

Логарифмические уравнения

1. Найдите корень уравнения $\log_2(4 - x) = 7$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_2(4 - x) = 7 \Leftrightarrow 4 - x = 2^7 \Leftrightarrow 4 - x = 128 \Leftrightarrow x = -124.$$

Ответ: -124.

2. Найдите корень уравнения $\log_5(4 + x) = 2$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_5(4 + x) = 2 \Leftrightarrow 4 + x = 5^2 \Leftrightarrow 4 + x = 25 \Leftrightarrow x = 21.$$

Ответ: 21.

3. Найдите корень уравнения $\log_5(5 - x) = \log_5 3$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_5(5 - x) = \log_5 3 \Leftrightarrow 5 - x = 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

4. Найдите корень уравнения $\log_2(15 + x) = \log_2 3$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_2(15 + x) = \log_2 3 \Leftrightarrow 15 + x = 3 \Leftrightarrow x = -12.$$

Ответ: -12.

5. Найдите корень уравнения $\log_4(x + 3) = \log_4(4x - 15)$.

Решение.

Логарифмы двух выражений равны, если сами выражения равны и при этом положительны:

$$\log_4(x + 3) = \log_4(4x - 15) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 4x - 15, \\ 4x - 15 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ 4x > 15 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: 6.

6. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{7}}(7 - x) = -2$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_{\frac{1}{7}}(7 - x) = -2 \Leftrightarrow 7 - x = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} \Leftrightarrow 7 - x = 49 \Leftrightarrow x = -42.$$

Ответ: -42.

7. Найдите корень уравнения $\log_5(5 - x) = 2\log_5 3$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_5(5-x) = 2\log_5 3 \Leftrightarrow 5-x = 3^2 \Leftrightarrow 5-x = 9 \Leftrightarrow x = -4.$$

Ответ: -4.

8. Решите уравнение $\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(x^2 + 10)$.

Решение.

Перейдем к одному основанию степени:

$$\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(x^2 + 10) \Leftrightarrow x^2 + 2x = x^2 + 10 \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: 5.

9. Решите уравнение $\log_5(7-x) = \log_5(3-x) + 1$.

Решение.

Заметим, что $1 = \log_5 5$ и используем формулу $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$. Имеем:

$$\begin{aligned} \log_5(7-x) = \log_5(3-x) + 1 &\Leftrightarrow \log_5(7-x) = \log_5(3-x) + \log_5 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x > 0, \\ 7-x = 5(3-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > -3, \\ 7-x = 15-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

10. Решите уравнение $\log_{x-5} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Решение.

На ОДЗ перейдем к уравнению на основании логарифма:

$$\log_{x-5} 49 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 = 49, \\ x-5 > 0, \\ x-5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = \pm 7, \\ x-5 > 0, \\ x-5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x-5 = 7 \Leftrightarrow x = 12.$$

Итак, на ОДЗ уравнение имеет только один корень.

Ответ: 12.

11. Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4} = 4$.

Решение.

Используем формулу $\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$:

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \log_{2^3} 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \frac{8x-4}{3} = 4 \Leftrightarrow 8x-4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

Приведем другое решение:

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 8^4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 2^{12} \Leftrightarrow 8x-4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

12. Найдите корень уравнения $3^{\log_9(5x-5)} = 5$.

Решение.

Используя формулу $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, получаем:

$$3^{\log_9(5x-5)} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} (5x-5)^{\log_9 3} = 5, \\ 5x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (5x-5)^{\frac{1}{2}} = 5 \Leftrightarrow 5x-5 = 25 \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: 6.

Примечание.

Следует отличать это уравнение от похожего, но другого: $3^{\log_9 5x-5} = 5$. В этом случае имеем:

$$3^{\log_9 5x-5} = 5 \Leftrightarrow \frac{3^{\log_9 5x}}{3^5} = 5 \Leftrightarrow 3^{\log_9 5x} = 1215 \Leftrightarrow (5x)^{\frac{1}{2}} = 1215 \Leftrightarrow 5x = 1476225 \Leftrightarrow x = 295245.$$

13. Найдите корень уравнения $\log_{81} 3^{2x-6} = 2$.

Решение.

Последовательно решаем уравнение:

$$\log_{81} 3^{2x-6} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-6}{4} = 2 \Leftrightarrow 2x = 8+6 \Leftrightarrow x = 7.$$

Ответ: 7.

14. Найдите корень уравнения $\log_6(8-x) = \log_6 3$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_6(8-x) = \log_6 3 \Leftrightarrow 8-x = 3 \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: 5.

15. Найдите корень уравнения $\log_4(2-x) = \log_4 5$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_4(2-x) = \log_4 5 \Leftrightarrow 2-x = 5 \Leftrightarrow x = -3.$$

Ответ: -3.