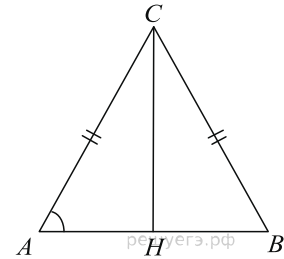


Решение равнобедренного треугольника

1. В треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AB .



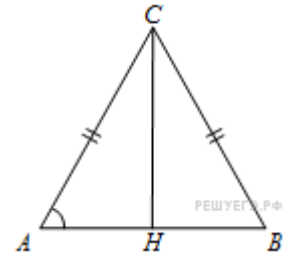
Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, поэтому высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$\begin{aligned} AB &= 2AH = 2AC \cos A = 2AC \sqrt{1 - \sin^2 A} = \\ &= 2 \cdot 5 \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = 10 \cdot \frac{24}{25} = 9,6. \end{aligned}$$

Ответ: 9,6.

2. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 9,6$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AC .



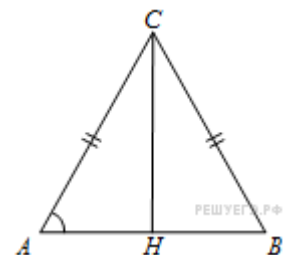
Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$AC = \frac{AH}{\cos A} = \frac{AB}{2 \cos A} = \frac{AB}{2 \sqrt{1 - \sin^2 A}} = \frac{9,6}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2}} = \frac{4,8 \cdot 25}{24} = 5.$$

Ответ: 5.

3. В треугольнике ABC $AC = BC = 8$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB .



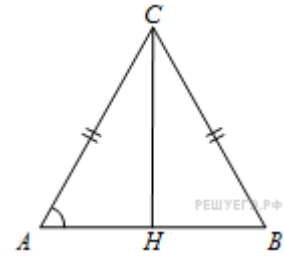
Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, поэтому высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$AB = 2AH = 2AC \cos A = 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 8.$$

Ответ: 8.

4. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 8$, $\cos A = 0,5$. Найдите AC .



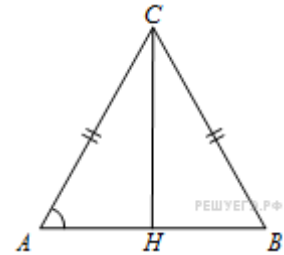
Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$AC = \frac{AH}{\cos A} = \frac{AB}{2 \cos A} = \frac{8}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 8.$$

Ответ: 8.

5. В треугольнике ABC $AC = BC = 7$, $\operatorname{tg} A = \frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите AB .



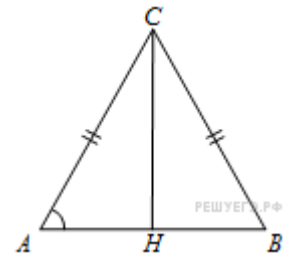
Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$AB = 2AH = 2AC \cos A = 2AC \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 A}} = 2 \cdot 7 \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{33}{16}}} = 2 \cdot 7 \sqrt{\frac{16}{49}} = 8.$$

Ответ: 8.

6. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 8$, $\operatorname{tg} A = \frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите AC .



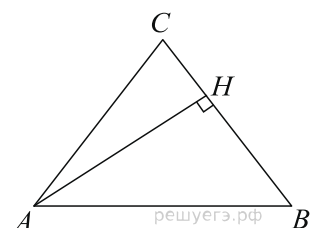
Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, поэтому высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$AC = \frac{AH}{\cos A} = \frac{AB}{2 \cos A} = \frac{AB}{2 \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 A}}} = \frac{8}{2 \sqrt{\frac{16}{49}}} = 7.$$

Ответ: 7.

7. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 8$, $\sin BAC = 0,5$. Найдите высоту AH .



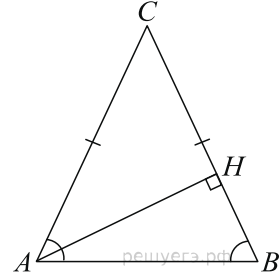
Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, поэтому углы BAC и ABH равны как углы при его основании. Тогда

$$AH = AB \sin \angle ABH = AB \sin \angle BAC = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Ответ: 4.

8. В треугольнике ABC $AC = BC$, AH – высота, $AB = 5$, $\sin BAC = \frac{7}{25}$. Найдите BH .

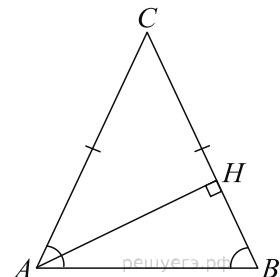
**Решение.**

Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.

$$\begin{aligned} BH &= AB \cos \angle ABH = AB \cos \angle BAC = AB \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC} = \\ &= 5 \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = 5 \cdot \frac{24}{25} = 4,8. \end{aligned}$$

Ответ: 4,8.

9. В треугольнике ABC , $AC = BC$, $AB = 5$, $\cos \angle BAC = \frac{7}{25}$. Найдите высоту AH .

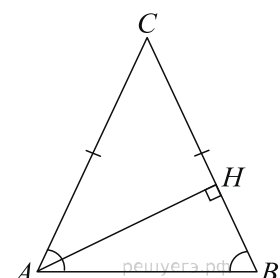
**Решение.**

Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.

$$\begin{aligned} AH &= AB \sin \angle ABH = AB \sin \angle BAC = AB \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \\ &= 5 \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = 5 \cdot \frac{24}{25} = 4,8. \end{aligned}$$

Ответ: 4,8.

10. В треугольнике ABC $AC = BC$, AH – высота, $AB = 8$, $\cos BAC = 0,5$. Найдите BH .



Решение.

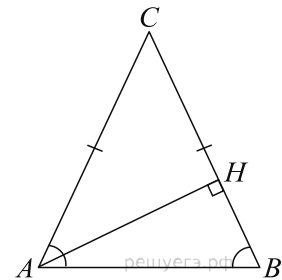
Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.

$$BH = AB \cos \angle ABH = AB \cos \angle BAC = 4.$$

Ответ: 4.

11. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 7$, $\operatorname{tg} BAC = \frac{4\sqrt{33}}{33}$.

Найдите высоту AH .

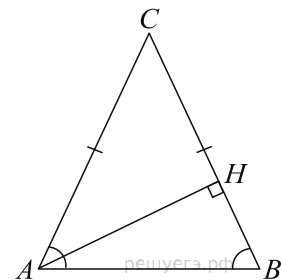
**Решение.**

Последовательно получаем:

$$AH = AB \sin \angle ABH = AB \sin \widehat{ABC} = AB \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \widehat{ABC}}} = 7 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{33}{16}}} = 4.$$

Ответ: 4.

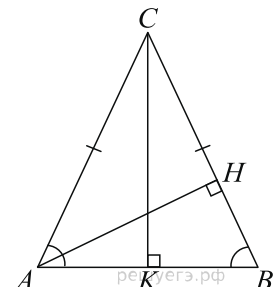
12. В треугольнике ABC $AC = BC$, AH – высота, $AB = 7$, $\operatorname{tg} BAC = \frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите BH .

**Решение.**

$$BH = AB \cos \angle ABH = AB \cos \angle BAC = AB \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \angle BAC}} = 7 \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{33}{16}}} = 4$$

Ответ: 4.

13. В треугольнике ABC $AC = BC = 4\sqrt{15}$, $\sin BAC = 0,25$. Найдите высоту AH .



Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании и высота, проведенная из точки C делит основание AB пополам.

$$\begin{aligned} AH &= AB \cdot \sin \angle ABH = AB \cdot \sin \angle BAC = 2AK \cdot \sin \angle BAC = \\ &= 2AC \cdot \cos \angle BAC \cdot \sin \angle BAC = 2AC \cdot \sin \angle BAC \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC} = \\ &= 2 \cdot 4\sqrt{15} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{15}{2} = 7,5. \end{aligned}$$

Приведем другое решение.

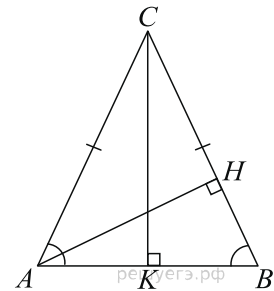
Проведем из вершины C высоту CK . Тогда: $\cos CAK = \frac{AK}{AC}$. Кроме того $\cos CAK = \sqrt{1 - \sin^2 CAK} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Поэтому $AB = 2AK = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot 4\sqrt{15} = 30$. Тогда высота $AH = \sin BAC \cdot AB = 0,25 \cdot 30 = 7,5$.

Ответ: 7,5.

14. В треугольнике ABC $AC = BC = 27$, AH — высота, $\sin BAC = \frac{2}{3}$. Найдите BH .

Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании, а высота, проведенная из точки C , делит основание AB пополам. Имеем:

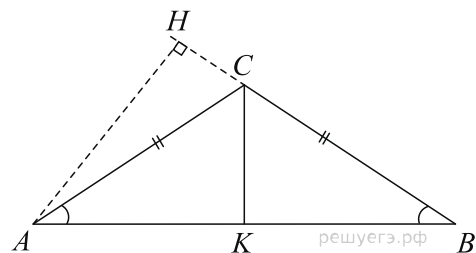


$$\begin{aligned} BH &= AB \cos \angle ABH = AB \cos \angle BAC = 2AK \cos \angle BAC = 2AC \cos^2 \angle BAC = \\ &= 2AC(1 - \sin^2 \angle BAC) = 2 \cdot 27 \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right) = 30. \end{aligned}$$

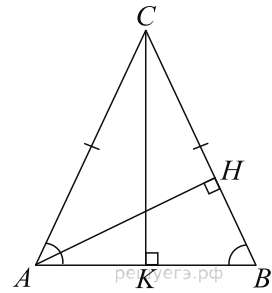
Ответ: 30.

Примечание.

Внимательный читатель заметит, что расстояние BH получилась больше, чем длина BC . Связано это с тем, что на самом деле описанный в условии треугольник является тупоугольным. Однако это не влияет на корректность решения задачи.



15. В треугольнике ABC $AC = BC = 4\sqrt{15}$, $\cos BAC = 0,25$. Найдите высоту AH .



Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании, а высота, проведенная из точки C , делит основание AB пополам.

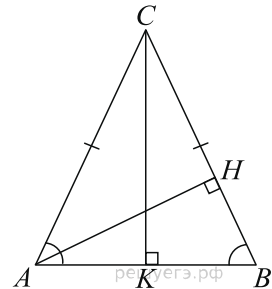
$$AH = AB \sin \angle ABH = AB \sin \angle BAC = 2AK \sin \angle BAC =$$

$$= 2AC \cos \angle BAC \sin \angle BAC = 2AC \cos \angle BAC \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} =$$

$$= 2 \cdot 4\sqrt{15} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = 2\sqrt{15} \sqrt{\frac{15}{16}} = 2\sqrt{15} \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Ответ: 7,5.

16. В треугольнике ABC $AC = BC = 27$, AH — высота, $\cos \angle BAC = \frac{2}{3}$. Найдите BH .



Решение.

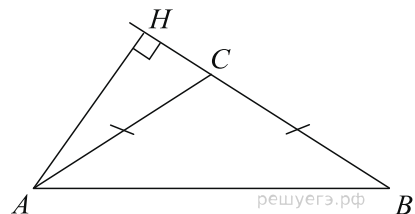
Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании и высота, проведенная из точки C делит основание AB пополам.

$$BH = AB \cos \angle ABH = AB \cos \angle BAC = 2AK \cos \angle BAC =$$

$$= 2AC \cos^2 \angle BAC = 2 \cdot 27 \cdot \frac{4}{9} = 24.$$

Ответ: 24.

17. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 8$, высота AH равна 4. Найдите $\sin \angle ACB$.



Решение.

Выразим площадь треугольника двумя способами:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot CB \sin ACB = 32 \sin ACB, \quad S = \frac{1}{2}AH \cdot CB = 16.$$

Отсюда имеем:

$$32 \sin ACB = 16, \quad \sin ACB = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

Приведём другое решение.

Синусы смежных углов равны, поэтому $\sin ACB = \sin ACH = \frac{AH}{AC} = 0,5$.

18. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 25$, высота AH равна 20. Найдите $\cos ACB$.

Решение.

Косинусы смежных углов противоположны, поэтому

$$\cos \widehat{ACB} = -\cos \widehat{ACH} = -\frac{HC}{AC} = -\frac{\sqrt{AC^2 - AH^2}}{AC} = -\frac{15}{25} = -0,6.$$

Ответ: -0,6.

19. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 4\sqrt{5}$, высота AH равна 4. Найдите $\operatorname{tg} ACB$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle ACB &= \operatorname{tg}(\pi - \angle ACH) = -\operatorname{tg} \angle ACH = -\frac{AH}{HC} = \\ &= -\frac{AH}{\sqrt{AC^2 - AH^2}} = -\frac{4}{8} = -0,5. \end{aligned}$$

Ответ: -0,5.

20. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 8$, AH – высота, $CH = 4$. Найдите $\cos ACB$.

Решение.

$$\cos \angle ACB = \cos(\pi - \angle ACH) = -\cos \angle ACH = -\frac{HC}{AC} = -\frac{4}{8} = -0,5.$$

Ответ: -0,5.

21. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = \sqrt{17}$, AH – высота, $CH = 4$. Найдите $\operatorname{tg} ACB$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle ACB &= \operatorname{tg}(\pi - \angle ACH) = -\operatorname{tg} \angle ACH = -\frac{AH}{CH} = \\ &= -\frac{\sqrt{AC^2 - CH^2}}{CH} = -\frac{\sqrt{17 - 16}}{4} = -0,25 \end{aligned}$$

Ответ: -0,25.

22. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 7, $CH = 24$. Найдите $\sin ACB$.

Решение.

$$\begin{aligned}\sin \angle ACB &= \sin(\pi - \angle ACH) = \sin \angle ACH = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{\sqrt{AH^2 + HC^2}} = \\ &= \frac{7}{\sqrt{49 + 576}} = \frac{7}{25} = 0,28.\end{aligned}$$

Ответ: 0,28.

23. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 24, $CH = 7$. Найдите $\cos ACB$.

Решение.

$$\begin{aligned}\cos \angle ACB &= \cos(\pi - \angle ACH) = -\cos \angle ACH = -\frac{CH}{AC} = \\ &= -\frac{CH}{\sqrt{CH^2 + AH^2}} = -\frac{7}{\sqrt{625}} = -0,28.\end{aligned}$$

Ответ: -0,28.

24. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 4, $CH = 8$. Найдите $\operatorname{tg} ACB$.

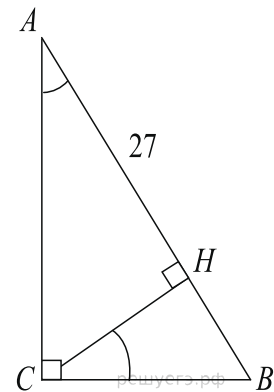
Решение.

$$\operatorname{tg} \angle ACB = \operatorname{tg}(\pi - \angle ACH) = -\operatorname{tg} \angle ACH = -\frac{AH}{CH} = -0,5.$$

Ответ: -0,5.

25.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AH = 27$, $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Найдите BH .

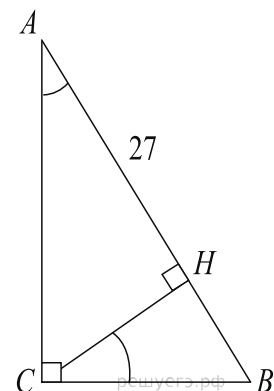


Решение.

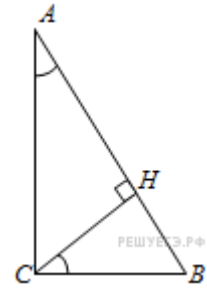
Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому из треугольников BHC и BCA имеем:

$$BH = CH \operatorname{tg} \angle HCB = CH \operatorname{tg} A = AH \operatorname{tg}^2 A = 27 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 12.$$

Ответ: 12.



26. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, $BH = 12$, $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Найдите AH .



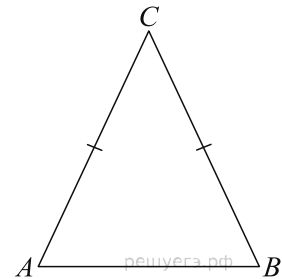
Решение.

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$AH = \frac{CH}{\operatorname{tg} A} = \frac{HB}{\operatorname{tg}^2 A} = \frac{12 \cdot 9}{4} = 27.$$

Ответ: 27.

27. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.



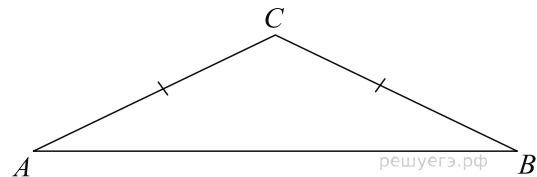
Решение.

Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \sin 30^\circ = 25 \text{ см}^2.$$

Ответ: 25.

28. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.



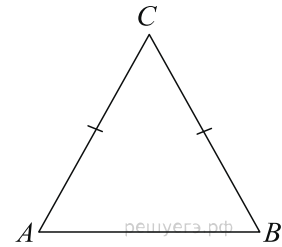
Решение.

Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot \sin 150^\circ = 200 \sin 30^\circ = 100 \text{ см}^2.$$

Ответ: 100.

29. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника.



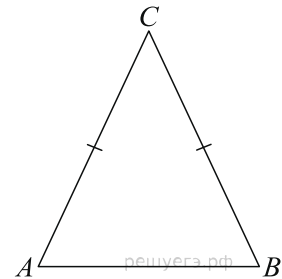
Решение.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту, опущенную на это основание. Высота в равнобедренном треугольнике, опущенная на основание, делит равнобедренный треугольник на два равных прямоугольных треугольника. По теореме Пифагора высота будет определяться соотношением $h^2 = 25 - 9 = 16$, откуда $h = 4$. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12.$$

Ответ: 12.

30. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 25.



Решение.

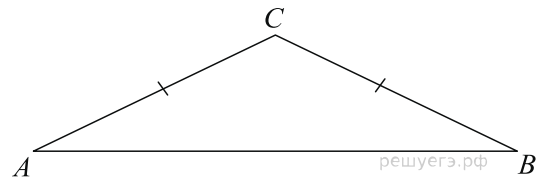
Площадь равнобедренного треугольника равна половине произведения квадрата его боковой стороны и синуса угла между боковыми сторонами, следовательно,

$$S = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 30^\circ = 25,$$

где a — искомая боковая сторона треугольника. Поэтому $a = 10$.

Ответ: 10.

31. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 100.



Решение.

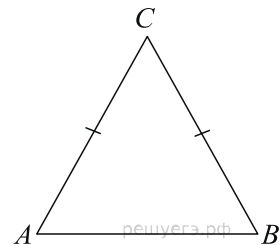
Площадь равнобедренного треугольника равна половине произведения квадрата его боковой стороны и синуса угла между боковыми сторонами, следовательно,

$$S = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 150^\circ = 100,$$

где a — искомая боковая сторона треугольника. Поэтому $a = 20$.

Ответ: 20.

32. В треугольнике ABC угол A равен 38° , $AC = BC$. Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.



Решение.

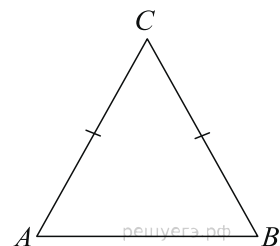
Треугольник ABC равнобедренный, углы при его основании равны. Поэтому

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 2\angle A = 104^\circ.$$

Ответ: 104.

33. В треугольнике ABC угол C равен 118° , $AC = BC$. Найдите угол A .

Ответ дайте в градусах.



Решение.

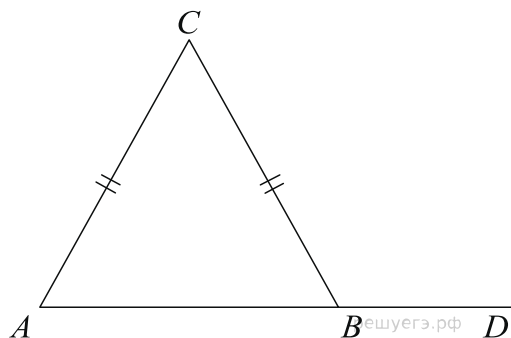
Треугольник ABC равнобедренный, углы при его основании равны. Поэтому

$$\angle A = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \frac{62^\circ}{2} = 31^\circ.$$

Ответ: 31.

34. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 52° .

Найдите внешний угол CBD . Ответ дайте в градусах.



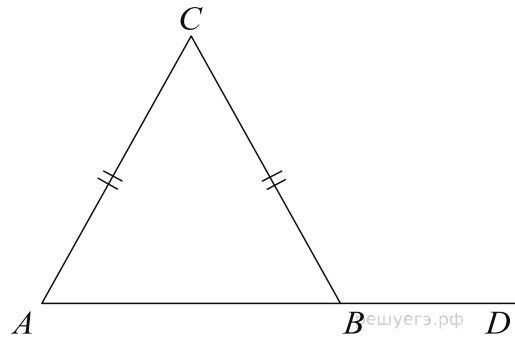
Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, углы при его основании равны. Поэтому

$$\angle CBD = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle C}{2} = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ.$$

Ответ: 116.

35. В треугольнике ABC $AC = BC$. Внешний угол при вершине B равен 122° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.



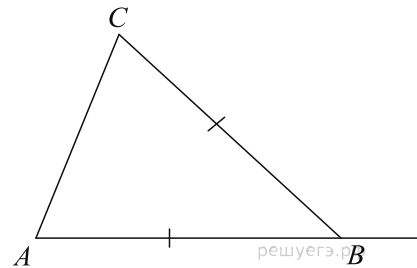
Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, углы при его основании равны. Поэтому

$$\angle C = 180^\circ - 2\angle B = 180^\circ - 2(180^\circ - \angle CBD) = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ.$$

Ответ: 64.

36. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 138° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.



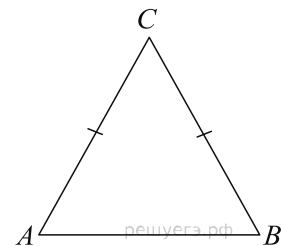
Решение.

так как треугольник ABC равнобедренный, то углы при его основании равны.

$$\angle C = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - 138^\circ)}{2} = 69^\circ.$$

Ответ: 69.

37. Больший угол равнобедренного треугольника равен 98° . Найдите меньший угол. От-вет дайте в градусах.



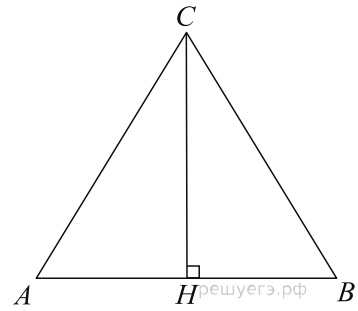
Решение.

Углы при основании равнобедренного равны и являются острыми углами. Тогда данный в условии угол является углом при вершине, откуда

$$\angle A = \frac{180^\circ - 98^\circ}{2} = 41^\circ.$$

Ответ: 41.

38. В треугольнике ABC $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH .



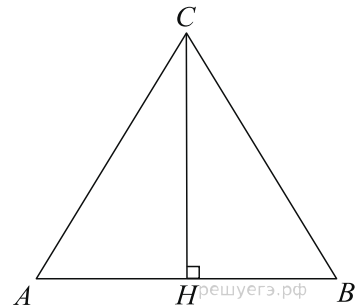
Решение.

треугольник ABC – равносторонний, значит, все углы в треугольнике равны 60° .

$$CH = AC \sin A = 2\sqrt{3} \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

39. В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $2\sqrt{3}$.
Найдите стороны этого треугольника.



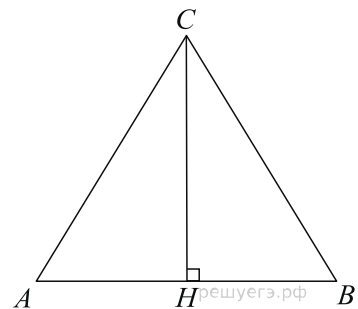
Решение.

треугольник ABC – равносторонний, значит, все углы в треугольнике равны 60° .

$$AC = \frac{CH}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 4.$$

Ответ: 4.

40. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 4$, высота CH равна $2\sqrt{3}$.
Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.



Решение.

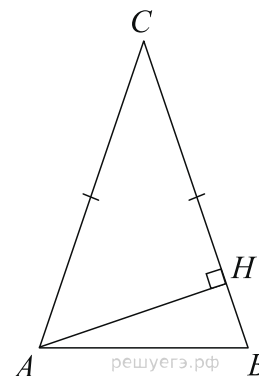
Высота в равнобедренном треугольнике является медианой, поэтому $AH = 2$. Рассмотрим треугольник AHC , по теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{4 + 12} = 4.$$

Угол ACH , лежащий против катета, равного половине гипотенузы, равен 30° . Поскольку искомый угол ACB вдвое больше, он равен 60° .

Ответ: 60.

41. В треугольнике ABC $AC = BC = 4$, угол C равен 30° . Найдите высоту AH .

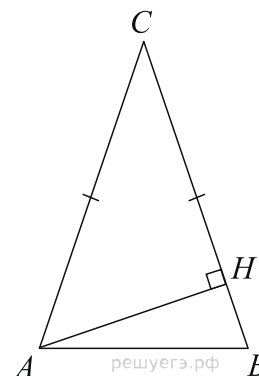


Решение.

$$AH = AC \sin C = 4 \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

42. В треугольнике ABC $AC = BC = 6$, высота AH равна 3. Найдите угол C .
 Ответ дайте в градусах.

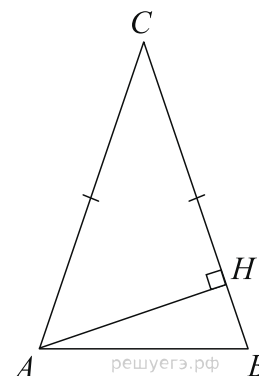


Решение.

Рассмотрим треугольник AHC . Угол C лежит против катета, который равен половине гипотенузы, а значит, равен 30° .

Ответ: 30.

43. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 4, угол C равен 30° . Найдите AC .



Решение.

$$AC = \frac{AH}{\sin C} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 4 \cdot 2 = 8.$$

Ответ: 8.

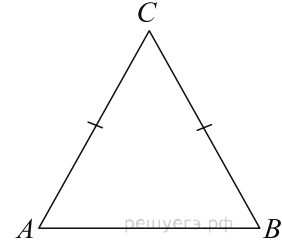
44. В треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{3}$, угол C равен 120° . Найдите высоту AH .

Решение.

$$\begin{aligned}AH &= AC \sin \angle ACH = AC \sin(180^\circ - \angle C) = \\&= 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.\end{aligned}$$

Ответ: 3.

45. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AB = 2\sqrt{3}$.
Найдите AC .



Решение.

воспользуемся теоремой косинусов:

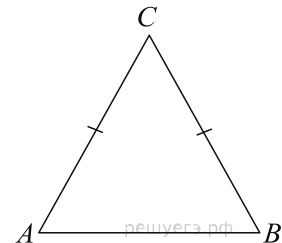
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C = 2AC^2(1 - \cos C),$$

Тогда

$$AC = \sqrt{\frac{AB^2}{2(1 - \cos C)}} = \sqrt{\frac{12}{2(1 + 0,5)}} = 2.$$

Ответ: 2.

46. ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите AB .



Решение.

воспользуемся теоремой косинусов:

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{2AC^2(1 - \cos C)} = \\&= \sqrt{2 \cdot 12(1 - \cos 120^\circ)} = 6.\end{aligned}$$

Ответ: 6.