

## Окружности и системы окружностей

1. Окружности радиусов 2 и 3 с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно касаются в точке  $A$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , вторично пересекает меньшую окружность в точке  $B$ , а большую — в точке  $C$ . Найдите площадь треугольника  $BCO_2$ , если  $\angle ABO_1 = 30^\circ$ .

2. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите её радиус.

3. На стороне прямого угла с вершиной  $A$  взята точка  $O$ , причём  $AO = 7$ . С центром в точке  $O$  проведена окружность  $S$  радиуса 1. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности  $S$ .

4. Центр  $O$  окружности радиуса 4 принадлежит биссектрисе угла величиной  $60^\circ$ . Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности, если известно, что расстояние от точки  $O$  до вершины угла равно 10.

5. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведены диаметры  $AC$  и  $AD$  этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если  $BC = 7$ ,  $BD = 3$ .

6. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключённого между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.

7. Расстояния от общей хорды двух пересекающихся окружностей до их центров относятся как  $2 : 5$ . Общая хорда имеет длину  $2\sqrt{3}$ , а радиус одной из окружностей в два раза больше радиуса другой окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.

8. Две окружности касаются внутренним образом в точке  $A$ , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда  $BC$  большей окружности касается меньшей в точке  $P$ . Хорды  $AB$  и  $AC$  пересекают меньшую окружность в точках  $K$  и  $M$  соответственно.

а) Докажите, что прямые  $KM$  и  $BC$  параллельны.

б) пусть  $L$  — точка пересечения отрезков  $KM$  и  $AP$ . Найдите  $AL$ , если радиус большей окружности равен 10, а  $BC = 16$ .

9. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

10. Радиусы окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$  равны соответственно 1 и 3. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой  $O_1O_2$ , если  $O_1O_2 = 14$ .

11. Радиусы окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$  равны соответственно 2 и 10. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой  $O_1O_2$ , если  $O_1O_2 = 28$ .

12. Окружности радиусов 11 и 21 с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно касаются внешним образом в точке  $C$ ,  $AO_1$  и  $BO_2$  — параллельные радиусы этих окружностей, причём  $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$ . Найдите  $AB$ .

13. В окружности проведены хорды  $PQ$  и  $CD$ , причём  $PQ = PD = CD = 8$ ,  $CQ = 6$ . Найдите  $CP$ .

14. В окружности проведены хорды  $PQ$  и  $CD$ , причём  $PQ = PD = CD = 10$ ,  $CQ = 6$ . Найдите  $CP$ .

15. Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Прямая, проходящая через точку  $P$ , второй раз пересекает первую окружность в точке  $A$ , а вторую — в точке  $D$ . Прямая, проходящая через точку  $Q$  параллельно  $AD$ , второй раз пересекает первую окружность в точке  $B$ , а вторую — в точке  $C$ .

а) Докажите, что четырёхугольник  $ABCD$  — параллелограмм.

б) Найдите отношение  $BP : PC$ , если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

16. Две окружности, радиусы которых равны 9 и 4, касаются внешним образом. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной.

17. Прямая касается окружностей радиусов  $R$  и  $r$  в точках  $A$  и  $B$ . Известно, что расстояние между центрами равно  $a$  причём  $r < R$  и  $r + R < a$ . Найдите  $AB$ .

18. Окружность  $S$  проходит через вершину  $C$  прямого угла и пересекает его стороны в точках, удалённых от вершины  $C$  на расстояния 6 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающийся окружности  $S$ .

**19.** Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

**20.** Окружность радиуса  $6\sqrt{2}$  вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках  $M$  и  $N$ . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите  $MN$ .

**21.** Дана окружность радиуса 4 с центром в точке  $O$ , расположенной на биссектрисе угла, равного  $60^\circ$ . Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности внешним образом, если известно, что расстояние от точки  $O$  до вершины угла равно 10.