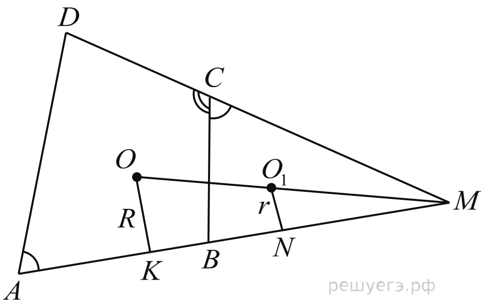
Окружности и четырёхугольники

1. 1. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые AB и DC пересекаются в точке M. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что $\angle AMD = \alpha$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCM и AMD равны соответственно r и R.

Решение.

Первый случай.

Центры O_1 и O окружностей, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно, лежат на биссектрисе MO угла AMD. Окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$, является также окружностью, вписанной в треугольник AMD и вневписанной окружностью треугольника BMC. Будем искать площадь четырехугольника $ABCD$, как разность площадей треугольников AMD и BMC.



Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, следовательно, $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$, но $\angle BCM + \angle BCD = 180^\circ$, откуда $\angle BCM = \angle BAD$. Так как треугольники BCM и AMD имеют еще общий угол AMD, они подобны, причем коэффициент подобия равен отношению радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники.

Далее имеем:

1) $S_{ABCD} = S_{\Delta ADM} - S_{\Delta BCM} = \dfrac{R^2}{r^2} S_{\Delta BCM} - S_{\Delta BCM} = \left(\dfrac{R^2}{r^2} - 1\right) S_{\Delta BCM}$.

2) $S_{\Delta BCM} = pr$, где p — полупериметр треугольника BCM, равный по свойству вневписанной окружности длине отрезка KM.

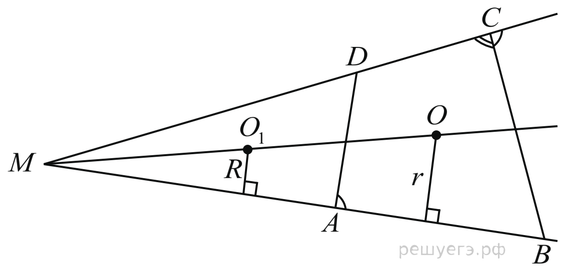
3) Из прямоугольного треугольника OKM, находим $KM = OK \operatorname{ctg} \angle OMK = R \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}$, откуда $S_{\Delta BCM} = Rr \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}$.

Подставляя найденное значение $S_{\Delta BCM}$ в формулу S_{ABCD}, окончательно получаем

$$S_{ABCD} = \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) Rr \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R(R^2 - r^2)}{r} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Второй случай.

Отличается от первого положением точки M левее точек D и A. В этом случае $R < r$ и в рассуждении они и треугольники BCM и ADM должны быть поменяны местами. Таким образом, в этом случае



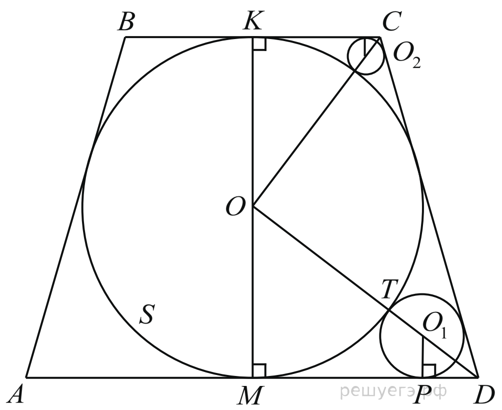
$$S_{ABCD} = \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) S_{\Delta ADM} = \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) Rr \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r(r^2 - R^2)}{R} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $S_{ABCD} = \dfrac{R(R^2 - r^2)}{r} \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}$ или $S_{ABCD} = \dfrac{r(r^2 - R^2)}{R} \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}$.

2. 2. Окружность S радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности S.

Решение.

Пусть $ABCD$ — трапеция с боковыми сторонами AB и $CD,$ а окружность S с центром $O,$ вписанная в трапецию, касается оснований $BC=36$ и $AD=64$ в точках K и M соответственно.



Точки K и M — середины оснований, поэтому $CK = 18$ и $DM = 32$. Из прямоугольных треугольников ODM и OCK находим, что

$$OD=\sqrt{OM^2+DM^2}=\sqrt{24^2+32^2}=8\sqrt{9+16}=40.$$

$$OC=\sqrt{OK^2+CK^2}=\sqrt{24^2+18^2}=6\sqrt{16+9}=30.$$

Рассмотрим случай, когда окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол $ADC,$ касается окружности S в точке $T,$ а стороны AD — в точке $P.$ Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому:

$$OO_1=OT+TO_1=24+r,$$

а так как точки D, O_1 и O лежат на одной прямой (биссектрисе угла CDA), то

$$DO_1=OD-OO_1=40-(24+r)=16-r.$$

Треугольники O_1PD и OMD подобны, поэтому $\dfrac{O_1P}{OM}=\dfrac{O_1D}{OD}$, или $\dfrac{r}{24}=\dfrac{16-r}{40}$, откуда находим, что $r = 6$.

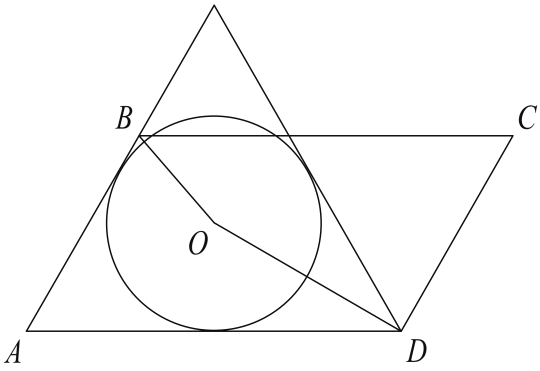
Если же окружность радиуса r_1 с центром O_2 вписана в угол BCD и касается окружности S, то аналогично получим уравнение $\dfrac{r_1}{24}=\dfrac{6-r}{30}$, из которого найдём, что $r_1=\dfrac{8}{3}$.

Ответ: 6 или $\dfrac{8}{3}$.

3. 3. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.

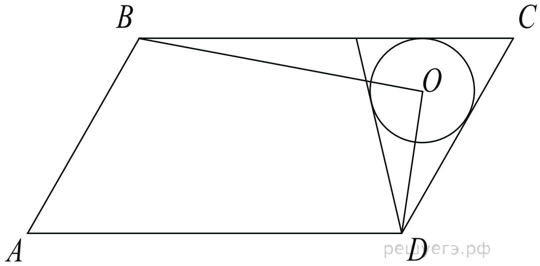
Окружностей две: каждая из них вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 — соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты правильного треугольника.



Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r=\dfrac{5\cdot\sin 60^\circ}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}AD\cdot r=\frac{10\sqrt{3}}{3}.$$



Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r=\dfrac{3\cdot\sin 60^\circ}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD}=AB\cdot AD\cdot\sin 60^\circ-\frac{1}{2}BC\cdot r-\frac{1}{2}CD\cdot r=\frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ или $\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$.

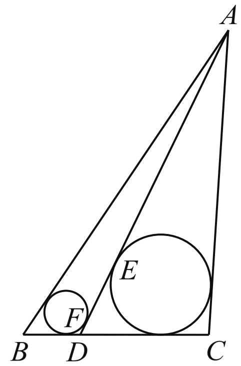
4. 4. В треугольнике ABC $AB=13$, $BC=10$, $CA=7$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC=1:4$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD=d$, $BD=x$, $DC=y$. Возможны два случая.

Первый случай. Точка D лежит на отрезке BC (верхний рисунок):

$$x=2,\ y=8,\ DE=\frac{d+y-7}{2},\ DF=\frac{d+x-13}{2}.$$



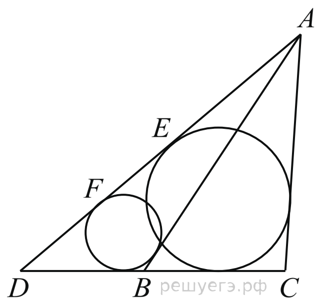
Значит, $EF=\dfrac{6+y-x}{2}=6$.

Второй случай. Точка D лежит вне отрезка BC (нижний рисунок):

$$x=\frac{10}{3},\ y=\frac{40}{3},\ DE=\frac{d+y-7}{2},\ DF=\frac{d+x-13}{2}.$$

Значит, $EF=\dfrac{6+y-x}{2}=8$.

Ответ: 6 или 8.



5. 5. Площадь трапеции $ABCD$ равна 72, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и

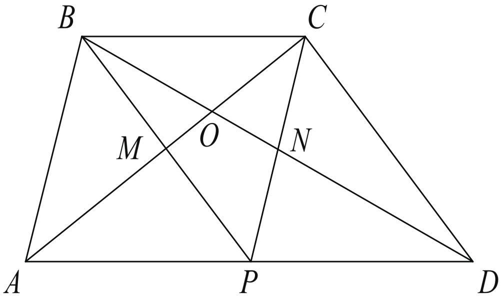
C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.

Решение.

Пусть h — высота трапеции, а основания равны a и $2a$. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 72.$$

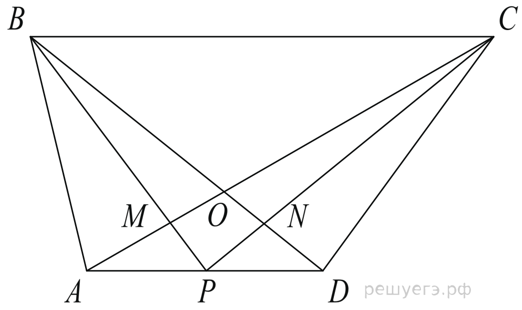
Откуда $ah = 48$.



Первый случай. Пусть $AD = 2a$, $BC = a$. Четырёхугольники $ABCP$ и $BCDP$ — параллелограммы, поэтому M и N — середины BP и CP соответственно, значит, CM и BN — медианы треугольника BPC. Следовательно, $S_{BNC} = S_{CMP} = \frac{1}{2}S_{BPC}$, а $S_{ONC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{CMP} = \frac{1}{6}S_{BPC}$.

Значит,

$$S_{OMPN} = \frac{1}{3}S_{\Delta BPC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ah = \frac{1}{6}\cdot 48 = 8.$$



Второй случай. Пусть теперь $BC = 2a$, $AD = a$. Пусть $AM = 3t$. Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом подобия 2, а треугольник AMP — треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{4}$. Тогда

$$MC = 4AM = 12t,\ AC = AM + MC = 3t + 12t = 15t,$$

$$AO = \frac{1}{3}AC = 5t,\ \frac{AM}{AO} = \frac{3t}{5t} = \frac{3}{5}.$$

Аналогично, $\frac{DN}{DO} = \frac{3}{5}$. Высота треугольника AOD, проведённая из вершины O, равна $\frac{1}{3}h$, значит:

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}h = \frac{1}{6}\cdot 48 = 8.$$

$$S_{\Delta DNP} = S_{\Delta AMP} = \frac{AM}{AO}\cdot\frac{AP}{AD}S_{\Delta AOD} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8 = 2,4.$$

Следовательно,

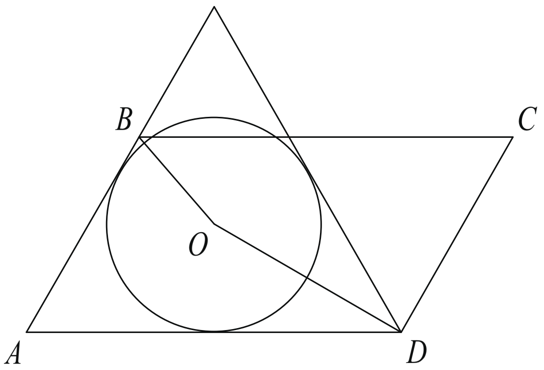
$$S_{OMPN} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta DNP} = 8 - 2,4 - 2,4 = 3,2.$$

Ответ: 8 или 3,2.

6. 6. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 7$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.

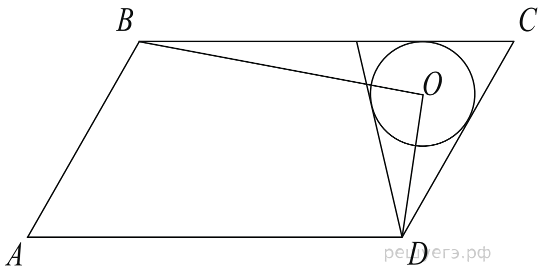
Окружностей две: каждая из них вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 7 и 3 соответственно. Для треугольника со стороной 7 радиус равен $r = \dfrac{7 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{6}.$



Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{35\sqrt{3}}{6}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \dfrac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$



Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

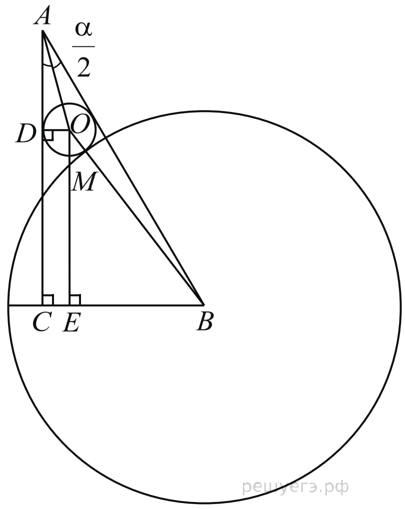
$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = 8\sqrt{3}.$$

Ответ: $\dfrac{35\sqrt{3}}{6}$ или $8\sqrt{3}$.

7. 7. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{5}{12}$, $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$.



Пусть x — радиус искомой окружности, O — ее центр, D — точка касания с лучом AC, M — точка касания с окружностью S, E — проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

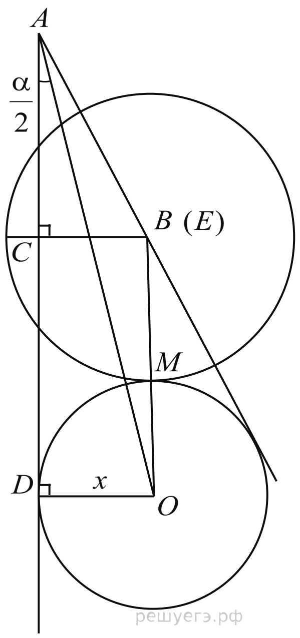
$$\operatorname{ctg}\angle OAD = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = 5.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = OD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 5x.$$

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: центр одной расположен внутри треугольника ABC, а центр второй — вне, причём искомая окружность касается окружности S внешним образом, значит, $BO = BM + MO = 8 + x$. В первом случае точка D лежит на катете AC, поэтому

$$OE = CD = AC - AD = 12 - 5x,\quad BE = BC - CE = BC - OD = 5 - x.$$



Причём $AD < AC$, то есть $5x < 12$, откуда $x < \dfrac{12}{5}$. По теореме Пифагора:

$$BO^2 = OE^2 + BE^2 \Leftrightarrow (8+x)^2 = (12-5x)^2 + (5-x)^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 146x + 105 = 0.$$

Учитывая, что $x < \dfrac{12}{5}$, находим, что $x = \dfrac{21}{25}$.

Во втором случае точка D лежит на продолжении катета AC за точку C, поэтому $OE = CD = AD - AC = 5x - 12$, причём $AD > AC$, то есть $x > \dfrac{12}{5}$.

Тогда $(8+x)^2 = (5x-12)^2 + (5-x)^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 146x + 105 = 0$.

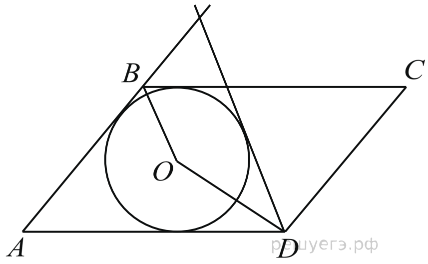
Учитывая, что $x > \dfrac{12}{5}$, находим, что $x = 5$ (это значит, что $OD = BC$, то есть точка E совпадает с вершиной B).

Ответ: $\dfrac{21}{25}$ или 5.

8. 8. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.

Окружностей две: каждая из них вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 соответственно. Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r = \dfrac{5 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.



Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

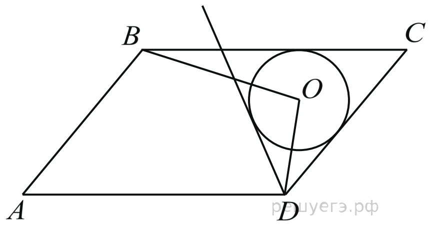
$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен

$$r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

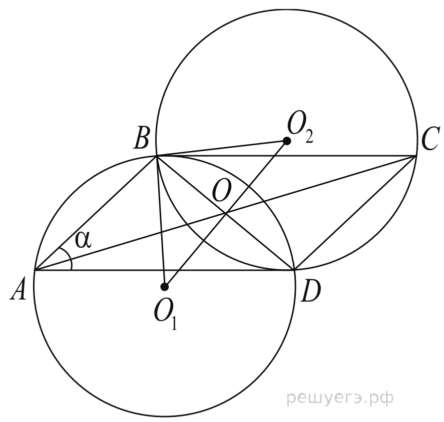


Ответ: $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ или $\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$.

9. 9. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

Решение.

Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников DAB и BCD соответственно, O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Поскольку треугольники DAB и BCD равны, то радиусы окружностей также равны. По условию $\angle BAD = \alpha$. Пусть $\alpha \le 90^\circ$. По теореме косинусов $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$. Заметим, что так как O_1 и O_2 — центры описанных окружностей, то прямая O_1O_2 — серединный перпендикуляр к диагонали BD и является биссектрисой центрального угла BO_1D равного 2α. Следовательно, $\angle BO_1O_2 = \dfrac{1}{2}\angle BO_1D = \angle BAD = \alpha$, поэтому



$$O_1O_2 = 2O_1O = 2 \cdot BO \cdot \operatorname{ctg}\angle BO_1O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BD \cdot \operatorname{ctg}\angle BO_1O = BD \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \\ = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

Если же $\alpha \ge 90^\circ$, то аналогично получим, что

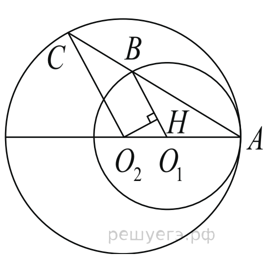
$$O_1O_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot |\operatorname{ctg}\alpha|$.

10. 10. Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, вершинами которого являются точки O_1, O_2, B и C, если $\angle ABO_1 = 15^\circ$.

Решение.

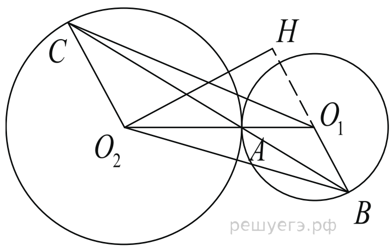
Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_1 = 15°$.



Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рисунок 1), тогда точка B лежит между точками A и C, а $O_1O_2 = O_2A - O_1A = 2$. Поскольку $\angle ABO_1 = \angle ACO_2$, прямые O_1B и O_2C параллельны, следовательно, искомый четырёхугольник — трапеция O_1BCO_2.

Пусть O_2H — перпендикуляр, проведённый из точки O_2 к прямой O_1B. В прямоугольном треугольнике O_2O_1H имеем $\angle O_2O_1H = 30°$, откуда $O_2H = \dfrac{O_1O_2}{2} = 1$.

$$S_{O_1BCO_2} = \frac{1}{2}(O_2C + O_1B) \cdot O_2H = 4.$$



Второй случай: окружности касаются внешним образом (рисунок 2), тогда точка A лежит между точками B и C, а $O_1O_2 = O_2A + O_1A = 8$. Поскольку $\angle ABO_1 = \angle ACO_2$, прямые O_1B и CO_2 параллельны. следовательно, искомый четырёхугольник — трапеция O_1BO_2C.

Пусть O_2H — перпендикуляр, проведённый из точки O_2 к прямой O_1B. В прямоугольном треугольнике O_2O_1H имеем $\angle O_2O_1H = 30°$, откуда $O_2H = \dfrac{O_1O_2}{2} = 4$.

$$S_{O_1BO_2C} = \frac{1}{2}(O_2C + O_1B) \cdot O_2H = 16.$$

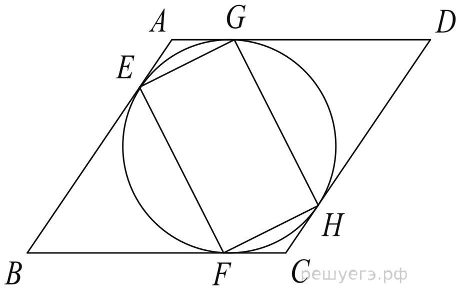
Ответ: 4 или 16.

11. 11. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм — ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 5 и 3. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

Решение.



Пусть это параллелограмм $ABCD$, а точки касания со сторонами AB, BC, CD, DA обозначены за E, F, G, H соответственно.

а) Из описанности $ABCD$ следует, что $AB + CD = AD + BC$, то есть $2AB = 2AD$, значит все стороны параллелограмма равны и это ромб.

б) Будем считать, что $AE = 3$, $EB = 5$. Центром окружности будет точка пересечения диагоналей ромба O, а радиус этой окружности — высота прямоугольного треугольника AOB – $OE = \sqrt{5 \cdot 3} = \sqrt{15}$. Тогда по теореме Пифагора находим $BO = \sqrt{15 + 25} = \sqrt{40}$, $AO = \sqrt{24}$. Значит $AC = 2\sqrt{24}$, $BD = 2\sqrt{40}$.

Поскольку точки E и F делят стороны AB и BC в одинаковом отношении 3 : 5, треугольники BEF и BAC подобны с коэффициентом $k = \dfrac{5}{8}$, и $EF \parallel AC$. Рассматривая аналогично остальные стороны $EFGH$, получаем, что это параллелограмм и даже прямоугольник (так как $AC \perp BD$). Значит его площадь равна:

$$EF \cdot EG = \frac{5}{8}AC \cdot \frac{3}{8}BD = \frac{15}{64} \cdot 2\sqrt{24} \cdot 2\sqrt{40} = \frac{15\sqrt{15}}{2}.$$

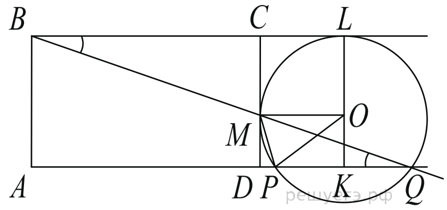
Ответ: $\dfrac{15\sqrt{15}}{2}$.

12. 12. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причём точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD.

Решение.



а) Заметим, что $\angle CBM = \angle MQD$, поскольку прямые BC и AQ параллельны. Углы $\angle DMP$ и $\angle MQD$ равны, поскольку оба равны половине дуги MP (первый — угол между касательной и хордой, второй — вписанный угол), откуда и следует утверждение задачи.

б) Обозначим центр окружности за O, а основание перпендикуляра из точки O на прямую AD за K, на прямую BC — за L. Тогда $CMOL$ — квадрат и значит радиус окружности равен 17. Тогда в треугольнике OPK имеем $PK = \sqrt{OP^2 - OK^2} = \sqrt{OP^2 - MD^2} = 8$.

Значит, $PQ = 2PK = 16$. Тогда $DK = 17$, $PD = DK - PK = 9$.

Тогда

$$DQ = 25 \text{ и } \operatorname{tg}\angle DQM = \frac{MD}{DQ} = \frac{3}{5},$$

откуда

$$AD = BC = CM \cdot \operatorname{ctg}\angle CBM = 17 \cdot \operatorname{ctg}\angle MQD = 17 \cdot \frac{5}{3} = \frac{85}{3}.$$

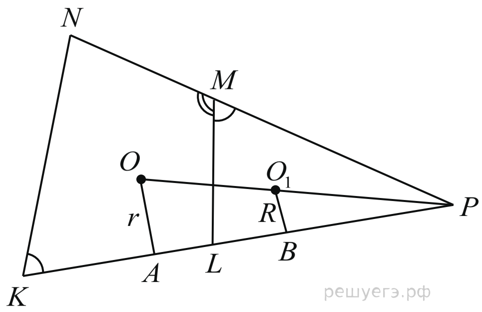
Ответ: $\frac{85}{3}$.

13. 13. Четырехугольник $KLMN$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые KL и NM пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника KPN, если известно, что $\angle KPN = \varphi$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники KPN и LMP равны соответственно r и R.

Решение.

Первый случай.

Центры O_1 и O окружностей, вписанных в треугольники KPN и LMP соответственно, лежат на биссектрисе PO угла KPN. Окружность, вписанная в четырехугольник $KLMN$, является также окружностью, вписанной в треугольник KPN и вневписанной окружностью треугольника LMP.



Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность, следовательно $\angle LKN + \angle LMN = 180°$. Но $\angle LMP + \angle LMN = 180°$, откуда $\angle LKN = \angle LMP$. Так как треугольники KPN и LMP имеют еще общий угол KPN, они подобны, причем коэффициент подобия равен отношению радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники.

Далее имеем:

1) $S_{\Delta KPN} = \dfrac{r^2}{R^2} S_{\Delta LPM}$.

2) $S_{\Delta LPM} = pR$, где p — полупериметр треугольника LPM равный длине отрезка AP, как сумма отрезков касательных проведенных из одной точки.

3) из прямоугольного треугольника OAP находим $AP = OA\,\mathrm{ctg}\,\angle OPA = r\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\varphi}{2}$, откуда $S_{\Delta LPM} = Rr\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\varphi}{2}$.

Подставляя найденное $S_{\Delta LPM}$ в формулу площади треугольника KPN, окончательно получаем

$$S_{KPN} = \frac{r^2}{R^2} Rr\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2} = \frac{r^3}{R}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}.$$

Второй случай.

Отличается от первого расположением точки P левее точек N и K. В этом случае $R > r$ и в рассуждении они и треугольники LMP и KPN должны быть поменяны местами. Таким образом, в этом случае KPN — меньший из двух треугольников, а радиус вписанной в него окружности r. Значит $S_{\mathrm{KPN}} = rp$, где p — полупериметр треугольника KPN равный отрезку PB. При этом, как и в первом случае, $PB = R\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\varphi}{2}$. Таким образом $S_{KPN} = Rr\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\varphi}{2}$.

Ответ: $S_{KPN} = \dfrac{r^3}{R}\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\varphi}{2}$ или $S_{KPN} = Rr\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\varphi}{2}$.

14. 14. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC.

Решение.

В любой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции, а средняя линия — полусумме оснований трапеции. В нашем случае полуразность оснований равна 5, а полусумма оснований равна 25, поэтому основания трапеции равны 20 и 30.

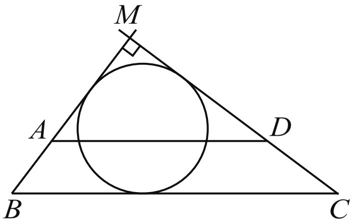


Рис.1

Предположим что $BC = 30$, $AD = 20$ (рис. 1). Стороны BC и AD треугольников MBC и MAD параллельны, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{3}$. Значит,

$$MB = \frac{AB}{1-k} = 18,\ MC = \frac{CD}{1-k} = 24.$$

Заметим, что $MB^2 + MC^2 = BC^2$, поэтому треугольник MBC — прямоугольный с гипотенузой BC. Радиус его вписанной окружности равен: $r = \frac{MB + MC - BC}{2} = 6.$

Пусть теперь $AD = 30$, $BC = 20$ (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю можно показать, что радиус вписанной окружности треугольника MAD равен 6. Треугольник MAD и MBC подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{3}$. Значит, радиус вписанной окружности треугольника MBC равен $r = 6k = 4$.

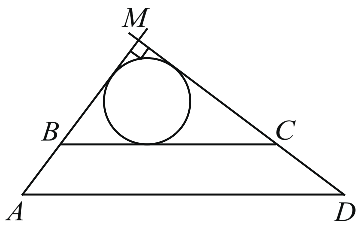


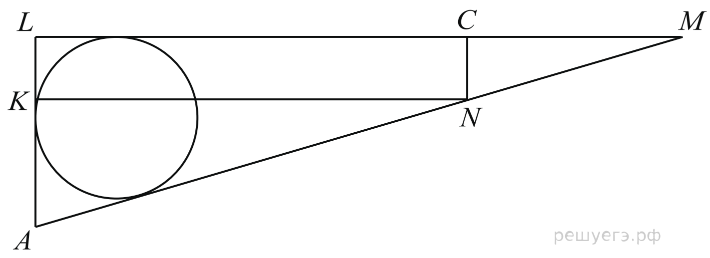
Рис. 2

Ответ: 4; 6.

15. 15. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия трапеции равна 17,5. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Решение.

В любой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции, а средняя линия — полусумме оснований трапеции. В нашем случае полуразность оснований равна 7,5, а полусумма оснований равна 17,5, поэтому основания трапеции равны 10 и 25.



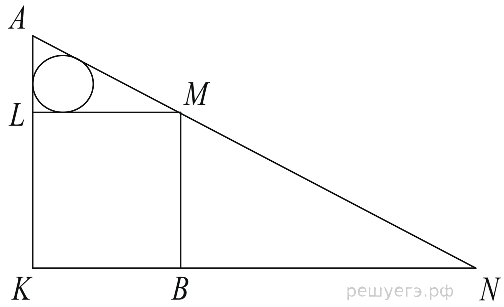
Предположим что $LM = 25$, $KN = 10$ (рис. 1). Стороны LM и KN треугольников ALM и AKN параллельны, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{5}$. Значит,

$$AL = \frac{KL}{1-k} = \frac{40}{3},\ AM = \frac{MN}{1-k} = \frac{85}{3}.$$

Заметим, что $AL^2 + LM^2 = AM^2$, поэтому треугольник ALM — прямоугольный с гипотенузой AM. (Поэтому трапеция прямоугольная, как и изображено на рисунке.) Радиус вписанной в треугольник ALM окружности равен

$$r = \frac{AL + LM - AM}{2} = 5.$$

Пусть теперь $KN = 25$, $LM = 10$ (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю можно показать, что радиус вписанной окружности треугольника AKN равен 5. Треугольник AKN и ALM подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{5}$. Значит, радиус вписанной окружности треугольника ALM равен $r = 5k = 2$.



О т в е т: 2; 5.

16. 16. Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: KN = 11, MN = 8. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 4 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

Решение.

Пусть точка Q лежит между K и N (рис.1), P — точка касания прямой MQ с данной окружностью. Обозначим $KQ = x$.

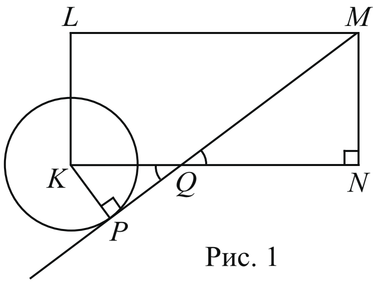


Рис. 1

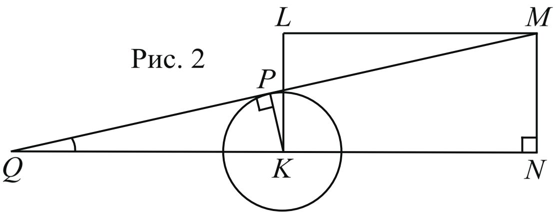


Рис. 2

Из прямоугольного треугольника QPK по теореме Пифагора находим

$$PQ = \sqrt{QK^2 - PK^2} = \sqrt{x^2 - 16}.$$

Прямоугольные треугольники QPK и QNM подобны, поэтому $\frac{PK}{PQ} = \frac{MN}{QN}$, откуда $\frac{4}{\sqrt{x^2-16}} = \frac{8}{11-x}$.

$$(11-x)^2 = 4\left(x^2 - 16\right) \Leftrightarrow 3x^2 + 22x - 185 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Если точка Q лежит на продолжении стороны NK за точку K (рис.2), то, рассуждая аналогично, получим уравнение $3x^2 - 22x - 185 = 0$, из которого $x = \frac{37}{3}$.

Ответ: 5 или $\frac{37}{3}$.

17. 17. Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN = 13$, $MN = 6$. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 3 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

Решение.

Пусть точка Q лежит между K и N (рис.1), P — точка касания прямой MQ с данной окружностью. Обозначим $KQ = x$.

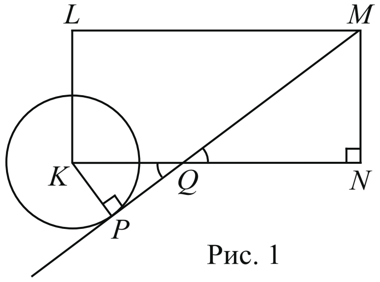


Рис. 1

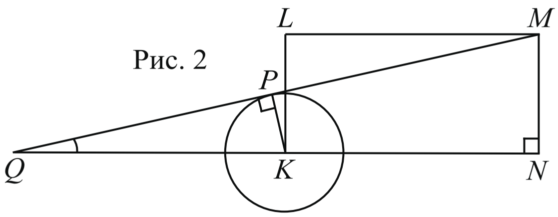


Рис. 2

Из прямоугольного треугольника QPK по теореме Пифагора находим

$$PQ = \sqrt{QK^2 - PK^2} = \sqrt{x^2 - 9}.$$

Прямоугольные треугольники QPK и QNM подобны, поэтому $\dfrac{PK}{PQ} = \dfrac{MN}{QN}$, откуда $\dfrac{3}{\sqrt{x^2-9}} = \dfrac{6}{13-x}$.

Тогда

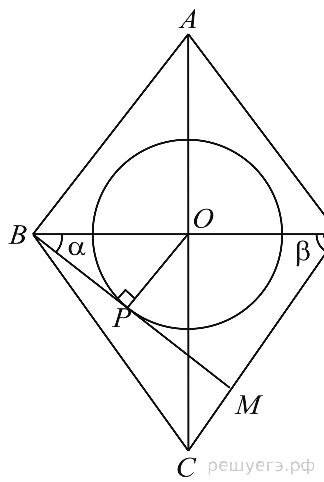
$$(13-x)^2 = 4\left(x^2-9\right) \Leftrightarrow 3x^2 + 26x - 205 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Если точка Q лежит на продолжении стороны NK за точку K (рис.2), то, рассуждая аналогично, получим уравнение $3x^2 - 26x - 205 = 0$, из которого $x = \dfrac{41}{3}$.

Ответ: 5 или $\dfrac{41}{3}$.

18. 18. Дан ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 24$ и $BD = 10$. Проведена окружность радиуса $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину B касается этой окружности и пересекает прямую CD в точке M. Найдите CM.

Решение.
Пусть точка M лежит между C и D, P, — точка касания прямой BM с данной окружностью, O — центр ромба.



По теореме Пифагора $CD=\sqrt{OD^2+OC^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$. Обозначим $\angle OBM=\alpha$, $\angle BDC=\beta$. Из прямоугольных треугольников и находим, что

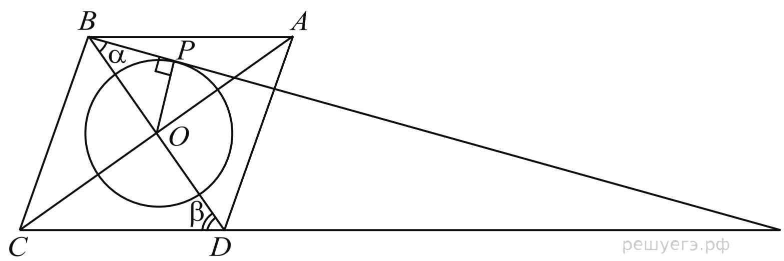
$$\sin\alpha=\frac{OP}{OB}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha=45^\circ,\ \cos\beta=\frac{OD}{CD}=\frac{5}{13},\ \sin\beta=\frac{12}{13}.$$

Применяя теорему синусов к треугольнику BMD получим, что $\dfrac{DM}{\sin\angle MBD}=\dfrac{BD}{\sin\angle BMD}$, поэтому

$$MD=\frac{BD\sin\angle MBD}{\sin\angle BMD}=\frac{10\sin45^\circ}{\sin(180^\circ-45^\circ-\beta)}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin(45^\circ+\beta)}=$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{\sin45^\circ\cos\beta+\cos45^\circ\sin\beta}=\frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5}{13}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{12}{13}}=\frac{130}{17}.$$

Следовательно, $CM=CD-MD=13-\dfrac{130}{17}=\dfrac{91}{17}$.

Пусть теперь точка M лежит на продолжении стороны за точку Тогда по теореме о внешнем угле треугольника



$$\angle BMD=\angle BDC-\angle MBD=\beta-\alpha.$$

Далее, рассуждая аналогично, получим, что

$$MD=\frac{5\sqrt{2}}{\sin(\beta-45^\circ)}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin\beta\cos45^\circ-\sin45^\circ\cos\beta}=\frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{12}{13}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5}{13}}=\frac{130}{7}.$$

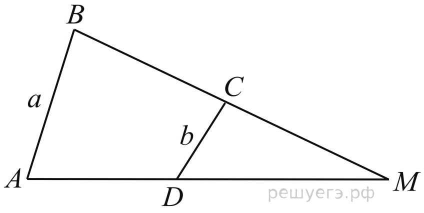
Следовательно, $CM=CD+MD=13+\dfrac{130}{7}=\dfrac{221}{7}$.

Ответ: $\dfrac{91}{17}$ или $\dfrac{221}{7}$.

19. 19. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в другую окружность. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Найдите периметр треугольника ABM, если известно, что $AB = a$ и $CD = b$.

Решение.

Возможны два случая $a > b$ и $a < b$.

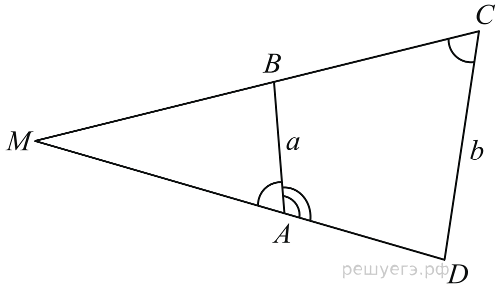


Первый случай. Четырехугольник описан около окружности, следовательно, $AD + BC = AB + CD = a + b$. Четырехугольник вписан в окружность, значит, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, но $\angle MCD + \angle BCD = 180°$, откуда $\angle BAD = \angle MCD$, следовательно, $\Delta ABM \sim \Delta CDM$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{a}{b}$.

Обозначим через P периметр треугольника ABM, тогда если P_1 — периметр треугольника CDM,

$$P_1 = P - AD - AB - BC + CD = P - a - (a+b) + b = P - 2a.$$

Поскольку $\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{a}{b}$, получаем: $\dfrac{P}{P-2a} = \dfrac{a}{b} = aP - 2a^2 \Leftrightarrow P = \dfrac{2a^2}{a-b}$.



Второй случай. Аналогично случаю 1 имеем:

$$P_1 = P - a + b + (a+b) = P + 2b \Leftrightarrow \frac{P}{P+2b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow bP = aP + 2ab \Leftrightarrow P = \frac{2ab}{b-a}.$$

Ответ: $\dfrac{2a^2}{a-b}$ или $\dfrac{2ab}{b-a}$.

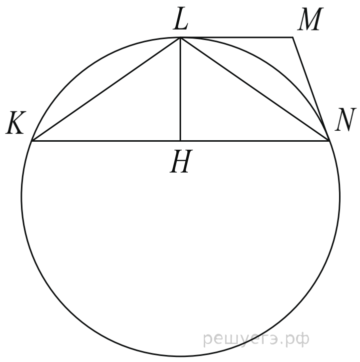
20. 20. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN.

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN, если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120°$.

Решение.

а) Касательная LM параллельна хорде KN, значит, $\angle KNL = \angle MLN$, а так как $\angle MLN = \angle LKN$ как угол между касательной и хордой, треугольник KLN равнобедренный с основанием KN.



Поскольку $ML = MN$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки,
треугольник LMN также равнобедренный с основанием LN.

Углы при основаниях равнобедренных треугольников LMN и LKN равны, следовательно, эти треугольники подобны.

б) Угол при вершине равнобедренного треугольника KLN равен 120°, значит, его высота LH вдвое меньше боковой стороны $LN = \frac{KN}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, то есть $LH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$S_{KLN} = \frac{1}{2} KN \cdot LH = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

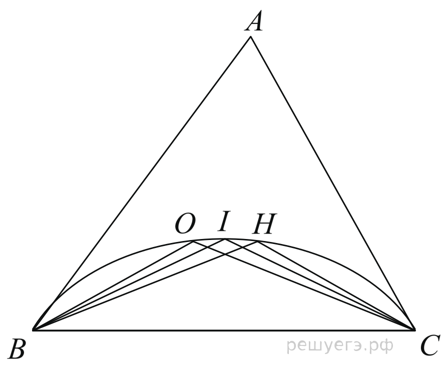
Ответ: б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

21. 21. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OIH, если $\angle ABC = 55°$.

Решение.



Точка O — центр описанной окружности около треугольника ABC, поэтому $\angle BOC = 2\angle BAC$. Значит,

$$180^\circ = \angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 2\angle BAC + \angle BAC = 3\angle BAC,$$

откуда $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC + \angle ACB = 120^\circ$, $\angle BOC = 120^\circ$.

Найдём угол BIC:

$$\angle BIC = 180^\circ - \angle IBC - \angle ICB =$$

$$= 180^\circ - \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = 180^\circ - \frac{120^\circ}{2} = 120^\circ.$$

Значит, $\angle BOC = \angle BIC$, поэтому точки B, O, I и C лежат на одной окружности.

б) Найдём угол BHC:

$$\angle BHC = 180^\circ - \angle HBC - \angle HCB = 180^\circ - (90^\circ - \angle ACB) - (90^\circ - \angle ABC) = \angle ACB + \angle ABC = 120^\circ.$$

Значит, $\angle BOC = \angle BIC = \angle BHC$, поэтому точки B, O, I, H и C лежат на одной окружности.

Поскольку $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 55^\circ$, получаем $\angle ACB = 65^\circ$. В равнобедренном треугольнике BOC имеем

$$\angle OBC = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = 30^\circ.$$

Прямая BH перпендикулярна AC, поэтому $\angle HBC = 90^\circ - \angle ACB = 25^\circ$.

Значит, $\angle HBO = \angle OBC - \angle HBC = 5^\circ$. Биссектриса угла треугольника лежит внутри угла, образованного медианой и высотой, исходящими из той же вершины, поэтому лучи BH, BI и BO пересекают дугу окружности в указанном на рисунке порядке. Четырёхугольник $BOIH$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle OIH = 180^\circ - \angle HBO = 175^\circ.$$

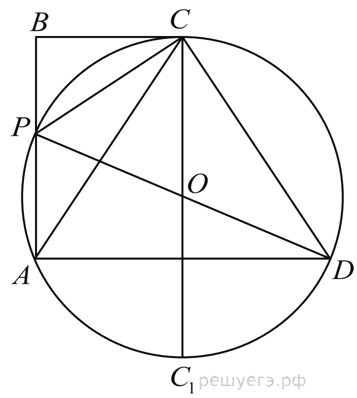
Ответ: б) 175°.

22. 22. Окружность, проходящая через вершины A, C и D прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, пересекает меньшую боковую сторону AB в точке P и касается прямой BC. Известно, что $AD = CD$.

а) Докажите, что CP — биссектриса угла ACB.

б) В каком отношении прямая DP делит площадь трапеции?

Решение.



а) Пусть O — центр окружности. Прямая OC перпендикулярна касательной BC, а так как хорда AD параллельна BC, прямая OC перпендикулярна прямой AD. Диаметр CC_1 перпендикулярен хорде AD, а значит, делит её пополам. Высота треугольника ACD является его медианой, значит, треугольник равнобедренный, $AC = CD$, а так как $AD = CD$, треугольник равносторонний. Тогда $\angle ACB = \angle CAD = 60^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ - \angle CAD = 30^\circ$.

Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle BCP = \angle PAC = \angle BAC = 30^\circ = \frac{1}{2}\angle ACB$.

Следовательно, CP — биссектриса угла ACB.

б) Пусть $AC = AD = a$. Тогда $AB = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BC = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$, значит,

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot AB = \frac{a+\frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, значит, $AP = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Поэтому

$$S_{APD} = \frac{1}{2}AD \cdot AP = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6},$$
$$S_{BCDP} = S_{ABCD} - S_{APD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{a^2\sqrt{3}}{6} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{APD}}{S_{BCDP}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{6}}{\frac{5a^2\sqrt{3}}{24}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: 4 : 5.

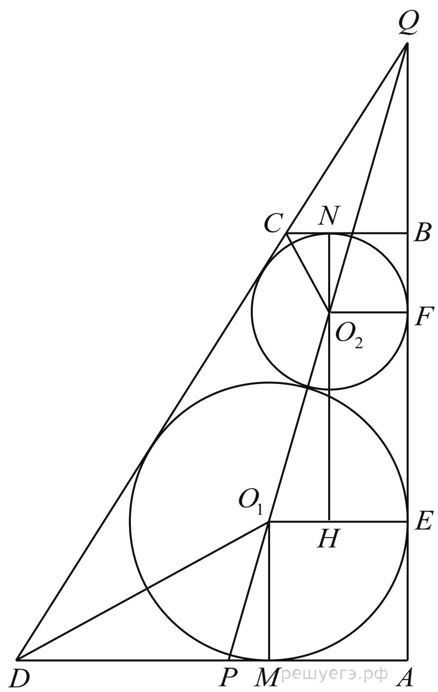
23. 23. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основанеи AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

Решение.

а) Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон. Точка Q, центры окружностей и точка P лежат на одной прямой, причём QP — биссектриса прямоугольного треугольника AQD. Следовательно, по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AP}{PD} = \frac{QA}{QD} = \sin D$.



б) Пусть окружность с центром O_1 радиуса $R = 3$ касается боковой стороны AB в точке E, а основания AD — в точке M; окружность радиуса $r = 1$ с центром O_2 касается боковой стороны AB в точке F, а основания BC — в точке N. Отпустим перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на отрезок O_1E.

Тогда

$$O_1H = O_1E - HE = O_1E - O_2F = R - r = 3 - 1 = 2,$$

а так как линия центров окружностей проходит через точку их касания,

$$O_1O_2 = R + r = 3 + 1 = 4.$$

Значит, $EF = O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

Обозначим $\angle AQP = \angle HO_2O_1 = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{O-1H}{O_2H} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Получаем:

$$\angle BQC = 2\alpha,$$

$$\angle BCD = 90^\circ + 2\alpha,$$

$$\angle O-2CN = \frac{1}{2}\angle BCD = 45^\circ + \alpha.$$

Из треугольника O_2CN находим:

$$NC = O_2N\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha) = O_2N\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha) = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}.$$

Следовательно, $BC = BN + NC = 1 + 2 - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$. Аналогично, $\angle O_1DM = 45^\circ - \alpha$,

$$MD = O_1M\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha) = O_1M\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha) = 3\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = 3\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 6+3\sqrt{3};$$

$$AD = AM + MD = 3 + 6 + 3\sqrt{3} = 9 + 3\sqrt{3}.$$

Учитывая, что $AB = AE + EF + FB + R + O_2H + r = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$, получаем

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)\cdot AB = \frac{12+2\sqrt{3}}{2}\cdot(4+2\sqrt{3}) = 30+16\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $30+16\sqrt{3}$.

24. 24. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекается в точке P, причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

Решение.

а) Вписанные углы BAC и DAC опираются на равные хорды, поэтому они равны (рис. 1). Вписанные углы ADB и ACB опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle ADP = \angle ACB$. Значит, треугольники ADP и ACB подобны по двум углам. Следовательно,

$$AB : BC = AP : PD.$$

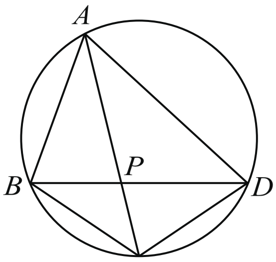


Рис. 1

б) Точки A и C лежат на окружности с диаметром BD, значит, треугольники ABD и BCD прямоугольные (рис. 2). Кроме того, по условию треугольник BCD равнобедренный, поэтому $BD = BC \cdot \sqrt{2} = 12$. Катет AB прямоугольного треугольника ABD равен половине гипотенузы BD, поэтому $\angle ADB = 30^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ$.

Центр окружности, вписанной в треугольник, — точка пересечения его биссектрис, поэтому точка O лежит на биссектрисе AC угла BAD и на биссектрисе угла ADB. Тогда

$$\angle ACD = \angle ABD = 60^\circ,\ \angle ODB = \frac{1}{2}\angle ADB = 15^\circ,$$
$$\angle ODC = \angle ODB + \angle BDC = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ.$$

Следовательно, треугольник COD равносторонний, причём $CD = BC = 6\sqrt{2}$. Следовательно, площадь треугольника COD равна $18\sqrt{3}$.

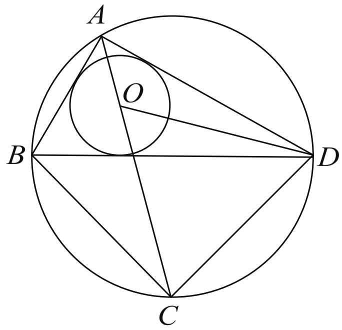


Рис. 2

Ответ: б) $18\sqrt{3}$.

25. 25. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K.

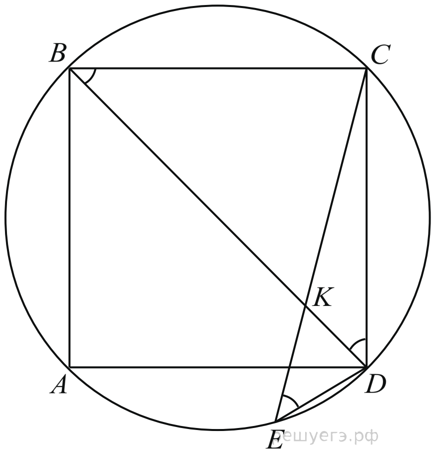
а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.

б) Найдите отношение CK и KE, если $\angle ECD = 15^\circ$.

Решение.

а) В треугольниках CKD и CDE угол KCD — общий,

$$\angle CED = \angle CBD = \angle BDC = 45^\circ.$$



Значит, эти треугольники подобны, откуда

$$\frac{CK}{CD} = \frac{CD}{CE} \Leftrightarrow CK \cdot CE = CD^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow CK \cdot CE = AB \cdot CD.$$

б) В треугольнике CKD имеем: $\angle KCD = 15^\circ$, $\angle CDK = 45^\circ$, откуда $\angle CKD = 120^\circ$. Из подобия треугольников CKD и CDE получаем:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CK}{CD}.$$

В треугольнике CKD имеем:

$$\frac{CK}{CD} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

то есть $CK : CE = \dfrac{CK}{CD} : \dfrac{CE}{CD} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} : \sqrt{\dfrac{3}{2}} = 2 : 3$, откуда $CK : KE = 2 : 1$.

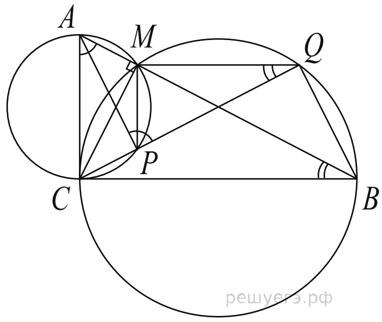
Ответ: б) 2 : 1.

26. 26. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности, второй раз пересекающиеся в точке M. Точка Q лежит на меньшей дуге MB окружности с диаметром BC. Прямая CQ второй раз пересекает окружность с диаметром AC в точке P.

а) Докажите, что прямые PM и QM перпендикулярны.

б) Найдите PQ, если $AM = 1$, $BM = 3$, а Q — середина дуги MB.

Решение.



а) Поскольку $\angle AMC = \angle BMC = 90^\circ$, точки M, A и B лежат на одной прямой, значит, отрезок CM — высота треугольника ABC (см. рисунок).

Четырёхугольники $AMPC$ и $BQMC$ вписаны в окружности, поэтому

$$\angle QPM = 180^\circ - \angle CPM = \angle MAC = 90^\circ - \angle MBC = \\ = 90^\circ - \angle MQC = 90^\circ - \angle MQP,$$

откуда $\angle PMQ = 90^\circ$.

б) Из прямоугольного треугольника ABC получаем: $CM = \sqrt{AM \cdot BM} = \sqrt{3}$,
откуда $\angle BAC = \angle BCM = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle ACM = 30^\circ$.

Точка Q — середина дуги MB, поэтому CQ — биссектриса угла BCM.

Значит,

$$\angle ACM = \angle MCQ = \angle QCB = 30^\circ;$$
$$\angle CAP = \angle CAM - \angle PAM = \angle BAC - \angle MCP = 30^\circ = \angle ACM;$$
$$\angle QBC = \angle QBM + \angle MBC = \angle QCM + \angle ABC = 60 = \angle MCB.$$

Получаем: $CQ = BM = 3$; $CP = AM = 1$ как хорды стягивающие равные дуги. Таким образом, $PQ = CQ - CP = 2.$

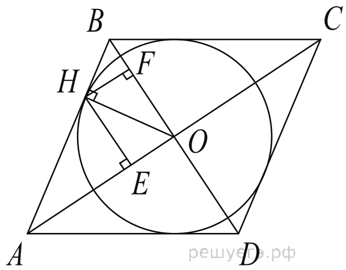
Ответ: б) 2.

27. 27. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм — ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 3 и 2. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

Решение.



а) Пусть этот параллелограмм $ABCD$, тогда $AB + CD = AD + BC$ (из вписанности), откуда $AB = AD$ и $ABCD$ — ромб.

б) Рассмотрим треугольник AOB, где O — точка пересечения диагоналей ромба и центр вписанной окружности. Опустим высоту OH, пусть $AH = 3$, $HB = 2$. Опустим также перпендикуляры HE и HF на AO и BO. Тогда прямоугольник $EHFO$ по площади ровно в 4 раза меньше, чем требуемый четырехугольник (он состоит из четырех таких прямоугольников). Тогда

$$S = 4S_{EHFO} = 4EH \cdot HF = 4 \cdot \frac{3}{5}OB \cdot \frac{2}{5}OA = \frac{24}{25}AO \cdot OB = \frac{24}{25}OH \cdot AB = \frac{24}{5} \cdot \sqrt{AH \cdot HB} = \frac{24\sqrt{6}}{5}.$$

Ответ: $\frac{24\sqrt{6}}{5}$.