

## Окружности и треугольники

1. В треугольнике  $ABC$ ,  $AB = 15$ ,  $BC = 7$ ,  $CA = 9$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  причем  $BD : DC = 5 : 7$ . Окружности, вписанные в каждый из треугольников  $ADC$  и  $ADB$  касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ .

2. Прямые, содержащие катеты  $AC$  и  $CB$  прямоугольного треугольника  $ACB$ , являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу  $AB$ , является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника  $ACB$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ACB$ .

3. Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка  $C$ , а на другой — точки  $A$  и  $B$ , причем треугольник  $ABC$  — равнобедренный и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

4. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка  $C$ , а на другой — точки  $A$  и  $B$ , причем треугольник  $ABC$  — остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

5. Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка  $C$ , а на другой — точки  $A$  и  $B$ , причем треугольник  $ABC$  — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

6. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , площадь которого равна 114, касается средней линии, параллельной стороне  $BC$ . Известно, что  $BC = 19$ . Найдите сторону  $AB$ .

7. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 25$ ,  $AC = 7$  и  $BC = 24$ . На стороне  $BC$  взята точка  $D$ , а на отрезке  $AD$  — точка  $O$ , причем  $CD = 8$  и  $AO = 3OD$ . Окружность с центром  $O$  проходит через точку  $C$ . Найдите расстояние от точки  $C$  до точки пересечения этой окружности с прямой  $AB$ .

8. Радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равен 13,  $\cos \angle BAC = -\frac{5}{13}$ , высота, проведенная к стороне  $BC$ , равна 5. Найдите длину той хорды  $AM$  описанной окружности, которая делится пополам стороной  $BC$ .

9. Точки  $D$  и  $E$  — основания высот непрямоугольного треугольника  $ABC$ , проведенных из вершин

$A$  и  $C$  соответственно. Известно, что  $\frac{DE}{AC} = k$ ,  $BC = a$  и  $AB = b$ . Найдите сторону  $AC$ , если известно, что:

а) треугольник остроугольный, б) угол  $B$  тупой.

10. Точка  $B$  лежит на отрезке  $AC$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , касается окружности с диаметром  $BC$  в точке  $M$  и второй раз пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $K$ . Продолжение отрезка  $MB$  пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $D$ .

а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $MC$  параллельны.

б) Найдите площадь треугольника  $DBC$ , если  $AK = 3$  и  $MK = 12$ .

11. В треугольнике  $ABC$ ,  $AB = 7$ ,  $BC = 9$ ,  $CA = 4$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  причем  $BD : DC = 1 : 5$ . Окружности, вписанные в треугольники  $ADC$  и  $ADB$  касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ .

12. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина  $C$ , на другой — основание  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = 10$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника  $ABC$ .

13. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка  $C$ , а на другой — точки  $A$  и  $B$ , причем треугольник  $ABC$  — равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

14. В треугольнике  $ABC$  известны стороны:  $AB = 7$ ,  $BC = 8$ ,  $AC = 9$ . Окружность, проходящая через точки  $A$  и  $C$ , пересекает прямые  $BA$  и  $BC$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ , отличных от вершин треугольника. Отрезок  $KL$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Найдите длину отрезка  $KL$ .

15. В треугольнике  $ABC$  известны стороны:  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = 7$ . Окружность, проходящая через точки  $A$  и  $C$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BC$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ , отличных от вершин треугольника. Отрезок  $KL$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Найдите длину отрезка  $KL$ .

16. Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно  $\frac{5}{6}$ .

17. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен  $\frac{3}{5}$ .

18. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 14, а отношение катетов треугольника равно  $\frac{7}{24}$ .

19. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно  $\frac{15}{8}$ .

20. Точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$ . На окружности с диаметром  $AB$  взята точка  $C$ , удаленная от точек  $A$ ,  $M$  и  $B$  на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника  $BMC$ .

21. Точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$ . На окружности с диаметром  $AB$  взята точка  $C$ , удаленная от точек  $A$ ,  $M$  и  $B$  на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника  $BMC$ .

22. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC = 15$  и  $BC = 8$ . С центром в вершине  $B$  проведена окружность  $S$  радиуса 17. Найдите радиус окружности, вписанной в угол  $BAC$  и касающейся окружности  $S$ .

23. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC = 5$  и  $BC = 12$ . С центром в вершине  $B$  проведена окружность  $S$  радиуса 13. Найдите радиус окружности, вписанной в угол  $BAC$  и касающейся окружности  $S$ .

24. Дан треугольник со сторонами 115, 115 и 184. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

25. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

26. Точка  $O$  — центр правильного шестиугольника  $ABCDEF$  со стороной 7. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников  $BOD$ ,  $DOF$  и  $BOF$ .

27. Точка  $O$  — центр правильного шестиугольника  $ABCDEF$ , в котором  $AC = 10,5$ . Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников  $AOB$ ,  $COD$  и  $EOF$ .

28. Продолжение биссектрисы  $CD$  неравнобедренного треугольника  $ABC$  пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке  $E$ . Окружность, описанная около треугольника  $ADE$ , пересекает прямую  $AC$  в точке  $F$ , отличной от  $A$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если  $AC = 4$ ,  $AF = 2$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ .

29. Продолжение биссектрисы  $CD$  неравнобедренного треугольника  $ABC$  пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке  $E$ . Окружность, описанная около треугольника  $ADE$ , пересекает прямую  $AC$  в точке  $F$ , отличной от  $A$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если  $AC = 6$ ,  $AF = 3$ , угол  $BAC$  равен  $45^\circ$ .

30. Угол  $C$  треугольника  $ABC$  равен  $60^\circ$ ,  $D$  — отличная от  $A$  точка пересечения окружностей, построенных на сторонах  $AB$  и  $AC$  как на диаметрах. Известно, что  $DB : DC = 1 : 3$ . Найдите угол  $A$ .

31. Угол  $C$  треугольника  $ABC$  равен  $60^\circ$ ,  $D$  — отличная от  $A$  точка пересечения окружностей, построенных на сторонах  $AB$  и  $AC$  как на диаметрах. Известно, что  $DB : DC = 2 : 3$ . Найдите угол  $A$ .
32. Вневыписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы двух вневыписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 17. Найдите расстояние между их центрами.
33. Стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  равны соответственно 26 и 14,5, а его высота  $BD$  равна 10. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $BCD$ .
34. Стороны  $KM$  и  $MN$  треугольника  $KMN$  равны соответственно 30 и 25, а его высота  $MH$  равна 24. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники  $KMH$  и  $MNH$ .
35. Окружность радиуса  $8\sqrt{2}$  вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках  $M$  и  $N$ . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 12. Найдите  $MN$ .
36. Окружность радиуса  $12\sqrt{2}$  вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках  $M$  и  $N$ . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 16. Найдите  $MN$ .
37. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 9, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 4. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух его сторон.
38. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 15$ ,  $AC = 9$  и  $BC = 12$ . На стороне  $BC$  взята точка  $D$ , а на отрезке  $AD$  — точка  $O$ , причем  $CD = 4$  и  $AO = 3OD$ . Окружность с центром  $O$  проходит через точку  $C$ . Найдите расстояние от точки  $C$  до точки пересечения этой окружности с прямой  $AB$ .
39. Боковые стороны  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $BMC$ .
40. На стороне  $BA$  угла  $ABC$ , равного  $30^\circ$ , взята такая точка  $D$ , что  $AD = 2$  и  $BD = 1$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $A$  и  $D$  и касающейся прямой  $BC$ .
41. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне  $BC$ . Известно, что  $BC = 11$ . Найдите сторону  $AB$ .
42. Окружность радиуса 6 вписана в угол, равный  $60^\circ$ . Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках  $M$  и  $N$ . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 4. Найдите  $MN$ .
43. Первая окружность с центром  $O$ , вписанная в равнобедренный треугольник  $KLM$ , касается боковой стороны  $KL$  в точке  $B$ , а основания  $ML$  — в точке  $A$ . Вторая окружность с центром  $O_1$  касается основания  $ML$  и продолжений боковых сторон.
- Докажите, что треугольник  $OLO_1$  прямоугольный.
  - Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и  $AK = 16$ .
44. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  в точках  $K$ ,  $M$  и  $N$  соответственно.
- Докажите, что  $AN = \frac{AB + AC - BC}{2}$ .
  - Найдите отношение  $AK : KB$ , если известно, что  $AN : NC = 4 : 3$  и  $\angle BAC = 60^\circ$ .
45. Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон соответственно  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$ .
- Докажите, что отличная от  $A_1$  точка пересечения окружностей, описанных около треугольников  $A_1CB_1$  и  $A_1BC_1$ , лежит на окружности, описанной около треугольника  $B_1AC_1$ .
  - Известно, что  $AB = AC = 10$  и  $BC = 12$ . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры окружностей, описанных около треугольников  $A_1CB_1$ ,  $A_1BC_1$  и  $B_1AC_1$ .
46. Окружность касается стороны  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  и делит каждую из сторон  $AB$  и  $BC$  на три равные части.
- Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
  - Найдите, в каком отношении высота этого треугольника делит сторону  $BC$ .

47. Из середины катета прямоугольного треугольника на его гипотенузу опущен перпендикуляр, длина которого равна 1. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если длина одного из его катетов равна 4.