$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup [-3,5; -3) \cup (-3; -2) \cup [-1; +\infty).$

50. 50. Решите неравенство $\dfrac{2x^2+3x-5}{\log_5(x^2+4x+4)} \ge 0.$

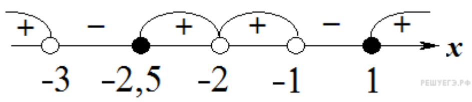
Решение.

Учитывая монотонное возрастание логарифмической функции с основанием, большим 1, имеем:

$$\frac{2x^2+3x-5}{\log_5(x^2+4x+4)} \ge 0 \ \Leftrightarrow \frac{2x^2+3x-5}{\log_5(x+2)^2} \ge 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{2x^2+3x-5}{\log_5(x+2)^2 - \log_5 1} \ge 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)(2x+5)}{(x+2)^2-1} \ge 0, \\ x \ne -2. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x+5)}{(x+3)(x+1)(x+2)^2} \ge 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов и учитывая условие $x \ne -2$,



окончательно получаем: $x < -3;\quad -2,5 \le x < -2;\quad -2 < x < -1;\quad x \ge 1.$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup [-2,5; -2) \cup (-2; -1) \cup [1; +\infty).$

Замечание. Учащиеся могли также воспользоваться тем, что на области определения логарифма выражения $\log_a b$ и $(a-1)(b-1)$имеют одинаковые знаки.

51. 51. Решите неравенство $\dfrac{35^{|x|}-5^{|x|}-5\cdot 7^{|x|}+5}{2^{\sqrt{x+2}}+1}\geq 0.$

Решение.

Разложим числитель неравенства на множители $\dfrac{\left(7^{|x|}-1\right)\left(5^{|x|}-5\right)}{2^{\sqrt{x+2}}+1}\geq 0.$

Имеем $2^{\sqrt{x+2}}+1>0$ при любом $x\geq -2$, при $x<-2$ неравенство решений не имеет.

Если $x=0$, то $7^{|x|}-1=0.$

Если $x\neq 0$, то $7^{|x|}-1>0$, тогда $5^{|x|}-5\geq 0$, откуда $|x|\geq 1.$

Ответ: $-2\leq x\leq -1,\ x=0,\ x\geq 1.$

52. 52. Решите неравенство $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_3(27x)}{x^2-|x|}\leq 0.$

Решение.

Применив метод рационализации, перейдем к системе, с учетом ОДЗ:

$$\begin{cases}\dfrac{(8x-1)(27x-1)}{x(x-1)}\leq 0,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x\leq\dfrac{1}{27},\\ \dfrac{1}{8}\leq x<1.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{27}\right]\cup\left[\dfrac{1}{8};1\right).$

53. 53. Решите неравенство: $\dfrac{3^{x^2+x}-4\sqrt{3}^{x^2+x}+3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}}\leq 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{3^{x^2+x}-4\sqrt{3}^{x^2+x}+3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}}\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{3}^{x^2+x})(\sqrt{3}^{x^2+x}-3)\geq 0,\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+2-0)(x^2+x-2)\geq 0,\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x^2+x-2\geq 0,\end{array}\right.\\ x\geq 0\end{cases},\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x\geq 1.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{0\}\cup[1;+\infty).$

54. 54. Решите систему неравенств $\begin{cases}4^x-2^{x+1}-3\geq 0,\\ \log_{0,5}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-4\right)\geq\dfrac{\log_{2,5}(x^2-x\sqrt{12}+3)}{\log_{0,4}(3-2\sqrt{3x^2}+x^2)}.\end{cases}$

Решение.

Заменой $2^x = t > 0$ первое неравенство системы приводится к виду $t^2 - 2t - 3 \geq 0$. Тогда $t \leq -1$, что невозможно, или $t \geq 3$, откуда $2^x \geq 3$, $x \geq \log_2 3$. Заметим, что $\log_2 3 > \log_2 2 = 1$,тем самым, $x > 1$.

Для $x > 1$ упростим правую часть второго неравенства:

$$\frac{\log_{2,5}(x^2 - x\sqrt{12} + 3)}{\log_{0,4}(3 - 2\sqrt{3x^2} + x^2)} = \frac{\log_{2,5}(x^2 - 2x\sqrt{3} + 3)}{\log_{0,4}(x^2 - 2|x|\sqrt{3} + 3)} \underset{x>1}{=} \frac{-\log_{0,4}(x - \sqrt{3})^2}{\log_{0,4}(x - \sqrt{3})^2} = -1.$$

Выполненные преобразования справедливы при условиях $(x - \sqrt{3})^2 > 0$, $(x - \sqrt{3})^2 \neq 1$.

Таким образом, при $x \geq \log_2 3$, $x \neq \sqrt{3}$, $x \neq \sqrt{3} \pm 1$ имеем:

$$\log_{0,5}\left(\frac{x^2}{x-1} - 4\right) \geq -1 \Leftrightarrow \log_{0,5}\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x-1}\right) \geq \log_{0,5} 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{(x-2)^2}{x-1} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 > 0, \\ x^2 - 4x + 4 \leq 2(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ x^2 - 6x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ 3 - \sqrt{3} \leq x \leq 3 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

Заметим, что $\log_2 3 > \log_2 2\sqrt{2} = 1,5 > 3 - \sqrt{3}$. С другой стороны, $3\log_2 3 = \log_2 27 < \log_2 32 = 5$, а $3\sqrt{3} = \sqrt{27} > 5$, откуда $\log_2 3 < \sqrt{3}$.

Таким образом, $\sqrt{3} - 1 < 3 - \sqrt{3} < \log_2 3 < \sqrt{3} < 2 < \sqrt{3} + 1$ и, следовательно, множеством решений данной системы неравенств является множество $[\log_2 3;\ \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};\ 2) \cup (2;\ \sqrt{3}+1) \cup (\sqrt{3}+1;\ \sqrt{3}+3]$.

Ответ: $[\log_2 3;\ \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};\ 2) \cup (2;\ \sqrt{3}+1) \cup (\sqrt{3}+1;\ \sqrt{3}+3]$.

55. 55. Решите неравенство: $1 + \dfrac{11}{2^x - 8} + \dfrac{28}{4^x - 2^{x+4} + 64} \geq 0$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$1 + \frac{11}{t-8} + \frac{28}{t^2 - 16t + 64} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 16t + 64}{(t-8)^2} + \frac{11t - 88}{(t-8)^2} + \frac{28}{(t-8)^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t + 4}{(t-8)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-4)}{(t-8)^2} \geq 0, \text{ откуда } t \leq 1;\ 4 \leq t < 8;\ t > 8.$$

При $t \leq 1$ получим: $2^x \leq 1$, откуда $x \leq 0$.

При $4 \leq t < 8$ получим: $4 \leq 2^x < 8$, откуда $2 \leq x < 3$.

При $t > 8$ получим: $2^x > 8$, откуда $x > 3$.

Решение исходного неравенства: $x \leq 0;\ 2 \leq x < 3;\ x > 3$.

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [2;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

56. 56. Решите неравенство: $1 + \dfrac{14}{3^x - 9} + \dfrac{48}{9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81} \geq 0$.

Решение.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$1+\frac{14}{t-9}+\frac{48}{t^2-18t+81} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2-18t+81}{(t-9)^2}+\frac{14t-126}{(t-9)^2}+\frac{48}{(t-9)^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2-4t+3}{(t-9)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-3)}{(t-9)^2} \geq 0, \text{ откуда } t \leq 1;\ 3 \leq t < 9;\ t > 9.$$

При $t \leq 1$ получим: $3^x \leq 1$, откуда $x \leq 0$.
При $3 \leq t < 9$ получим: $3 \leq 3^x < 9$, откуда $1 \leq x < 2$.
При $t > 9$ получим: $3^x > 9$, откуда $x > 2$.
Решение исходного неравенства: $x \leq 0;\ 1 \leq x < 2;\ x > 2$.

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

57. 57. Решите неравенство: $\dfrac{5\log_2^2 x - 100}{\log_2^2 x - 25} \geq 4$.

Решение.

Пусть $\log_2^2 x = t$, тогда

$$\frac{5t-100}{t-25} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{5t-100}{t-25} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t}{t-25} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 0, \\ t > 25. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2^2 x \leq 0, \\ \log_2^2 x > 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0, \\ \log_2 x < -5, \\ \log_2 x > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ 0 < x < \dfrac{1}{32}, \\ x > 32. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{32}\right) \cup \{1\} \cup (32; +\infty)$.

58. 58. Решите неравенство $\dfrac{\log_2(2x^2-17x+35)-1}{\log_7(x+6)} \leq 0$.

Решение.

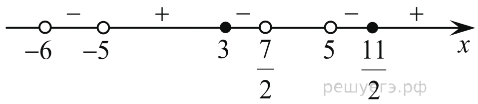
Запишем область допустимых значений функции:

$$\begin{cases} 2x^2-17x+35>0, \\ x+6>0, \\ x+6\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{7}{2}, \\ x>5 \end{array}\right. \\ x>-6, \\ x\neq -5. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-6, \\ x\neq -5, \\ x<\dfrac{7}{2} \end{cases} \\ x>5. \end{array}\right.$$

Найдем нули числителя:

$$\log_2(2x^2-17x+35)-1=0 \Leftrightarrow 2x^2-17x+35=2 \Leftrightarrow 2x^2-17x+33=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{11}{2}, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $(-6;-5)\cup\left[3;\ \dfrac{7}{2}\right)\cup\left(5;\ \dfrac{11}{2}\right]$.