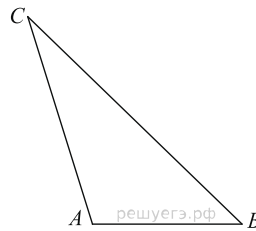


Треугольники общего вида

1. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30° .



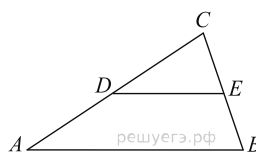
Решение.

Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 24 \text{ см}^2.$$

Ответ: 24.

2. Площадь треугольника ABC равна 4. DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE .



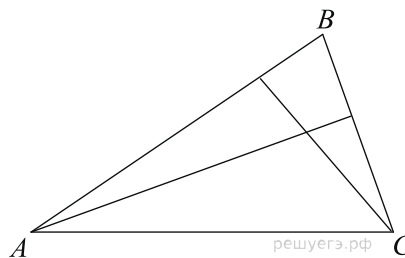
Решение.

Средняя линия отсекает от треугольника подобный ему с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия. Тогда

$$S = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \text{ см}^2.$$

Ответ: 1.

3. У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?

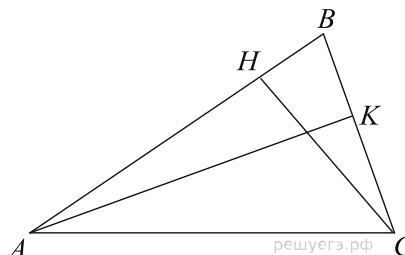


Решение.

Выразим площадь двумя способами:

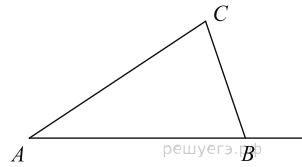
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{1}{2} AK \cdot CB.$$

$$\text{Тогда, } AK = \frac{CH \cdot AB}{CB} = \frac{4 \cdot 9}{6} = 6$$



Ответ: 6.

4. В треугольнике ABC угол A равен 40° , внешний угол при вершине B равен 102° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.



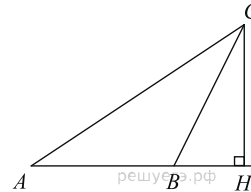
Решение.

Внешний угол треугольника равен сумме несмежных с ним углов этого треугольника. Поэтому

$$\angle C = \angle B_{\text{внешн}} - \angle A = 102^\circ - 40^\circ = 62^\circ.$$

Ответ: 62.

5. В треугольнике ABC угол A равен 30° , CH — высота, угол BCH равен 22° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.

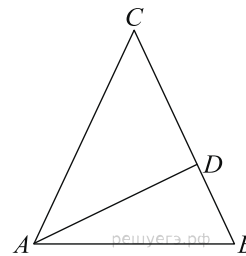


Решение.

$$\angle ACB = \angle ACH - \angle BCH = (90^\circ - \angle A) - \angle BCH = (90^\circ - 30^\circ) - 22^\circ = 38^\circ.$$

Ответ: 38.

6. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 50° , угол CAD равен 28° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.



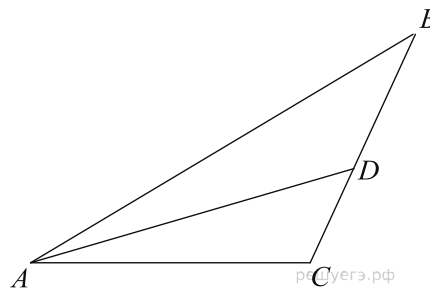
Решение.

так как AD — биссектриса, она делит угол пополам. Имеем

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 2\angle CAD - \angle C = 180^\circ - 2 \cdot 28^\circ - 50^\circ = 74^\circ.$$

Ответ: 74.

7. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 30° , угол BAD равен 22° . Найдите угол ADB . Ответ дайте в градусах.

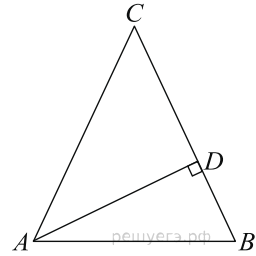


Решение.

Поскольку AD — биссектриса $\angle CAD = \angle BAD = 22^\circ$. Угол ADB является внешним углом треугольника ADC , поэтому он равен сумме двух не смежных с ним углов: $\angle ADB = \angle CAD + \angle ACD = 52^\circ$.

Ответ: 52.

8. В треугольнике ABC $AC = BC$, AD — высота, угол BAD равен 24° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.



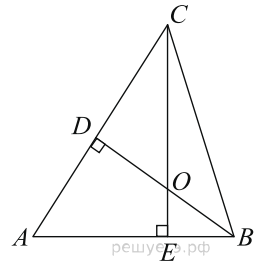
Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы при его основании равны.

$$\angle C = 180^\circ - 2\angle B = 180^\circ - 2(90^\circ - \angle BAD) = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ.$$

Ответ: 48.

9. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 65° . BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.



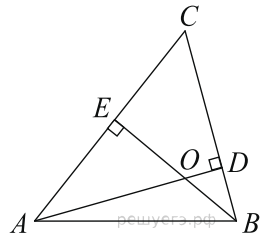
Решение.

Сумма углов в выпуклом четырехугольнике равна 360 градусам, следовательно,

$$\angle DOE = 360^\circ - \angle ADO - \angle OEA - \angle A = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$

Ответ: 115.

10. Два угла треугольника равны 58° и 72° . Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



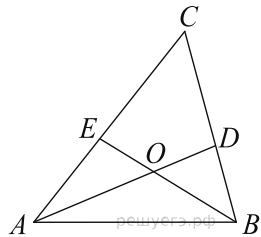
Решение.

Сумма углов в выпуклом четырёхугольнике равна 360 градусам, следовательно,

$$\begin{aligned} \angle DOE &= 360^\circ - \angle CDO - \angle CEO - \angle C = \\ &= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ - 58^\circ - 72^\circ) = 130^\circ. \end{aligned}$$

Ответ: 130.

11. В треугольнике ABC угол C равен 58° , AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



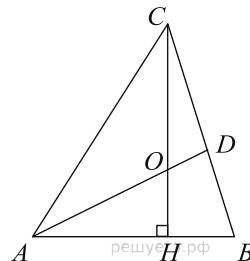
Решение.

Рассмотри угол AOB в треугольнике AOB :

$$\begin{aligned}\angle AOB &= 180^\circ - (\angle OAB + \angle OBA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 180^\circ - 61^\circ = 119^\circ.\end{aligned}$$

Ответ: 119.

12. В треугольнике ABC CH — высота, AD — биссектриса, O — точка пересечения CH и AD , угол BAD равен 26° . Найдите угол AOC . Ответ дайте в градусах.

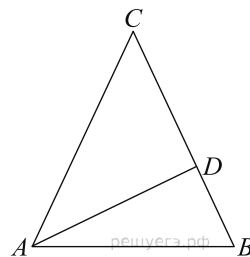
**Решение.**

Сумма углов треугольника равна 180° , откуда:

$$\angle AOC = 180^\circ - \angle OAC - \angle ACO = 180^\circ - \angle BAD - (90^\circ - 2\angle BAD) = 90^\circ + \angle BAD = 90^\circ + 26^\circ = 116^\circ.$$

Ответ: 116.

13. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и $AB = AD = CD$. Найдите меньший угол треугольника ABC . Ответ дайте в градусах.

**Решение.**

треугольник ADC — равнобедренный, значит, угол DAC равен углу ACD , как углы при его основании. треугольник ADB тоже равнобедренный, значит, угол ADB равен углу ABD , как углы при его основании, причем

$$\angle ADB = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle ACD) = 2\angle ACD.$$

Тогда

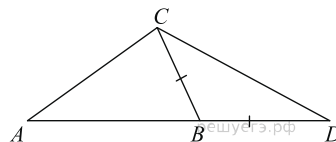
$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD + \angle DAC + \angle ABD + \angle ACD = 180^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5\angle ACD = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ACD = 36^\circ.\end{aligned}$$

Ответ: 36.

Приведём другое решение.

Пусть $\angle DAB = \alpha$, тогда $\angle DAC = \alpha$, поскольку AD — биссектриса. Тогда $\angle ACD = \alpha$, поскольку треугольник ADC равнобедренный. Тогда $\angle ADB = 2\alpha$ как внешний угол треугольника ADC , и $\angle ABD = 2\alpha$, поскольку треугольник DAB равнобедренный. Получили, что в треугольнике DAB углы α , 2α и 2α . Вместе $5\alpha = 180^\circ$, тогда $\alpha = 36^\circ$. Это и есть искомый наименьший угол C треугольника ABC .

14. В треугольнике ABC угол A равен 44° , угол C равен 62° . На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD , равный стороне BC . Найдите угол D треугольника BCD . Ответ дайте в градусах.



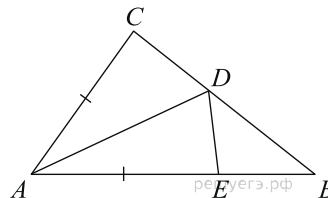
Решение.

Треугольник CBD — равнобедренный, значит, угол BDC равен углу BCD , как углы при его основании.

$$\begin{aligned}\angle D &= \frac{180^\circ - \angle CBD}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \angle CBA)}{2} = \\ &= \frac{\angle CBA}{2} = \frac{180^\circ - \angle A - \angle ACB}{2} = \frac{74^\circ}{2} = 37^\circ\end{aligned}$$

Ответ: 37.

15. В треугольнике ABC угол B равен 45° , угол C равен 85° , AD — биссектриса, E — такая точка на AB , что $AE = AC$. Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах.

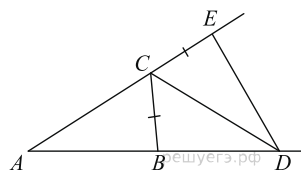
**Решение.**

Треугольники CAD и EAD равны по двум сторонам и углу, лежащему между ними, значит, $\angle C = \angle DEA = 85^\circ$. Тогда

$$\angle BDE = 180^\circ - \angle B - \angle BED = 180^\circ - 45^\circ - (180^\circ - 85^\circ) = 40^\circ.$$

Ответ: 40.

16. В треугольнике ABC угол A равен 30° , угол B равен 86° , CD — биссектриса внешнего угла при вершине C , причем точка D лежит на прямой AB . На продолжении стороны AC за точку C выбрана такая точка E , что $CE = CB$. Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах

**Решение.**

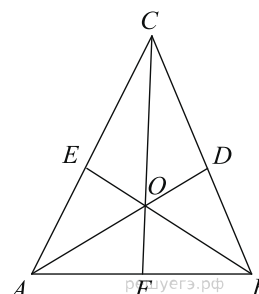
Треугольники CBD и ECD равны по двум сторонам и углу, лежащему между ними, значит, $\angle BDC = \angle CDE$. Тогда

$$\angle BDE = 2\angle BDC = 2(180^\circ - \angle BCD - \angle CBD).$$

Учитывая, что $\angle BCD = \angle BCE/2 = (\angle A + \angle B)/2 = 58^\circ$ и $\angle CBD = 180^\circ - \angle B = 94^\circ$, получим $\angle BDE = 56^\circ$.

Ответ: 56.

17. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 82° . AD , BE и CF — биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF . Ответ дайте в градусах.

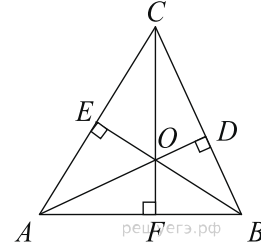


Решение.

$$\begin{aligned}\angle AOF &= 180^\circ - \angle OAF - \angle OFA = 180^\circ - \frac{\angle A}{2} - \left(180^\circ - \angle A - \frac{\angle C}{2}\right) = \\ &= \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2} = \frac{1}{2}(\angle A + 180^\circ - \angle A - \angle B) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} = 49^\circ.\end{aligned}$$

Ответ: 49.

18. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 82° . AD , BE и CF — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF . Ответ дайте в градусах.



Решение.

Угол между высотами равен углу между сторонами, к которым они проведены: $\angle AOF = \angle B = 82^\circ$.

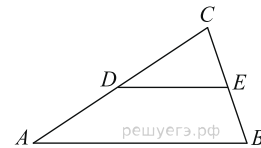
Ответ: 82.

19. Площадь треугольника ABC равна 10. DE — средняя линия, параллельная стороне AB . Найдите площадь трапеции $ABED$.

Решение.

Треугольник CDE подобен треугольнику CAB с коэффициентом 0,5. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому

$$S_{CDE} = \frac{1}{4} \cdot 10 = 2,5.$$

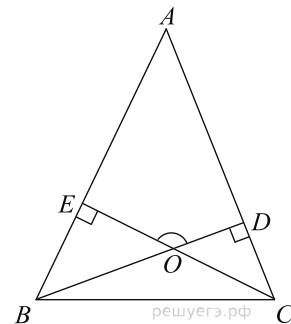


Следовательно, $S_{\text{трап}} = S_{ABC} - S_{CDE} = 10 - 2,5 = 7,5$.

Ответ: 7,5.

20.

В треугольнике ABC угол A равен 46° , углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.



Решение.

Сумма углов в выпуклом многоугольнике равна 360 градусам, следовательно,

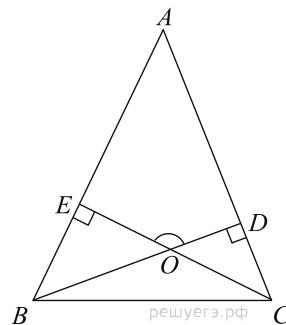
$$\angle DOE = 360^\circ - \angle ADO - \angle OEA - \angle A = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 46^\circ = 134^\circ.$$

Ответ: 134.

21. В треугольнике ABC угол A равен 43 градусам, углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

Решение.

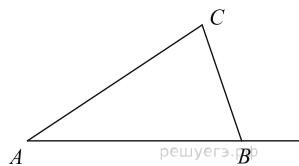
Сумма углов в выпуклом многоугольнике равна 360 градусам, следовательно,



$$\angle DOE = 360^\circ - \angle ADO - \angle OEA - \angle A = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 43^\circ = 137^\circ.$$

Ответ: 137.

22. В треугольнике ABC угол A равен 14° , внешний угол при вершине B равен 91° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.

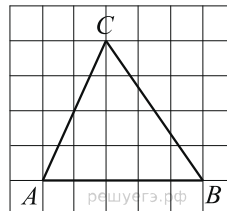
**Решение.**

Сумма внешнего угла при вершине B и самого угла B равна 180° . Поскольку сумма углов треугольника равна 180° , угол C равен

$$180^\circ - \angle A - (180^\circ - \angle B) = 180^\circ - 14^\circ - (180^\circ - 91^\circ) = 77^\circ.$$

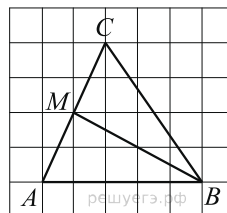
Ответ: 77.

23. На клетчатой бумаге с квадратными клетками изображён треугольник ABC . Найдите тангенс угла C .

**Решение.**

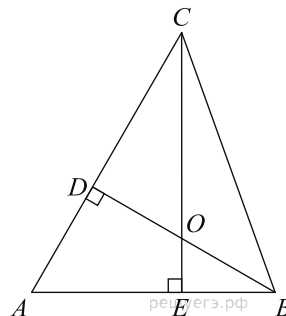
Проведём высоту BM . Треугольник BMC прямоугольный. Тогда тангенс угла C равен

$$\frac{BM}{MC} = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2.$$



Ответ: 2.

24. В треугольнике ABC угол A равен 41° , а углы B и C — острые, BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.



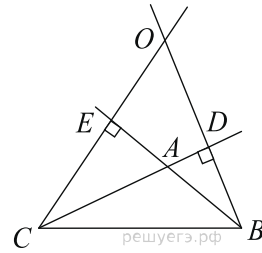
Решение.

Сумма углов в выпуклом четырехугольнике $ADOE$ равна 360 градусам, следовательно,

$$\angle DOE = 360^\circ - \angle ADO - \angle OEA - \angle A = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 41^\circ = 139^\circ.$$

Ответ: 139.

25. В треугольнике ABC угол A равен 135° . Продолжения высот BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

**Решение.**

Угол между прямыми равен углу между перпендикулярами к ним, поэтому $\angle DOE = \angle CAE = 180^\circ - \angle CAB = 45^\circ$.

Ответ: 45.

