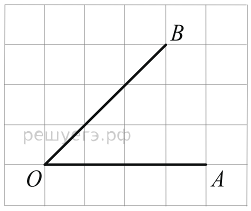
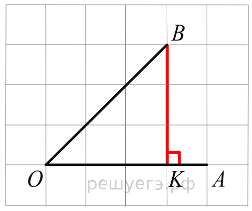
Многоугольники: вычисление длин и углов

1. 1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



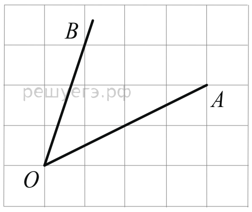
Решение.
Проведем высоту BK из точки B на сторону OA. Тогда, принимая во внимание, что $BK=OK$, получим:



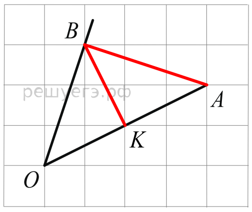
$$\operatorname{tg}\angle AOB=\operatorname{tg}\angle KOB=\frac{BK}{OK}=1.$$

Ответ: 1.

2. 2. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Решение.
Достроим угол до треугольника OBA, $OB = BA$. BK делит основание OA пополам, значит, BK — высота. Из рисунка находим $OK=BK=\sqrt{5}.$



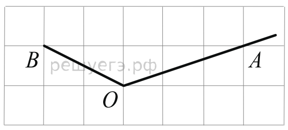
$$\operatorname{tg}\angle AOB=\frac{BK}{OK}=1.$$

Примечание.

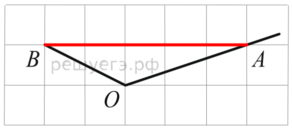
Можно заметить и доказать, что равнобедренный треугольник ABO является прямоугольным. Тогда углы AOB и OAB равны 45°, а их тангенсы равны 1.

Ответ: 1.

3. 3. Найдите тангенс угла AOB.



Решение.



Достроим угол до треугольника BOA. Из рисунка находим: $OA=\sqrt{10}$, $OB=\sqrt{5}, AB=5$. Воспользуемся теоремой косинусов:

$$AB^2=OB^2+OA^2-2OB\cdot OA\cdot\cos AOB.$$

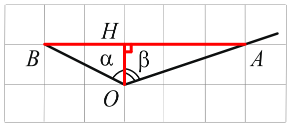
Тогда:

$$\cos AOB=\frac{OB^2+OA^2-AB^2}{2OB\cdot OA}=\frac{5+10-25}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поэтому угол AOB равен 135°, а его тангенс равен −1.

Ответ: −1.

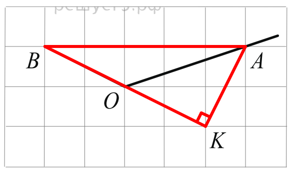
Приведём другое решение.



Пусть $\alpha=\widehat{BOH}, \beta=\widehat{AOH}$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{BH}{HO}=2$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{AH}{HO}=3$, и, следовательно,

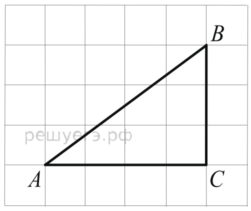
$$\operatorname{tg}\widehat{BOA}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1.$$

Приведём другое решение.



Отложим на продолжении прямой BO за точку O отрезок $OK=BO$ и проведём отрезок AK. Заметим, что $OK=KA=\sqrt{5}$, $OA=\sqrt{10}$. Поэтому треугольник OKA — прямоугольный равнобедренный, углы при его основании равны 45°, а тогда $\widehat{BOA}=135^\circ$, и $\operatorname{tg}\widehat{BOA}=-1$.

4. 4. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если стороны квадратных клеток равны 1.



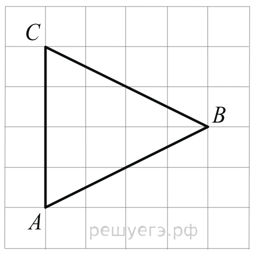
Решение.
по теореме Пифагора:

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{16+9}=5.$$

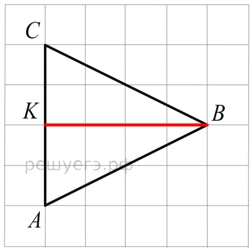
Ответ: 5.

5. 5.

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его биссектрисы, проведённой из вершины B.

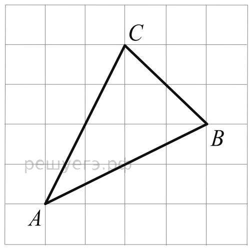


Решение.
по рисунку видно, что $AB = BC$, значит, биссектриса, проведенная из вершины B, также будет делить основание AC пополам. Построим отрезок BK. Видно, что он равен 4.

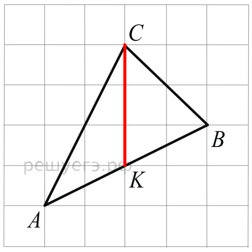


Ответ: 4.

6. 6. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C.

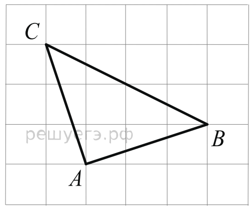


Решение.
Медиана проведенная из вершины C, будет делить основание AB пополам. Построим отрезок CK. Видно, что он равен 3.

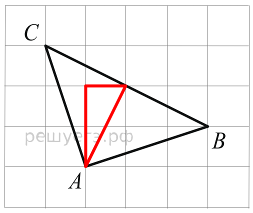


Ответ: 3.

7. 7. Найдите высоту треугольника ABC, опущенную на сторону BC, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{5}$.



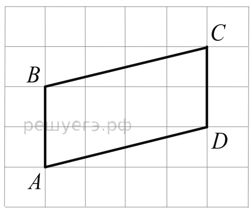
Решение.
На рисунке изображен равнобедренный треугольник: $AB = AC$, поэтому высота, проведенная к основанию BC, является медианой. В то же время она является диагональю прямоугольника со сторонами 1×2 клетки (см.рис.). Тогда по теореме Пифагора имеем:



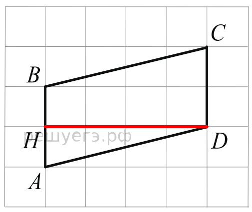
$$h = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2} = 5.$$

Ответ: 5.

8. 8. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите длину его большей высоты.

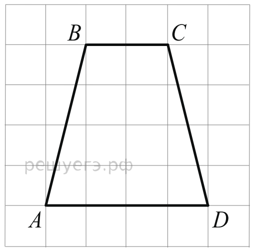


Решение.
Проведем высоту DH из вершины D. По рисунку находим ее высоту.



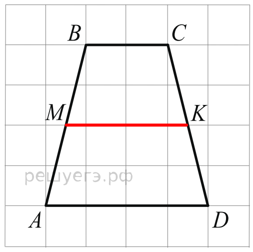
Ответ: 4.

9. 9. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



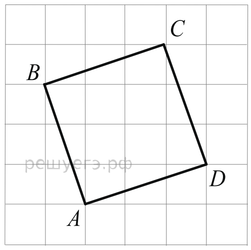
Решение.
Средняя линия трапеции равна полусумме её оснований.

$$MK = \frac{AD+BC}{2} = \frac{4+2}{2} = 3.$$



Ответ: 3.

10. 10. На клетчатой бумаге с размером клетки $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$ изображён четырёхугольник $ABCD$. Найдите его периметр.



Решение.
По теореме Пифагора найдем сторону четырехугольника:

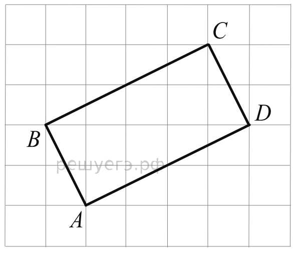
$$AB = \sqrt{(3\sqrt{10})^2 + \sqrt{10}^2} = 10,$$

тогда периметр равен 4AB = 40.

Ответ: 40.

Примечание.
Можно было найти периметр четырёхугольника, считая что стороны клеток равны 1, а затем умножить найденный периметр на коэффициент подобия $\sqrt{10}$. В этом случае длина стороны равна $\sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$, периметр равен $4\sqrt{10}$. Умножая на $\sqrt{10}$, получаем, что периметр исходного четырёхугольника равен 40.

11. 11. На клетчатой бумаге с размером клетки $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ изображён четырёхугольник $ABCD$. Найдите его периметр.



Решение.

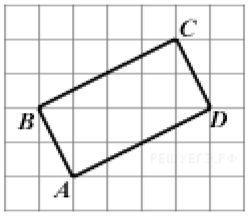
По теореме Пифагора для прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами заданного четырехугольника, имеем:

$$AB = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2} = 5,$$
$$BC = \sqrt{5} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2} = 10,$$

тогда периметр равен $2(AB + BC) = 30.$

Ответ: 30.

12. 12. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён прямоугольник. Найдите ра-диус окружности, описанной около этого прямоугольника.

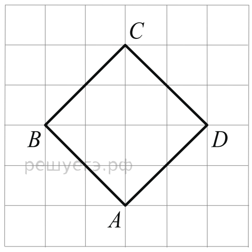


Решение.

Радиус окружности, описанной около прямоугольника, равен половине его диагонали. Диагональ равна 5, поэтому радиус равен 2,5.

Ответ: 2,5.

13. 13. На клетчатой бумаге с размером клетки $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ изображён квадрат . Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.



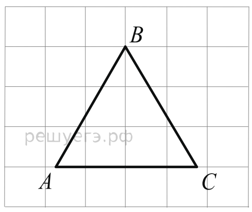
Решение.

радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине его стороны.

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4+4}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

14. 14. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



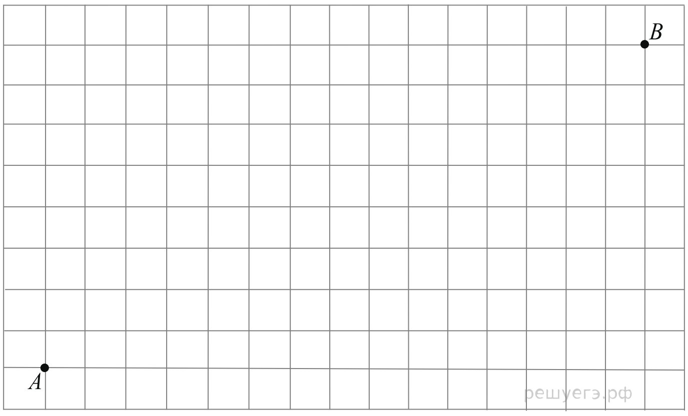
Решение.

Радиус окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника, равен двум третьим его высоты. Поэтому он равен 2.

Ответ: 2.

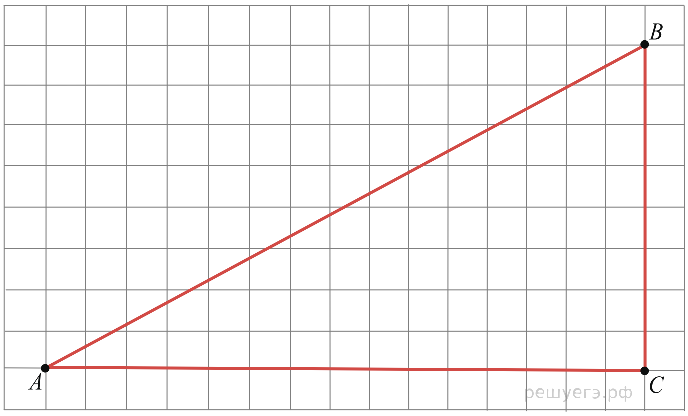
15. 15.

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B. Найдите длину отрезка AB.



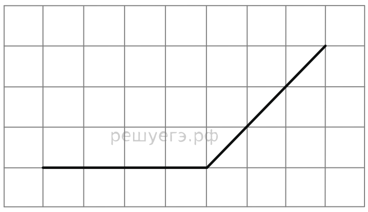
Решение.

Расстояние между точками A и B равно длине гипотенузы треугольника ABC, катеты которого равны 15 и 8. Поэтому искомая длина AB равна 17.



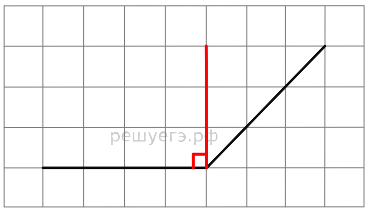
Ответ: 17.

16. 16. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображён угол. Найдите его градусную величину.



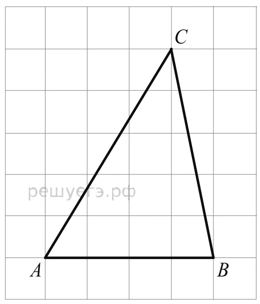
Решение.

Изображённый на рисунке угол равен сумме прямого угла и угла 45°, поэтому он равен 135°.



Ответ: 135.

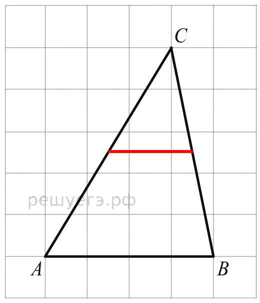
17. 17. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.



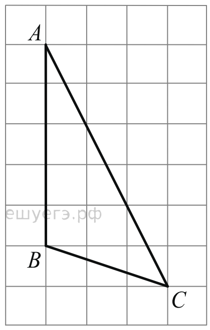
Решение.

Средняя линия треугольника равна половине той стороны, которой она параллельна. Длина стороны AB равна 4, поэтому искомая длина средней линии равна 2.

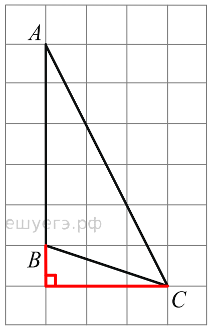
Ответ: 2.



18. 18. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник *ABC*. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону *AB*.

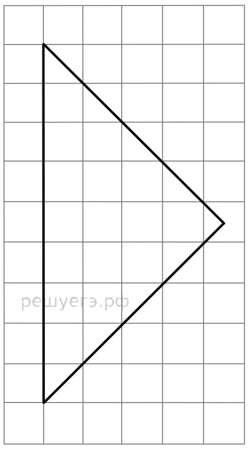


Решение.
Формулировка задания некорректна: на сторону *AB* высоту опустить нельзя. Из точки *C* можно опустить перпендикуляр к прямой, содержащей сторону *AB*. Этот перпендикуляр будет являться высотой треугольника *ABC*, его длина равна 3.



Ответ: 3.

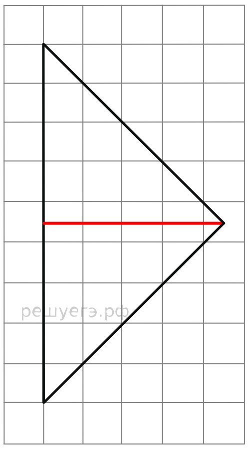
19. 19. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его медианы, проведённой к гипотенузе.



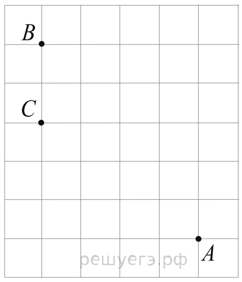
Решение.
Медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине. Поэтому она равна 4,5.

Ответ: 4,5.

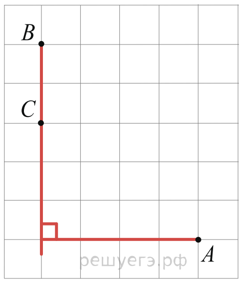
Примечание.
Условие того, что треугольник равнобедренный, излишне.



20. 20. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки *A*, *B* и *C*. Найдите расстояние от точки *A* до прямой *BC*.

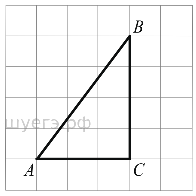


Решение.
Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую. Тем самым, искомое расстояние равно 4.



Ответ: 4.

21. 21. Найдите радиус окружности, вписанной в изображенный на рисунке треугольник *ABC,* считая стороны квадратных клеток равными 1.



Решение.
Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен полуразности суммы катетов и гипотенузы. Заметим, что в треугольнике с катетами 3 и 4 гипотенуза равна 5, откуда

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{3 + 4 - 5}{2} = 1.$$

Ответ: 1.