

Многоугольники и их свойства

1. 1. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD . Найдите высоту треугольника ADP , проведённую из вершины D , если известно, что сторона квадрата равна 1.

Решение.

Пусть точки P и A лежат по одну сторону от прямой CD (рис. 1). Треугольник ADP — равнобедренный ($AD = DC = DP = 1$), поэтому

$$\angle DAP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADP) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ - 60^\circ)) = 75^\circ.$$

Пусть DH — высота треугольника ADP . Из прямоугольного треугольника ADH находим, что

$$DH = AD \sin \angle DAH = 1 \cdot \sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Пусть теперь точки P и A лежат по разные стороны от прямой CD (рис. 2). Треугольник ADP — равнобедренный ($AD = DC = DP = 1$), поэтому $\angle DAP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle PDA) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)) = 15^\circ$.

Из прямоугольного треугольника ADH находим, что

$$DH = AD \sin \angle DAH = 1 \cdot \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Примечание.

На наш взгляд, в ответе можно было оставить выражения $\cos 15^\circ$ и $\sin 15^\circ$. Тем не менее, на примере вычисления значения $\sin 15^\circ$ укажем два способа нахождения этих величин:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

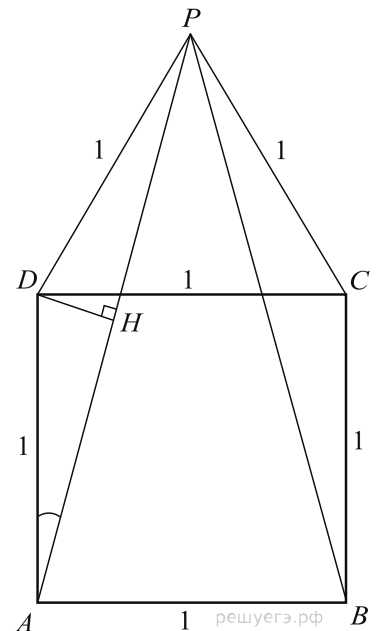
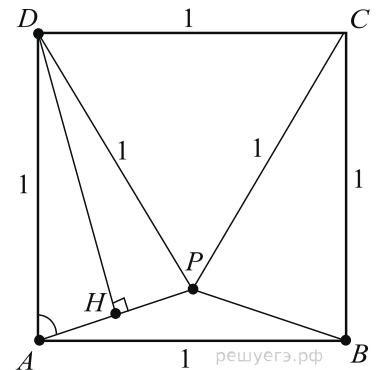
или, используя формулу половинного угла:

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Заметим, кстати, что одно из возможных доказательств равенства полученных выражения сводится к выделению полного квадрата из-под знака корня:

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{2}} = \frac{|1 - \sqrt{3}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}.$$

2. 2. Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника BMT , если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.



Решение.

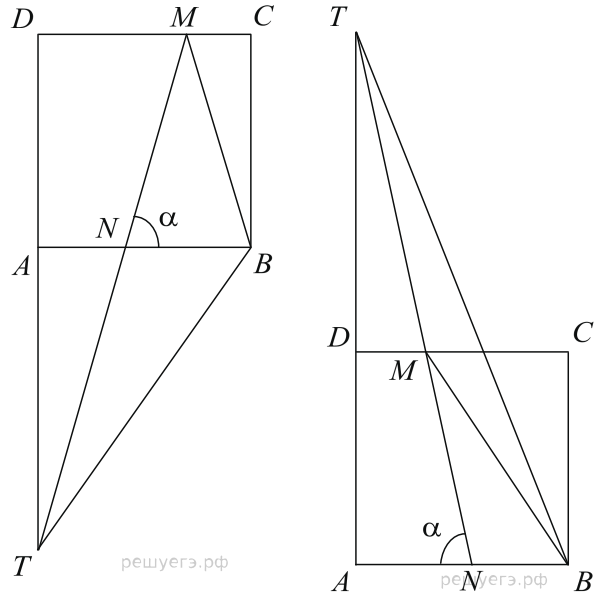
Пусть α — угол между прямыми MT и AB . По условию $\operatorname{tg} \alpha > 2$, поэтому точка M лежит на стороне DC , а для точки T возможны только два случая: точка T лежит на продолжении стороны AD за точку A или на продолжении стороны AD за точку D .

Рассмотрим первый случай. Заметим, что $S_{BMT} = S_{BNT} + S_{BMN}$. Отрезок $AN = 4$, поэтому $AT = AN \cdot \operatorname{tg} \alpha = 16$. Значит, $S_{BNT} = \frac{1}{2} \cdot BN \cdot AT = 32$.

Кроме того, $S_{BMN} = \frac{1}{2} BN \cdot BC = 16$. Следовательно, $S_{BMT} = 32 + 16 = 48$.

Во втором случае $S_{BMT} = S_{BNT} - S_{BMN}$. По-прежнему $AT = 16$, $S_{BNT} = 32$, $S_{BMN} = 16$. Следовательно, $S_{BMT} = 32 - 16 = 16$.

Ответ: 16 или 48.



3. 3. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.

Окружностей две: каждая из них вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 3 и 2 соответственно. Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

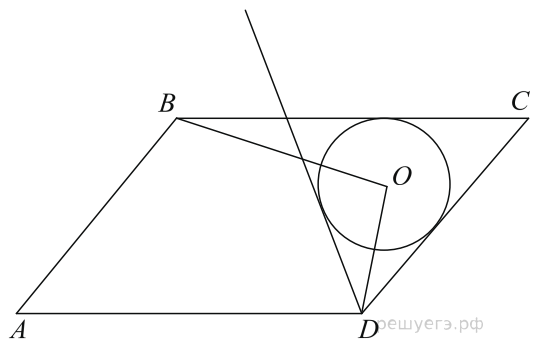
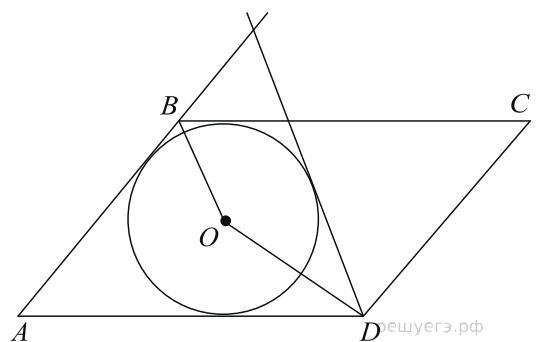
$$S_{ABOD} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

Для треугольника со стороной 2 радиус равен $r = \frac{2 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{13\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{13\sqrt{3}}{6}$.



4. 4. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE .

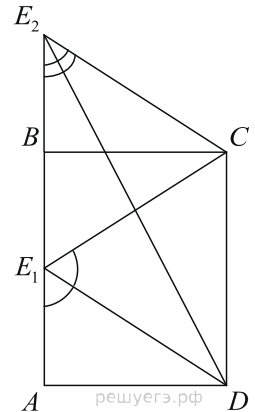
Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. По свойству параллельных прямых $\angle AED = \angle EDC$. Следовательно, треугольник DEC равнобедренный, и $EC = CD = 2$. Получаем, что треугольник EBC — прямоугольный с гипотенузой $EC = 2$ и катетом $BC = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора $BE = 1$. Точка E может лежать как по одну, так и по другую сторону от точки B .

Если точка E лежит между A и B (точка E_1 на рисунке), то $AE = 1$.

Если точка B лежит между A и E (точка E_2 на рисунке), то $AE = 3$.

Ответ: 1 или 3.



5. 5. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O . Найдите высоту трапеции, если её средняя линия равна 3 и $\sin \angle AOB = \frac{3}{5}$.

Решение.

Пусть $\angle \alpha = \angle AOB$. Изобразим две ситуации: когда угол α , острый и когда α — тупой.

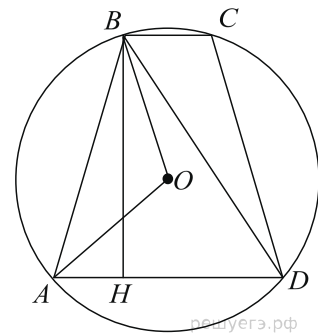
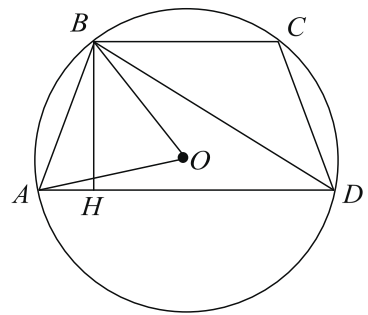
Проведём высоту BH и диагональ BD . Отрезок HD равен средней линии. Из прямоугольного треугольника BHD найдём высоту: $BH = HD \cdot \operatorname{tg} \angle BDA = 3 \operatorname{tg} \frac{\angle \alpha}{2}$. Последнее равенство верно, поскольку вписанный угол BDA в два раза меньше центрального угла AOB . Воспользуемся формулой тангенса половинного угла:

$$BH = 3 \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$\text{Если } \angle \alpha < 90^\circ, \text{ то } \cos \angle \alpha = \frac{4}{5}, \text{ и } BH = 3 \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = 1.$$

$$\text{Если } \angle \alpha > 90^\circ, \text{ то } \cos \angle \alpha = -\frac{4}{5}, \text{ и } BH = 3 \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = 9.$$

Ответ: 1 или 9.

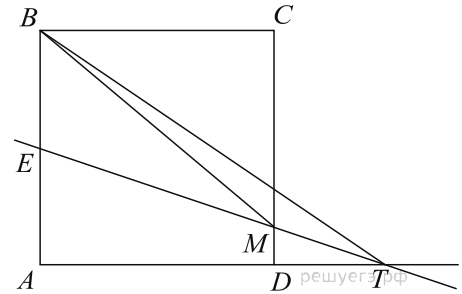


6. 6. Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α , $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Найдите площадь треугольника $BMТ$, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.

Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

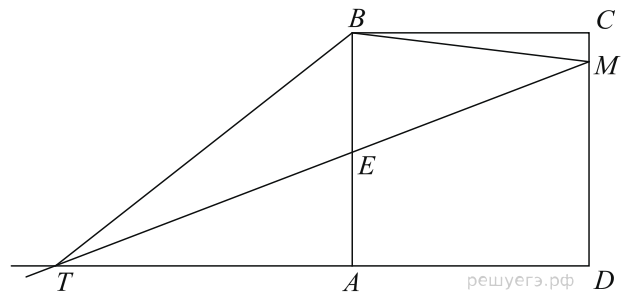
1)



$$S_{\triangle BMT} = S_{\triangle BTE} - S_{\triangle BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \tan \alpha - AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 - 4) = 2.$$

$$2) S_{\triangle BMT} = S_{\triangle BTE} + S_{\triangle BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT + \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \tan \alpha + AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4) = 10.$$

Ответ: 2 или 10.



7. 7. Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$; $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC , касается стороны CD в точке K . Найдите длину отрезка CK .

Решение.

Найдем диагональ AC . Опустим из вершин B и C на сторону AD перпендикуляры BE и CF соответственно. $AE = FD$, так как трапеция равнобедренная. $BCFE$ — прямоугольник.

$$AE = \frac{100 - 44}{2} = 28, \quad BE = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21,$$

$$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75.$$

Возможны две геометрические конфигурации.

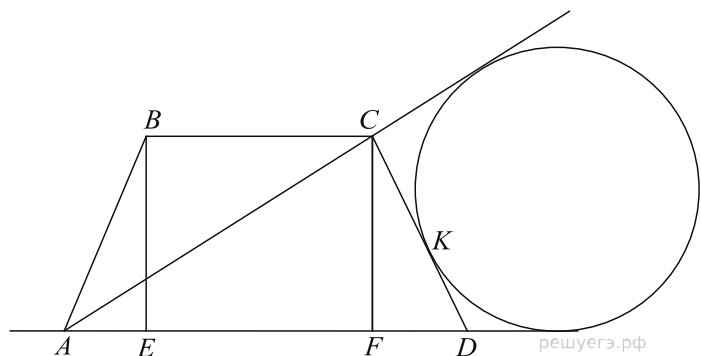
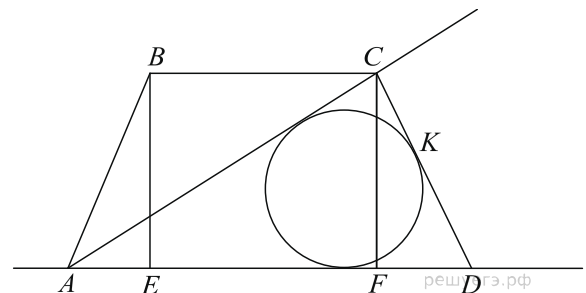
Первый вариант: окружность вписана в треугольник ACD :

$$CK = \frac{AC + CD - AD}{2} = \frac{75 + 35 - 100}{2} = 5.$$

Второй вариант: окружность касается продолжения сторон AC и AD за точками C и D соответственно и отрезка CD :

$$CK = \frac{AD + CD - AC}{2} = \frac{100 + 35 - 75}{2} = 30.$$

Ответ: 5 или 30.



Примечание.

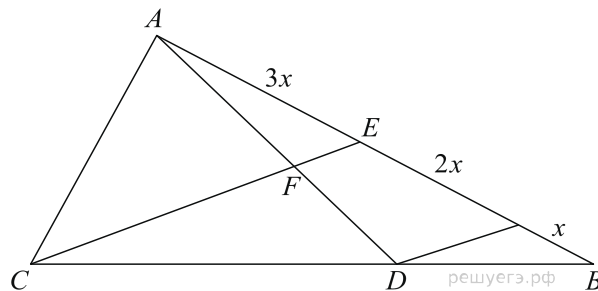
Решение опирается на известную теорему: расстояние от вершины треугольника до точки касания исходящей из этой вершины стороны со вписанной в треугольник окружностью, равно разности полупериметра треугольника и стороны, противолежащей этой вершине.

8. 8. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F . Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF ?

Решение.

Возьмем точку K на AB так, что $DK \parallel EC$.
Если $BK = x$, то $KE = 2x$ и $EA = EB = 3x$. Значит,

$$\begin{aligned} S_{AEF} &= \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot S_{ADK} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot S_{ABD} = \\ &= \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{10} \cdot S_{ABC}. \end{aligned}$$



Ответ: $\frac{1}{10}$.

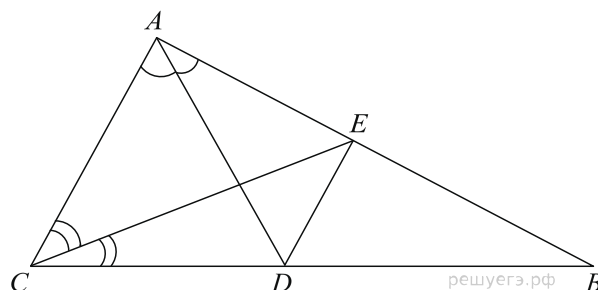
9. 9. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE . Найдите длину отрезка DE , если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

Решение.

Обозначим $BD = y$, $BE = z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\frac{3+y}{6} = \frac{z}{2}$ и $\frac{z+2}{6} = \frac{y}{3}$, откуда

$$\begin{cases} y+3 = 3z, \\ z+2 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{8}{5}, \\ y = \frac{9}{5}. \end{cases}$$

Получаем:



$$AB = \frac{18}{5}, BC = \frac{24}{5}, \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{\left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 - 6^2}{2 \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{24}{5}} = 0.$$

Значит, $\angle B = 90^\circ$. Тогда $ED^2 = y^2 + z^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{145}{25}$. Откуда $DE = \frac{\sqrt{145}}{5}$.

Ответ: $DE = \frac{\sqrt{145}}{5}$.

10. 10. Площадь трапеции $ABCD$ равна 560. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции в полтора раза больше другого.

Решение.

Пусть $AD = \frac{3}{2}BC$ (рис. 1). Положим $BC = 2a$, $AD = 3a$, $OC = x$. Треугольник AOD подобен треугольнику BOC с коэффициентом $\frac{AD}{BC} = \frac{3}{2}$, а треугольник CMB подобен треугольнику AMP с коэффициентом $\frac{BC}{AP} = \frac{2a}{\frac{3a}{2}} = \frac{4}{3}$, поэтому

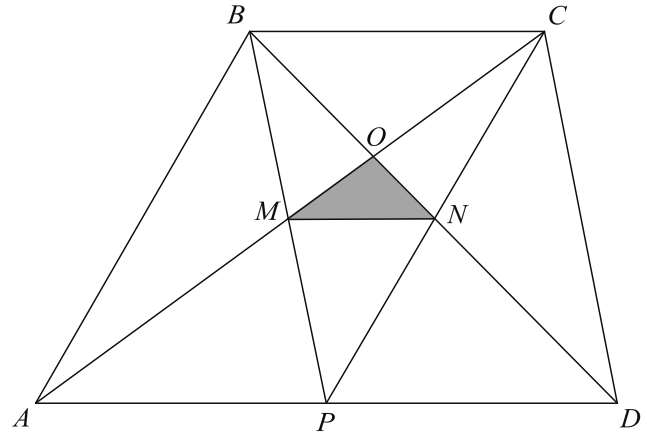


Рис. 1

решуегэ.рф

$$OA = \frac{3}{2}x, AC = OA + OC = \frac{3}{2}x + x = \frac{5}{2}x, MC = \frac{4}{7}AC = \frac{10}{7}x,$$

$$OM = MC - OC = \frac{10}{7}x - x = \frac{3}{7}x,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{3}{7}x : \left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{2}{7}$. Аналогично $\frac{ON}{OD} = \frac{2}{7}$, значит треугольники MON и AOD подобны.

Пусть h — высота трапеции. Тогда площадь трапеции

$$\frac{2a + 3a}{2}h = \frac{5}{2}ah = 560, ah = 224,$$

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{3}{5}h = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{3}{5}h = \frac{9}{10}ah = \frac{9}{10} \cdot 224 = \frac{9 \cdot 112}{5},$$

а так как треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{2}{7}$, то

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 S_{\triangle AOD} = \frac{4}{7 \cdot 7} \cdot \frac{9 \cdot 112}{5} = \frac{576}{35}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = \frac{3}{2}AD$ (рис. 2).

2). Аналогично предыдущему получим, что $\frac{OM}{OA} = \frac{3}{8}$ и $S_{\triangle AOD} = \frac{448}{5}$. Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 S_{\triangle AOD} = \frac{9}{64} \cdot \frac{448}{5} = \frac{63}{5}.$$

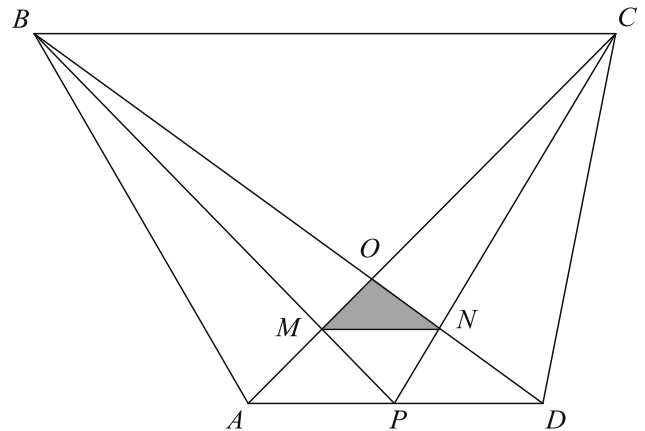


Рис. 2

решуегэ.рф

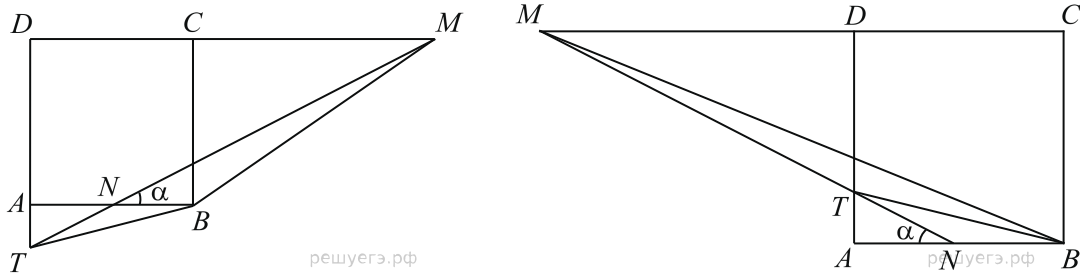
Ответ: $\frac{576}{35}$ или $\frac{63}{5}$.

11. 11. Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 0,5. Найдите площадь треугольника BMN , если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

Решение.

Возможны два случая: точка M лежит на продолжении стороны CD за точку C или на продолжении стороны CD за точку D . Пусть α — угол между прямыми MT и AB .

Рассмотрим первый случай. Заметим, что $S_{BMT} = S_{BNT} + S_{BMN}$. Отрезок $AN = 4$, поэтому $AT = AN \operatorname{tg} \alpha = 2$. Значит, $S_{BNT} = \frac{1}{2} \cdot BN \cdot AT = 4$. Кроме того, $S_{BMN} = \frac{1}{2} BN \cdot BC = 16$. Следовательно, $S_{BMT} = 4 + 16 = 20$.



Во втором случае $S_{BMT} = S_{BMN} - S_{BNT}$. По-прежнему $AT = 2$, $S_{BNT} = 4$, $S_{BMN} = 16$. Следовательно, $S_{BMT} = 16 - 4 = 12$.

Ответ: 12 или 20.

12. 12. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 34$, $AC = 65$ и $BC = 93$. На стороне BC взята точка M , причём $AM = 20$. Найдите площадь треугольника AMB .

Решение.

Пусть p — полупериметр треугольника ABC , AH — высота треугольника. Тогда

$$p = \frac{34 + 65 + 93}{2} = \frac{192}{2} = 96.$$

По формуле Герона

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \\ &= \sqrt{96(96-34)(96-65)(96-93)} = \sqrt{96 \cdot 62 \cdot 31 \cdot 3} = 31 \cdot 4 \cdot 6 = 31 \cdot 24. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 31 \cdot 24}{93} = 16.$$

Из прямоугольных треугольников AHM и AHB находим, что

$$\begin{aligned} MH &= \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12, \\ BH &= \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30. \end{aligned}$$

Если точка M лежит между точками B и H (рис. 1), то

$$BM = BH - MH = 30 - 12 = 18.$$

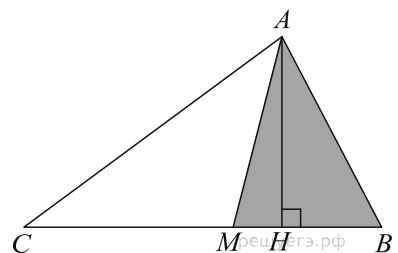
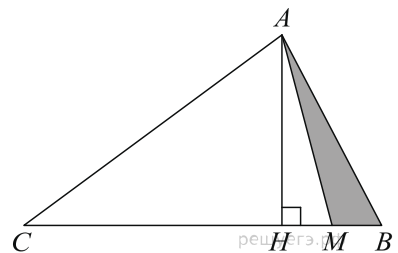
Следовательно, $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 16 = 144$. Если же точка M лежит между точками C и H (рис. 2), то

$$BM = BH + MH = 30 + 12 = 42.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 16 = 336.$$

Ответ: 144 или 336.

13. 13. Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в



точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

Решение.

Пусть $AD = 3BC$ (рис. 1). Положим $BC = a$, $AD = 3a$, $OC = x$. Треугольник COB подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{3}$, а треугольник CMB подобен треугольнику AMP с коэффициентом $\frac{BC}{AP} = \frac{a}{\frac{3a}{2}} = \frac{2}{3}$, поэтому

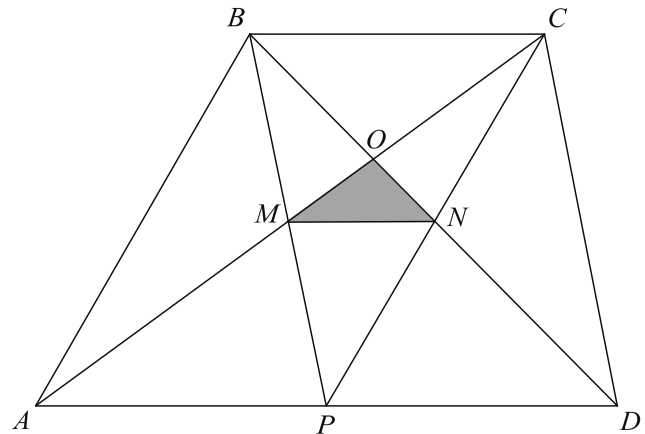


Рис. 1

решуегэ.рф

$$OA = 3x; AC = OA + OC = 3x + x = 4x; MC = \frac{2}{5}AC = \frac{8}{5}x;$$

$$OM = MC - OC = \frac{8}{5}x - x = \frac{3}{5}x,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{3}{5}x : 3x = \frac{1}{5}$. Аналогично $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{5}$.

Пусть h — высота трапеции. Тогда площадь трапеции

$$\frac{a + 3a}{2}h = 2ah = 240, ah = 120,$$

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{3}{4}h = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{3}{4}h = \frac{9}{8}ah = \frac{9}{8} \cdot 120 = 135,$$

а так как треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{1}{5}$, то

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 S_{\triangle AOD} = \frac{1}{25} \cdot 135 = \frac{27}{5}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 3AD$ (рис. 2). Аналогично предыдущему получим, что

$\frac{OM}{OA} = \frac{3}{7}$ и $S_{\triangle AOD} = 15$. Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 S_{\triangle AOD} = \frac{9}{49} \cdot 15 = \frac{135}{49}.$$

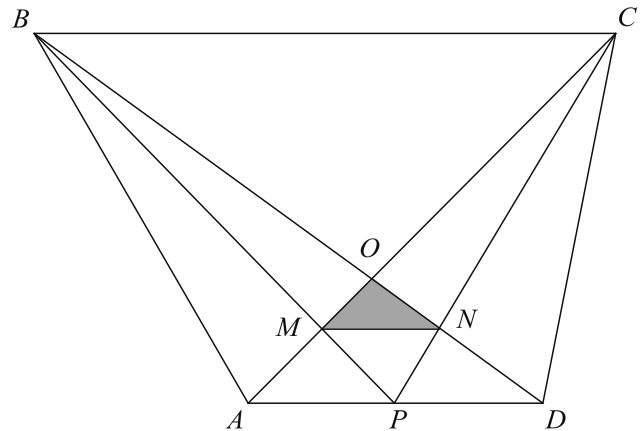


Рис. 2

решуегэ.рф

Ответ: $\frac{27}{5}$ или $\frac{135}{49}$.

14. 14. Площадь трапеции $ABCD$ равна 60, а одно из оснований трапеции втрое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O ; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.

Решение.

Пусть h — высота трапеции, а основания равны a и $3a$. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{a+3a}{2}h = \frac{4}{2}ah = 2ah = 60.$$

Откуда $ah = 30$.

Пусть $AD = 3a$, $BC = a$. Найдём площади треугольников ABC, BCD и BCP :

$$S_{ABC} = S_{BCD} = S_{BCP} \frac{1}{2}ah = 15.$$

В треугольниках BOC и AOD углы BOC и AOD равны как вертикальные, а углы OBC и ADO как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD . Следовательно, треугольники AOD и BOC подобны с коэффициентом подобия 3, откуда $S_{AOD} = 9S_{BOC}$.

Выразим площадь треугольника AOD через площадь трапеции и площади треугольников ABC, BCD и BOC :

$$S_{AOD} = S_{ABCD} - S_{ABC} - S_{BCD} + S_{BOC} \Leftrightarrow 9S_{BOC} = 60 - 15 - 15 + S_{BOC} \Leftrightarrow S_{BOC} = \frac{15}{4} = 3,75.$$

Рассмотрим треугольники BCN и PND : углы BNC и PND равны как вертикальные, углы NBC и NDP равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD , следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\frac{CN}{NP} = \frac{BC}{PD} = \frac{a}{\frac{2}{3}a} = \frac{3}{2}$.

$$\frac{CN}{NP} = \frac{BC}{PD} = \frac{a}{\frac{2}{3}a} = \frac{3}{2}.$$

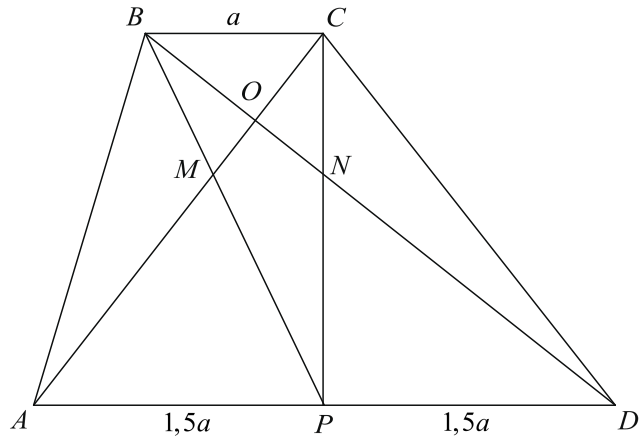
Заметим, что отношение площадей треугольников BPN и BNC равно отношению сторон CN и NP : $\frac{S_{BCN}}{S_{BPN}} = \frac{CN}{NP} = \frac{2}{3}$, значит, $S_{BCN} = \frac{2}{5}S_{BCP} = 6$, $S_{BPN} = \frac{3}{5}S_{BCP} = 9$. Аналогично, $S_{BMC} = 6$, $S_{MPC} = 9$.

Найдём площадь четырёхугольника $OMPN$:
 $S_{OMPN} = S_{BCP} - S_{BMC} - S_{BCN} + S_{BOC} = 15 - 6 - 6 + 3,75 = 6,75$.

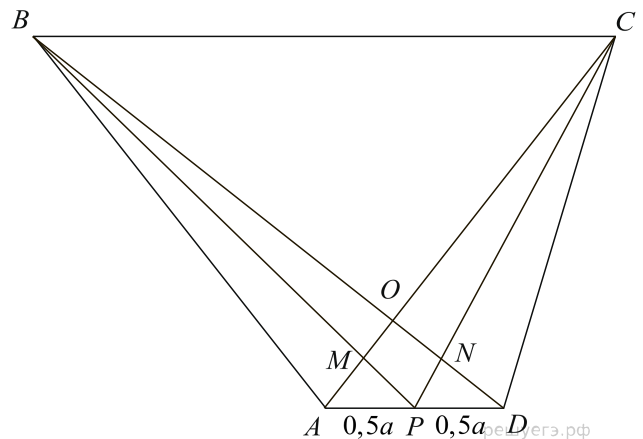
Рассмотрим случай, когда $BC = 3AD$. Найдём площади треугольников ABC, BCD и BCP :

$S_{ABC} = S_{BCD} = S_{BCP} = \frac{3}{2}ah = 45$. Треугольники BOC и AOD подобны, поэтому их площади относятся как квадрат коэффициента подобия: $S_{BOC} = 9S_{AOD}$.

Выразим площадь треугольника AOD через площадь трапеции и площади треугольников ABC, BCD и BOC :



реши.егэ.рф



реши.егэ.рф

$$S_{ABCD} - S_{ABC} - S_{BCD} = S_{AOD} - S_{BOC} \Leftrightarrow 8S_{AOD} = 45 + 45 - 60 \Leftrightarrow S_{AOD} = \frac{15}{4}.$$

$$\text{Откуда } S_{BOC} = 9S_{AOD} = \frac{270}{8} = \frac{135}{4}.$$

Из подобия треугольников AMP и BMC получим отношение: $\frac{BM}{MP} = 6$. Площади треугольников BMC и MPC относятся как длины отрезков MP и BM , откуда $S_{MPC} = \frac{1}{7}S_{BPC} = \frac{45}{7}$ и $S_{BMC} = \frac{6}{7}S_{BPC} = \frac{270}{7}$. Аналогично, $S_{BCN} = \frac{270}{7}$ и $S_{BNP} = \frac{45}{7}$.

Найдём площади треугольников BOM и CON :

$$S_{CON} = S_{BCN} - S_{BOC} = \frac{270}{7} - \frac{135}{4} = \frac{135}{28}.$$

$$S_{BOM} = S_{BMC} - S_{BOC} = \frac{270}{7} - \frac{135}{4} = \frac{135}{28}.$$

Найдём площадь четырёхугольника $OMPN$:

$$\begin{aligned} S_{OMPN} &= S_{BPC} - S_{BOC} - S_{BOM} - S_{CON} = 45 - \frac{135}{4} - \frac{135}{28} - \frac{135}{28} = 45 - 135 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28} \right) = \\ &= 45 - 135 \cdot \frac{9}{28} = 45 \left(1 - \frac{27}{28} \right) = \frac{45}{28}. \end{aligned}$$

Ответ: 6,75; $\frac{45}{28}$.

15. 15. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 17$, $AC = 10$ и $BC = 9$. На прямой BC взята точка M , причём $AM = 10$. Найдите площадь треугольника AMB .

Решение.

Пусть p — полупериметр треугольника ABC , AH — высота треугольника. Тогда

$$p = \frac{9 + 10 + 17}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

По формуле Герона

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{18(18-17)(18-10)(18-9)} = \sqrt{18 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9} = 36.$$

$$\text{Тогда } AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 36}{9} = 8.$$

Из прямоугольных треугольников AHM и AHB находим, что

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15.$$

Таким образом, либо точка M лежит на продолжении стороны BC , как показано на рисунке, либо точка M совпадает с точкой C .

Если точка M совпадает с точкой C , то $S_{\triangle AMB} = S_{\triangle ABC} = 36$.

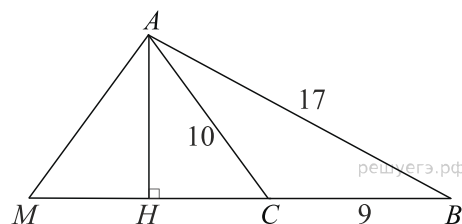
Если же точка M лежит на продолжении стороны BC , как показано на рисунке, то

$$BM = BH + MH = 15 + 6 = 21.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}BM \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 8 = 84.$$

Ответ: 36 или 84.

16. 16. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD . Найдите высоту треугольника ABP , проведённую из вершины A , если известно, что сторона квадрата равна 1.



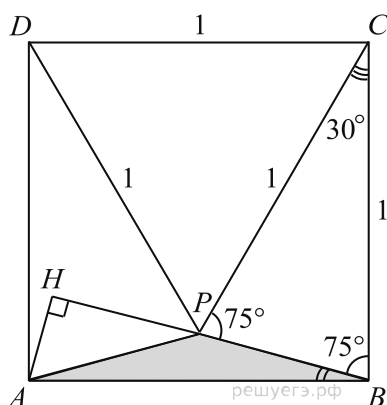
Решение.

Пусть точки P и A лежат по одну сторону от прямой CD (рис. 1). Треугольник BCP — равнобедренный ($BC = CD = CP = 1$), поэтому

$$\angle CBP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCP) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ - 60^\circ)) = 75^\circ,$$

значит,

$$\angle ABP = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$



Пусть $АН$ — высота треугольника $АВР$. Из прямоугольного треугольника $АВН$ находим, что

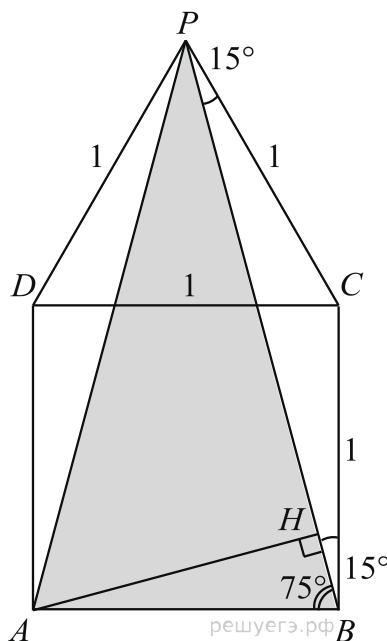
$$AH = AB \sin \angle ABH = AB \sin \angle ABP = 1 \cdot \sin 15^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Пусть теперь точки P и A лежат по разные стороны от прямой CD (рис.2). Треугольник BCP — равнобедренный ($BC = CD = CP = 1$), поэтому

$$\angle CBP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCP) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)) = 15^\circ,$$

значит,

$$\angle ABP = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$



Из прямоугольного треугольника ABH находим, что

$$AH = AB \sin \angle ABH = AB \sin \angle ABP = 1 \cdot \sin 75^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

17. 17. Дан треугольник ABC , площадь которого равна 55. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE — равнобедренный с основанием AE и высотой BD . Найдите площадь треугольника ABE , если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$.

Решение.

Введем следующие обозначения: $AB = BE = c$, $BC = a$, $BD = h$.

1 случай (точка E лежит между точками A и C , см. рис. 1).

Треугольник ABE равнобедренный, поэтому $\angle ABD = \angle DBE = \frac{\alpha}{2}$, а значит, $\angle CBE = \frac{\alpha}{2}$.

Углы ABE и CBD треугольников ABE и CBD равны, значит,

$$\frac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle CBE}} = \frac{hc}{ac} = \frac{h}{a} = \cos \alpha,$$

откуда $S_{\triangle DBE} = S_{\triangle CBE} \cos \alpha$.

Поскольку $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{3}{5}$, получаем

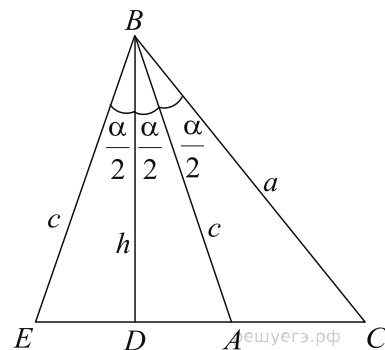
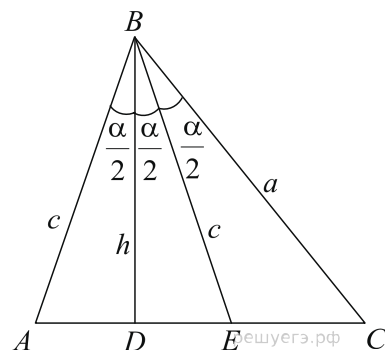
$$S_{\triangle DBE} = \frac{3}{5} S_{\triangle CBE},$$

откуда

$$S_{\triangle ABE} = \frac{6}{5} S_{\triangle CBE},$$

значит,

$$S_{\triangle ABE} = \frac{6}{11} S_{\triangle ABC} = \frac{6}{11} \cdot 55 = 30.$$



2 случай (точка A лежит между точками E и C , см. рис. 2).

Аналогично случаю 1 находим

$$S_{\triangle ABE} = \frac{6}{5} S_{\triangle ABC} = \frac{6}{5} \cdot 55 = 66.$$

Ответ: 30 или 66.

18. 18. Дан треугольник ABC . Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE , площадь которого равна 14, — равнобедренный с основанием AE и высотой BD . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$.

Решение.

Введем следующие обозначения: $AB = BE = c$, $BC = a$, $BD = h$.

1 случай (точка E лежит между точками A и C , см. рис. 1).

1. Треугольник ABE — равнобедренный, поэтому $\angle ABD = \angle DBE = \frac{\alpha}{2}$, а значит, $\angle CBE = \frac{\alpha}{2}$.

2. Углы ABE и CBD треугольников ABE и CBD равны. Следовательно,

$$\frac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle CBE}} = \frac{hc}{ac} = \frac{h}{a} = \cos \alpha,$$

откуда

$$S_{\triangle CBE} = \frac{S_{\triangle DBE}}{\cos \alpha}.$$

3. Поскольку

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{7}{25},$$

получаем:

$$S_{\triangle CBE} = \frac{25}{7} S_{\triangle DBE} = \frac{25}{7} \cdot 7 = 25.$$

4. Окончательно находим:

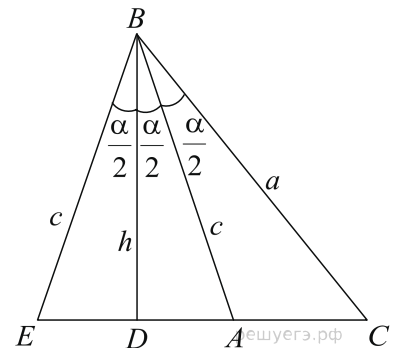
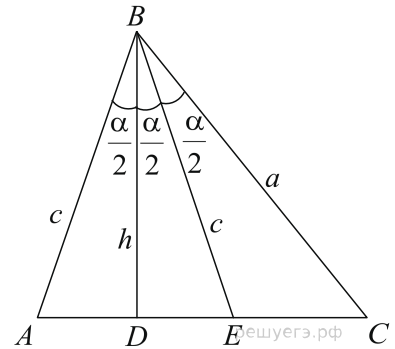
$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CBE} = 14 + 25 = 39.$$

2 случай (точка A лежит между точками E и C (см. рис. 2).

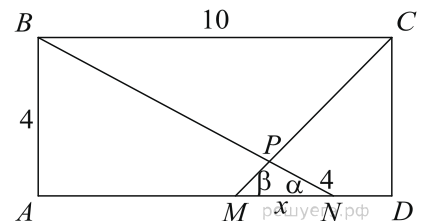
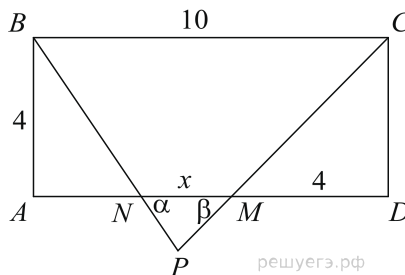
Аналогично случаю 1 находим

$$S_{\triangle ABC} = \frac{25}{7} S_{\triangle DBE} = \frac{25}{7} \cdot 7 = 25.$$

Ответ: 25 или 39.



19. 19. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 10$ на стороне AD расположены точки M и N таким образом, что $DM = 4$, при этом P — точка пересечения прямых BN и CM . Площадь треугольника MNP равна 1. Найдите длину отрезка, соединяющего точки M и N .



Решение.

В зависимости от порядка расположения точек M и N на AD есть 2 случая:

Первый случай. $S_{MNP} = \frac{MN^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)} = 1$, где $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{6-x}{4}$, $\operatorname{ctg}\beta = 1$. Тогда $2x^2 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Второй случай. $S_{MNP} = \frac{MN^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)} = 1$, где $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{6+x}{4}$, $\operatorname{ctg}\beta = 1$. Тогда $2x^2 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2,5$.

Ответ: 2 или 2,5.

20. 20. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 2$. Найдите BC если $AB = 12$.

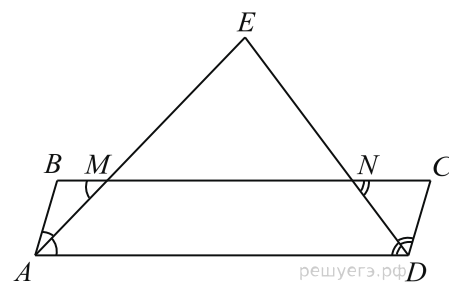
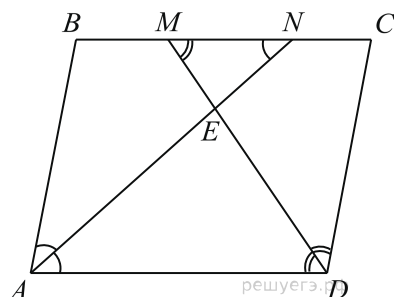
Решение.

Пусть E — точка пересечения биссектрис, $BM = x$, $MN = y$, $NC = z$. Так как $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} < 1$, то точка M лежит между точками B и N возможны два случая.

1. Точка E — внутри параллелограмма. Треугольники ABN и DMC равнобедренные, $x + y = 12 = y + z$, следовательно, $x = z$, откуда, учитывая, что $y = 2x$, получаем $z = x = 4$, $y = 8$, $BC = 2x + y = 16$.

2. Точка E — вне параллелограмма. Тогда $x = z = 12$, откуда, учитывая, что $y = 2x$, получаем $y = 24$, $BC = 2x + y = 48$.

Ответ: 16 или 48.



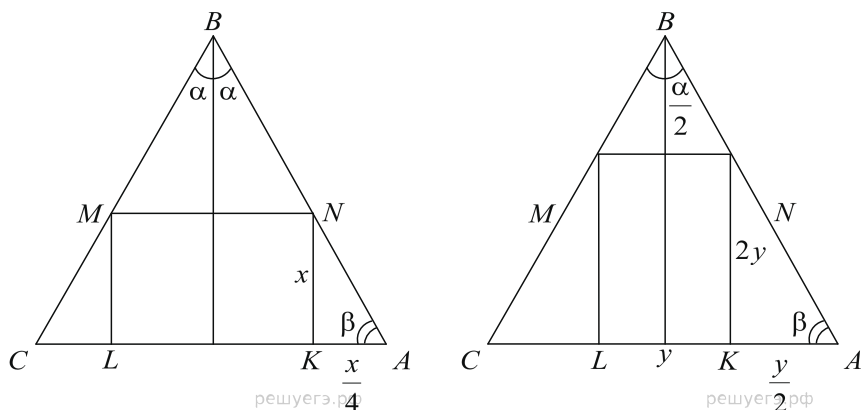
21. 21. Основание равнобедренного треугольника равно 40, косинус угла при вершине равен $\frac{15}{17}$.

Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что одна из его сторон вдвое больше другой.

Решение.

Пусть вершины K и L прямоугольника $KLMN$ лежат на основании AC равнобедренного треугольника (точка K — между A и L), а вершины M и N — на боковых сторонах BC и BA соответственно.

Обозначим



$$\angle ABC = 2\alpha, \angle CAB = \angle ACB = \beta.$$

$$\text{Тогда } \cos 2\alpha = \frac{15}{17}, \sin 2\alpha = \frac{8}{17}, \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 + \frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = 4.$$

Предположим, что сторона KL прямоугольника вдвое больше его стороны KN . Положим $KN = x, KL = 2x$. Из прямоугольного треугольника AKN находим, что $AK = KN \operatorname{ctg} \beta = \frac{x}{4}$. Тогда

$$LC = AK = \frac{x}{4}, \text{ а так как } KL = MN = 2x, \text{ то } AC = AK + KL + LC = \frac{x}{4} + 2x + \frac{x}{4} = \frac{5}{2}x = 40,$$

Откуда $x = 16$. Тогда $KL = 2x = 32$.

Следовательно, $S_{KLMN} = KL \cdot KN = 16 \cdot 32 = 512$.

Пусть теперь сторона KN прямоугольника вдвое больше его стороны KL . Положим $KL = y, KN = 2y$. Из прямоугольного треугольника находим, что $AK = KN \operatorname{ctg} \beta = \frac{y}{2}$. Тогда $LC = AK = \frac{y}{2}$, а так как $KN = MN = y$, то

$$AC = AK + KL + LC = \frac{y}{2} + y + \frac{y}{2} = 2y = 40,$$

откуда $y = 20$. Тогда $KN = 2y = 40$. Следовательно, $S_{KLMN} = KL \cdot KN = 20 \cdot 40 = 800$.

Ответ: 512 или 800.

22. 22. Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Решение.

Пусть $AD = 2BC$ (рис. 1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ — параллелограммы, поэтому M и N — середины BP и CP , значит, CM и BN — медианы треугольника BPC . Пусть h — высота трапеции. Положим $BC = a$, $AD = 2a$, $OM = x$. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot h = \frac{3}{2}ah = 810 \Leftrightarrow ah = 540.$$

$OC = 2x$, так как O — точка пересечения медиан треугольника BPC , поэтому

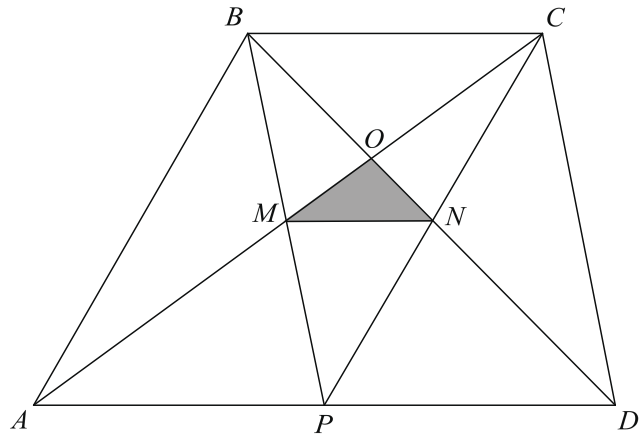


Рис. 1

решуегэ.рф

$$AM = MC = 3x, \quad OA = AM + OM = 3x + x = 4x, \quad \frac{OM}{OA} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{4}$, значит, треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{1}{4}$. Заметим, что поскольку треугольники AOD и BOC подобны с коэффициентом 2, высота треугольника AOD вдвое больше высоты треугольника BOC и составляет две трети высоты трапеции. Имеем:

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{24}ah = \frac{1}{24} \cdot 540 = \frac{45}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 2AD$ (рис. 2). Пусть h — высота трапеции. Положим $AD = a$, $BC = 2a$, $AM = 3t$. Тогда, как и в первом случае $ah = 540$.

Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, а треугольник AMP — треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{4}$. Тогда

$$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{4}, \quad \frac{PM}{PB} = \frac{1}{5}, \quad MC = 12t,$$

$$AC = AM + MC = 15t, \quad AO = 5t, \quad MO = 2t.$$

$$\text{Значит, } \frac{OM}{OA} = \frac{2t}{5t} = \frac{2}{5}. \quad \text{Аналогично,}$$

$$\frac{ON}{OD} = \frac{2}{5}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}h = \frac{2}{75}ah = \frac{2}{75} \cdot 540 = \frac{72}{5}.$$

Ответ: $\frac{45}{2}$ или $\frac{72}{5}$.

23. 23. На прямой, содержащей медиану AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C , взята точка E , удаленная от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE , если $BC = 6$, $AC = 4$.

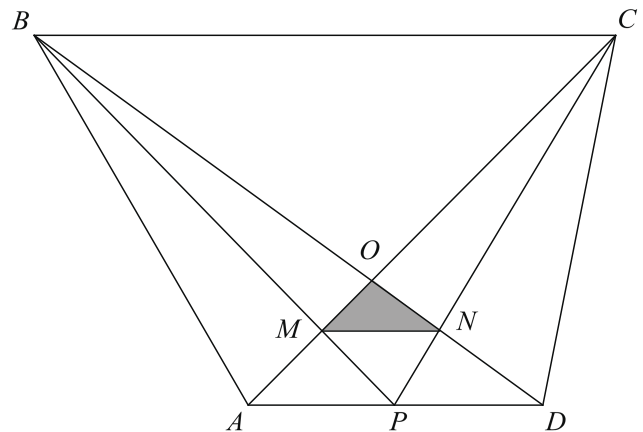


Рис. 2

решуегэ.рф

Решение.

По теореме Пифагора $AD = 5$.

Пусть точка E лежит на луче AD . Медиана AD длиннее AE , и точка E лежит внутри треугольника ABC . Тогда $ED = 1$.

Опустим из точки E перпендикуляр EF на прямую BC и рассмотрим подобные прямоугольные треугольники DEF и DAC . Из подобия треугольников находим:

$$EF = \frac{AC \cdot ED}{AD} = \frac{4}{5}$$

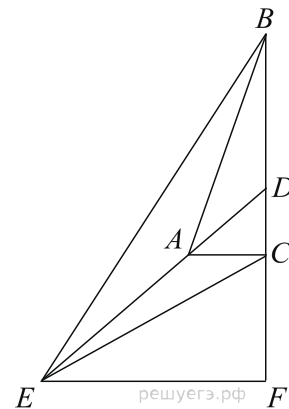
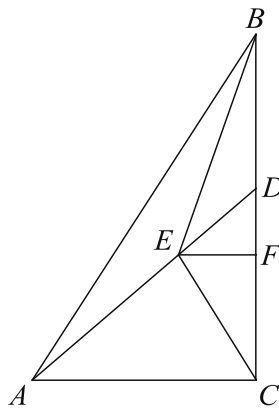
Следовательно, $S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 2,4$.

Пусть теперь точка A лежит между E и

D . В этом случае $ED = 9$ и $EF = \frac{AC \cdot ED}{AD} = \frac{36}{5}$. Тогда $S_{BCE} = 21,6$.

Ответ: 2,4; 21,6.

24. 24. Расстояния от точки M , расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 3 и 6. Через точку M проведена прямая, отсекающая от угла треугольник, площадь которого равна 48. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри угла.

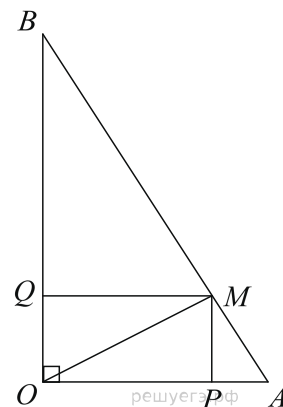


Решение.

Пусть O — вершина данного угла, P и Q — проекции точки M на стороны угла, $MP = 3$, $MQ = 6$, A и B — точки, в которых прямая, проходящая через точку M , пересекает стороны соответственно OP и OQ данного прямого угла. Обозначим $OA = x$, $OB = y$. Тогда

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}xy = 48.$$

С другой стороны,



$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOM} + S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2}OA \cdot MP + \frac{1}{2}OB \cdot MQ = \frac{1}{2}x \cdot 3 + \frac{1}{2}y \cdot 6 = \frac{3}{2}x + 3y = 48.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 48, \\ \frac{3}{2}x + 3y = 48. \end{cases}$$

Находим, что $x = 8$, $y = 12$ или $x = 24$, $y = 4$. Следовательно,

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13}$$

или

$$AB = \sqrt{24^2 + 4^2} = 4\sqrt{37}.$$

Ответ: $4\sqrt{13}$ или $4\sqrt{37}$.

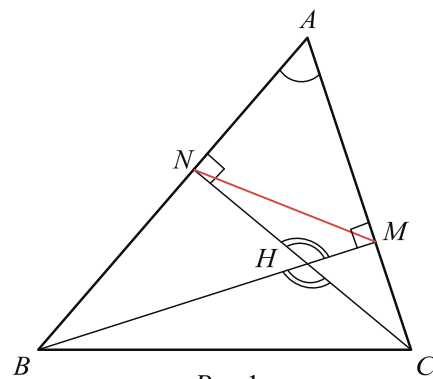
25. 25. Из вершин острых углов B и C треугольника ABC проведены две его высоты — BM и CN , причем прямые BM и CN пересекаются в точке H . Найдите угол BHC , если известно, что $MN = \frac{1}{3}BC$.

Решение.

Случай 1. Угол A — острый (см. рисунок 1).

Имеем: $\triangle ABM \sim \triangle ACN \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, откуда
 $\triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$. Далее находим:

а) из прямоугольного треугольника ABM : $\angle BAM = \arccos \frac{1}{3}$;
 б) из четырехугольника $AMHN$:
 $\angle MHN = \angle BHC = \pi - \arccos \frac{1}{3}$.



Случай 2. Угол A — тупой (см. рисунок 2).

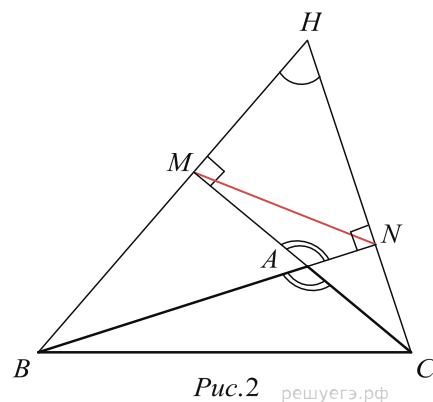
Аналогично случаю 1 имеем:

а) $\triangle HNB \sim \triangle HMC$;

б) $\triangle HNM \sim \triangle HBC$;

в) $\angle BHC = \arccos \frac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$ или $\pi - \arccos \frac{1}{3}$.



26. 26. Медианы AA_1 и BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

Решение.

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 у этих треугольников общая: $S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_1}$.

Аналогично получаем ещё 5 равенств:

$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2}, S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем $S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}$.

б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .

Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2 \Leftrightarrow AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Аналогично доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$. Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM , значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$. Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) = \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{43}{2}$.

Ответ: $\frac{43}{2}$.

