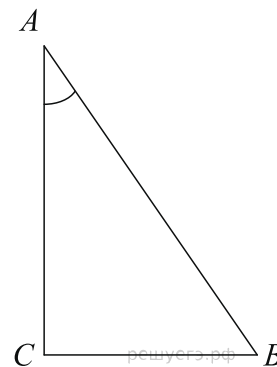


Решение прямоугольного треугольника

1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 4,8$, $\sin A = \frac{7}{25}$.
Найдите AB .

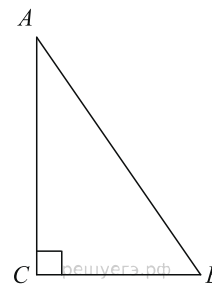


Решение.
Имеем:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{AC}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} = \frac{4,8}{\sqrt{1 - \frac{49}{625}}} = 4,8 \cdot \frac{25}{24} = 5.$$

Ответ: 5.

2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 2$, $\sin A = \frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите BC .

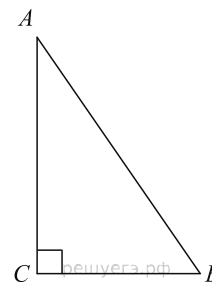


Решение.
Имеем:

$$BC = AC \operatorname{tg} A = \frac{AC \sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{1 - \frac{17}{289}}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} \cdot \frac{17}{\sqrt{272}} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 4$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB .



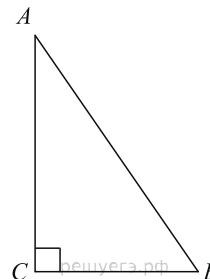
Решение.

По определению косинуса:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{4}{0,5} = 8.$$

Ответ: 8.

4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = \frac{33}{4\sqrt{33}}$, $AC = 4$. Найдите AB .



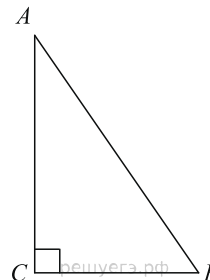
Решение.

Имеем:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 A}}} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{33}{16}}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{49}{16}} = 7.$$

Ответ: 7.

5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 8$, $\operatorname{tg} A = 0,5$. Найдите BC .



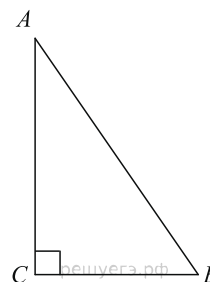
Решение.

По определению тангенса:

$$BC = AC \operatorname{tg} A = 8 \cdot 0,5 = 4.$$

Ответ: 4.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 4$, $\sin A = 0,5$. Найдите AB .



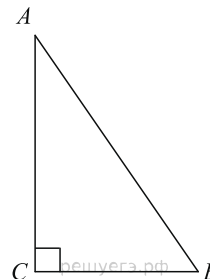
Решение.

По определению синуса:

$$AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{4}{0,5} = 8.$$

Ответ: 8.

7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $BC = 2$. Найдите AC .



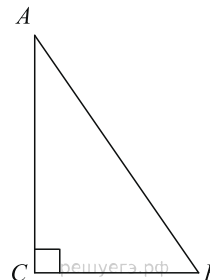
Решение.

Имеем:

$$AC = \frac{BC}{\operatorname{tg} A} = \frac{BC \cos A}{\sin A} = \frac{BC \cos A}{\sqrt{1 - \cos^2 A}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{1 - \frac{1}{17}}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

8. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = 0,5$, $BC = 4$. Найдите AC .



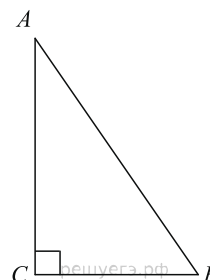
Решение.

По определению тангенса:

$$AC = \frac{BC}{\operatorname{tg} A} = \frac{4}{0,5} = 8.$$

Ответ: 8.

9. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 24$, $BC = 7$. Найдите $\sin A$.



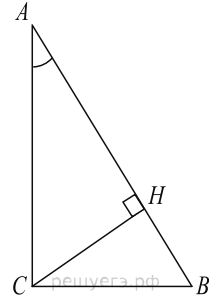
Решение.

Имеем:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{\sqrt{BC^2 + AC^2}} = \frac{7}{\sqrt{576 + 49}} = \frac{7}{25} = 0,28.$$

Ответ: 0,28.

10. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите AH .



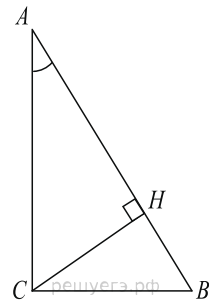
Решение.

Имеем:

$$AH = AC \cos A = AB \cos^2 A = AB \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 A} = 13 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{25}} = 13 \cdot \frac{25}{26} = 12,5.$$

Ответ: 12,5.

11. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = 5$. Найдите BH .



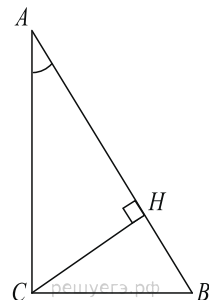
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\begin{aligned} BH &= CB \sin \widehat{HCB} = CB \sin A = AB \sin^2 A = AB(1 - \cos^2 A) = \\ &= AB \left(1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 A} \right) = 13 \left(1 - \frac{1}{26} \right) = 12,5. \end{aligned}$$

Ответ: 12,5.

12. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите высоту CH .



Решение.

Поскольку $CH = AC \sin A$, $AC = AB \cos A$ имеем:

$$CH = AB \sin A \cos A = AB \cdot \frac{\sin A}{\cos A} \cos^2 A = AB \cdot \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 13 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{2}.$$

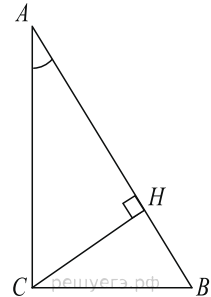
Ответ: 2,5.

Приведем другое решение.

Пусть длина катета BC равна x , тогда длина AC равна $5x$, а длина гипотенузы равна $x\sqrt{26}$. Зная, что гипотенуза равна 13, находим: $x = \frac{13}{\sqrt{26}}$. Поскольку проведенная к гипотенузе высота равна произведению катетов, деленному на гипотенузу, имеем:

$$CH = \frac{CB \cdot CA}{AB} = \frac{5x^2}{x\sqrt{26}} = \frac{5x}{\sqrt{26}} = \frac{5 \cdot 13}{26} = \frac{5}{2}.$$

13. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 3$, $\sin A = \frac{1}{6}$.
Найдите AH .

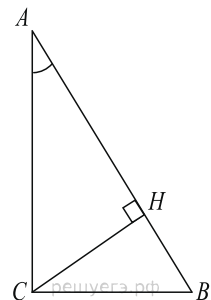
**Решение.**

Имеем:

$$AH = AC \cos A = \frac{BC}{\operatorname{tg} A} \cdot \cos A = \frac{BC \cos^2 A}{\sin A} = \frac{BC(1 - \sin^2 A)}{\sin A} = \frac{3(1 - \frac{1}{36})}{\frac{1}{6}} = 17,5.$$

Ответ: 17,5.

14. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 8$, $\sin A = 0,5$.
Найдите BH .

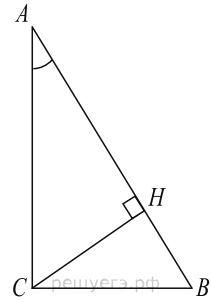
**Решение.**

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому

$$BH = BC \sin \angle HCB = BC \sin A = 8 \cdot 0,5 = 4.$$

Ответ: 4.

15. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 5$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите высоту CH .



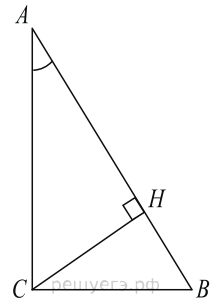
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому

$$CH = BC \cos \angle HCB = BC \cos A = BC \sqrt{1 - \sin^2 A} = 5 \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = 5 \cdot \frac{24}{25} = 4,8.$$

Ответ: 4,8.

16. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 3$, $\cos A = \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите AH .



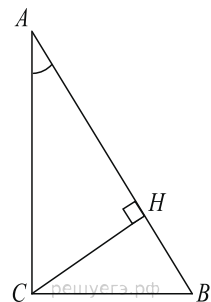
Решение.

Имеем:

$$AH = AC \cos A = \frac{BC}{\operatorname{tg} A} \cdot \cos A = \frac{BC \cos^2 A}{\sin A} = \frac{BC \cos^2 A}{\sqrt{1 - \cos^2 A}} = \frac{3 \cdot \frac{35}{36}}{\sqrt{1 - \frac{35}{36}}} = 17,5.$$

Ответ: 17,5.

17. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 5$, $\cos A = \frac{7}{25}$. Найдите BH .



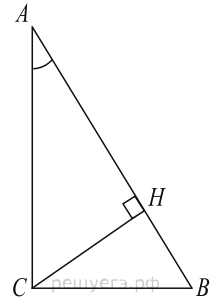
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$BH = BC \sin \angle HCB = BC \sin A = BC \sqrt{1 - \cos^2 A} = 5 \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = 5 \cdot \frac{24}{25} = 4,8.$$

Ответ: 4,8.

18. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 8$, $\cos A = 0,5$. Найдите CH .



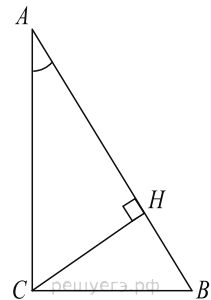
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$CH = BC \cos \widehat{HCB} = BC \cos A = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Ответ: 4.

19. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AC = 3$, $\cos A = \frac{1}{6}$. Найдите BH .



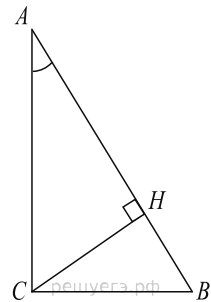
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\begin{aligned} BH &= BC \sin \angle HCB = BC \sin A = AC \operatorname{tg} A \sin A = \frac{AC \sin^2 A}{\cos A} = \\ &= \frac{AC(1 - \cos^2 A)}{\cos A} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{36}\right) \cdot 6 = 17,5. \end{aligned}$$

Ответ: 17,5.

20. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 8$, $BH = 4$. Найдите $\sin A$.



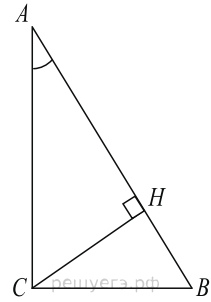
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому

$$\sin A = \sin \angle HCB = \frac{HB}{CB} = \frac{4}{8} = 0,5.$$

Ответ: 0,5

21. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 25$, $BH = 20$. Найдите $\cos A$.



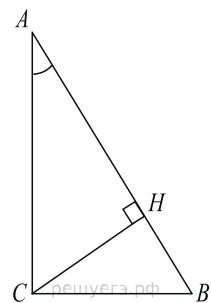
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\cos A = \cos \angle HCB = \frac{CH}{CB} = \frac{\sqrt{CB^2 - HB^2}}{CB} = \frac{\sqrt{625 - 400}}{25} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

22. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, $BC = 4\sqrt{5}$, $BH = 4$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



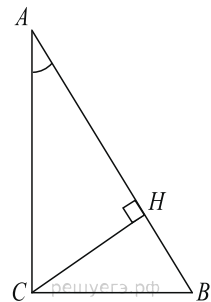
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \angle HCB = \frac{HB}{CH} = \frac{HB}{\sqrt{CB^2 - HB^2}} = \frac{4}{\sqrt{80 - 16}} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

23. В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 20, $BC = 25$. Найдите $\sin A$.



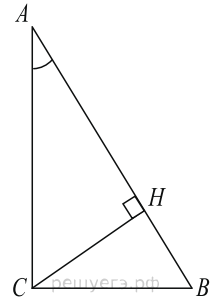
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\sin A = \sin \angle HCB = \frac{HB}{CB} = \frac{\sqrt{CB^2 - CH^2}}{CB} = \frac{\sqrt{625 - 400}}{25} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

24. В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 4, $BC = 8$. Найдите $\cos A$.



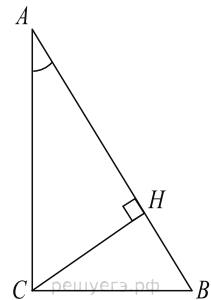
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\cos A = \cos \angle HCB = \frac{CH}{CB} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

25. В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 4, $BC = \sqrt{17}$.
Найдите $\operatorname{tg} A$.



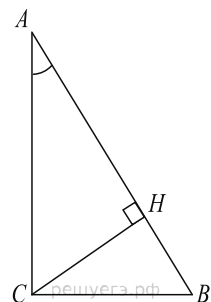
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \angle HCB = \frac{HB}{CH} = \frac{\sqrt{CB^2 - CH^2}}{CH} = \frac{\sqrt{17 - 16}}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

26. В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 24, $BH = 7$.
Найдите $\sin A$.



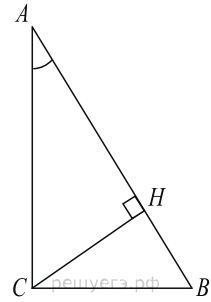
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\sin A = \sin \angle HCB = \frac{HB}{CB} = \frac{HB}{\sqrt{CH^2 + HB^2}} = \frac{7}{\sqrt{49 + 576}} = \frac{7}{25} = 0,28.$$

Ответ: 0,28.

27. В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 7, $BH = 24$.
Найдите $\cos A$.



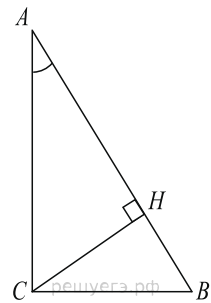
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\cos A = \cos \angle HCB = \frac{CH}{CB} = \frac{CH}{\sqrt{CH^2 + HB^2}} = \frac{7}{\sqrt{625}} = 0,28.$$

Ответ: 0,28.

28. В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 8, $BH = 4$.
Найдите $\operatorname{tg} A$.



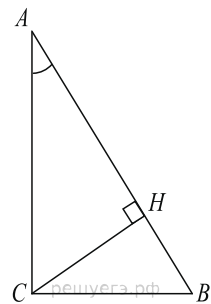
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \angle HCB = \frac{HB}{CH} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

29. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, $BH = 12$,
 $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите AB .



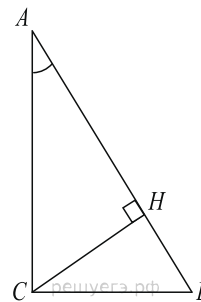
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами, поэтому

$$AB = \frac{CB}{\sin \angle A} = \frac{\frac{HB}{\sin \angle HCB}}{\sin \angle A} = \frac{HB}{\sin^2 A} = \frac{12 \cdot 9}{4} = 27.$$

Ответ: 27.

30. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, $AH = 12$,
 $\cos A = \frac{2}{3}$. Найдите AB .



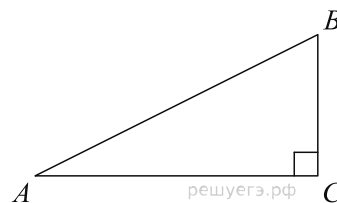
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами,

$$AB = \frac{AC^2}{AH} = \frac{\left(\frac{AH}{\cos A}\right)^2}{AH} = \frac{AH}{\cos^2 A} = \frac{12 \cdot 9}{4} = 27.$$

Ответ: 27.

31. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.



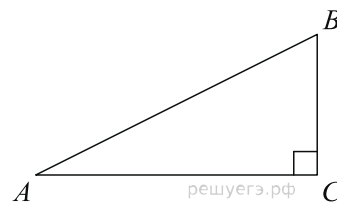
Решение.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. По теореме Пифагора $a^2 = 100 - 36 = 64$, $a = 8$, где a — второй катет. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

Ответ: 24.

32. Площадь прямоугольного треугольника равна 24. Один из его катетов на 2 больше другого. Найдите меньший катет.



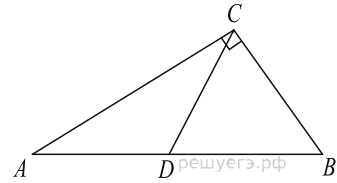
Решение.

Пусть x — меньший катет, тогда $x + 2$ — больший. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов:

$$\frac{1}{2}x(x+2) = 24 \Leftrightarrow x(x+2) = 48 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ x = -8, \Leftrightarrow x = 6. \\ x > 0 \end{cases}$$

Ответ: 6.

33. В треугольнике ABC угол ACB равен 90° , угол B равен 58° , CD — медиана. Найдите угол ACD . Ответ дайте в градусах.



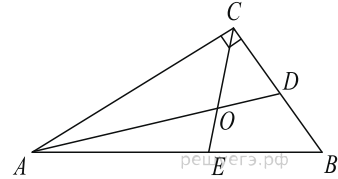
Решение.

CD — медиана в прямоугольном треугольнике, значит, $CD = AD = BD$. Тогда треугольник ACD — равнобедренный, углы при его основании равны.

$$\angle ACD = \angle A = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ.$$

Ответ: 32.

34. Острый угол прямоугольного треугольника равен 32° . Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника. Ответ дайте в градусах.

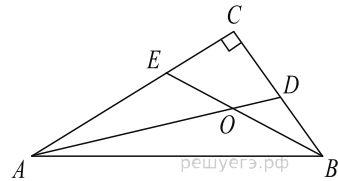


Решение.

$$\angle AOE = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A) = \frac{90^\circ}{2} + \frac{32^\circ}{2} = 61^\circ.$$

Ответ: 61.

35. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

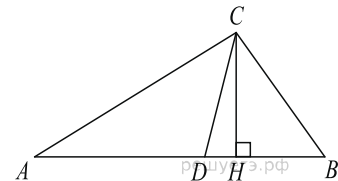


Решение.

$$\angle BOD = 180^\circ - \angle BOA = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)\right) = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Ответ: 45.

36. Один из углов прямоугольного треугольника равен 29° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

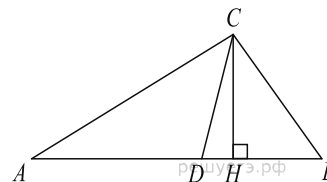


Решение.

$$\begin{aligned} \angle DCH &= \angle C - \angle ACD - \angle BCH = \angle C - \frac{\angle C}{2} - (90^\circ - \angle B) = \\ &= 90^\circ - 45^\circ - 29^\circ = 16^\circ. \end{aligned}$$

Ответ: 16.

37. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла, равен 21° . Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.



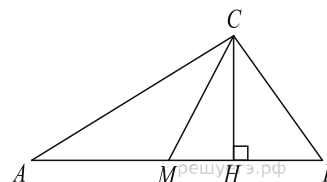
Решение.

Меньшим будет угол A , так как угол ACH в прямоугольном треугольнике ACH очевидно больше, чем угол HCB в прямоугольном треугольнике HCB . Рассмотрим треугольник ACH .

$$\angle A = 90^\circ - \angle ACH = 90^\circ - (\angle ACD + \angle DCH) = 90^\circ - (45^\circ + 21^\circ) = 24^\circ.$$

Ответ: 24.

38. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66° . Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



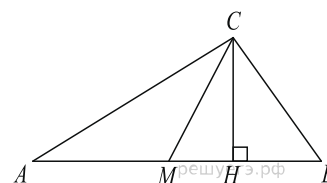
Решение.

Так как CM — медиана, то $AM = MC$ (свойство медианы в прямоугольном треугольнике), а значит, углы A и ACM равны как углы при основании равнобедренного треугольника.

$$\angle MCH = \angle C - \angle ACM - \angle BCH = 90^\circ - 24^\circ - (90^\circ - 66^\circ) = 42^\circ.$$

Ответ: 42.

39. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла, равен 40° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



Решение.

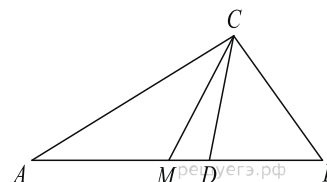
В прямоугольном треугольнике CHM угол C равен 40° , поэтому угол M равен 50° .

В треугольнике ACB прямоугольный, CM — медиана, опущенная из вершины прямого угла, следовательно, $CM = MB$, и углы B и MCB равны как углы при основании равнобедренного треугольника. Тогда

$$\angle B = \frac{180^\circ - \angle CMB}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - \angle MCH)}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ.$$

Ответ: 65.

40. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



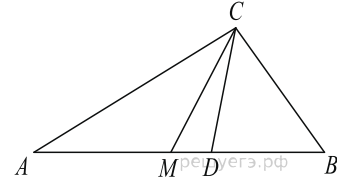
Решение.

Так как CM — медиана, то $AM = MC$ (свойство медианы в прямоугольном треугольнике), а значит, углы A и ACM равны как углы при основании равнобедренного треугольника.

$$\angle MCD = \angle C - \frac{\angle C}{2} - \angle ACM = \frac{\angle C}{2} - \angle A = 45^\circ - 24^\circ = 21^\circ.$$

Ответ: 21.

41. Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведенными из вершины прямого угла, равен 14° . Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

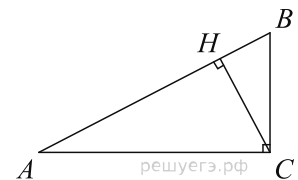
**Решение.**

Так как CM — медиана, то $AM = MC$ (свойство медианы в прямоугольном треугольнике), а значит, углы A и ACM равны как углы при основании равнобедренного треугольника.

$$\angle A = \angle ACM = \angle C - \angle BCD - \angle MCD = 90^\circ - 45^\circ - 14^\circ = 31^\circ.$$

Ответ: 31.

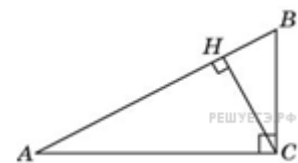
42. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH .

**Решение.**

$$CH = AC \sin A = AB \cos A \sin A = 2\sqrt{3} \cos 30^\circ \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

43. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 30° , $AB = 2$. Найдите AH .

**Решение.**

$$AH = AC \cos A = AB \cos^2 A = 2 \cos^2 30^\circ = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

44. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 30° , $AB = 4$. Найдите BH .



Решение.

В треугольнике ABC катет BC лежит напротив угла в 30° , поэтому он вдвое меньше гипотенузы AB : его длина равна 2. В треугольнике BHC катет BH лежит напротив угла в 30° , поэтому он вдвое меньше гипотенузы BC : его длина равна 1.

Ответ: 1.

45. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Найдите угол BOC , если угол BAC равен 32° . Ответ дайте в градусах.

Решение.

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, а центральный угол равен дуге, на которую он опирается. Поэтому центральный угол BOC вдвое больше вписанного угла BAC (см. рис.). Таким образом, он равен 64° .

Ответ: 64.

