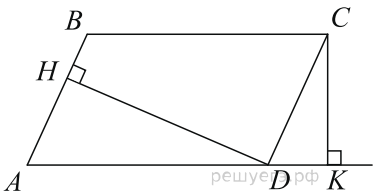
Параллелограммы

1. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 3$, $AD = 21$, $\sin A = \frac{6}{7}$.



Найдите большую высоту параллелограмма.

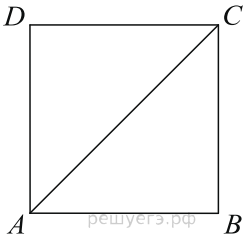
Решение.

Большая высота проведена к меньшей стороне. Имеем:

$$DH = AD\sin A = 21 \cdot \frac{6}{7} = 3 \cdot 6 = 18.$$

Ответ: 18.

2. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 1.



Решение.

Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей. Поэтому она равна 0,5.

Ответ: 0,5.

3. Площадь прямоугольника равна 18. Найдите его большую сторону, если она на 3 больше меньшей стороны.

Решение.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, тогда вторая равна $a + 3$. Поэтому $S = a \cdot (a + 3) = 18$, получаем $a^2 + 3a - 18 = 0$. Решая квадратное уравнение, получаем, что $a = 3$. Тогда большая сторона будет равна 6.

Ответ: 6.

4. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 18, а отношение соседних сторон равно 1:2.

Решение.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Периметр прямоугольника равен сумме длин всех сторон. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, тогда вторая равна $2a$. Площадь прямоугольника будет соответственно равна $S = 2a^2 = 18$, тогда одна из сторон равна 3, а другая 6. Поэтому $P = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 18$.

Ответ: 18.

5. Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.

Решение.

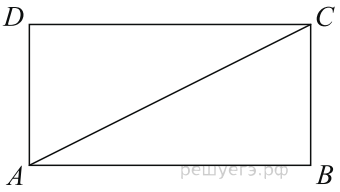
Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Периметр прямоугольника равен сумме длин всех сторон. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, вторая равна b. Площадь и периметр прямоугольника будут соответственно равны $S = a \cdot b = 98$, $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 42$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} a+b=21, \\ ab=98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=21-a, \\ a(21-a)=98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=21-a, \\ \left[\begin{array}{l} a=14, \\ a=7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=14, \\ b=7 \end{cases} \\ \begin{cases} a=7, \\ b=14. \end{cases} \end{array}\right.$$

Поэтому большая сторона равна 14.

Ответ: 14.

6. Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.



Решение.

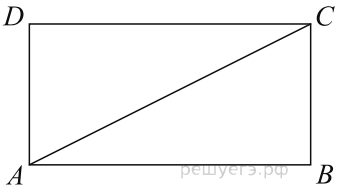
Периметр прямоугольника равен сумме длин его сторон. Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, вторая равна b. Периметр прямоугольника будет соответственно равен $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 28$. Диагональ образует в прямоугольнике два прямоугольных треугольника. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 100$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} a+b=14, \\ a^2+b^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ (a+b)^2-(a^2+b^2)=196-100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ 2ab=96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ ab=48. \end{cases}$$

Тем самым, $S = a \cdot b = 48$.

Ответ: 48.

7. Периметр прямоугольника равен 34, а площадь равна 60. Найдите диагональ этого прямоугольника.



Решение.

Периметр прямоугольника равен сумме длин его сторон. Площадь прямоугольника равна их произведению. Обозначим длины сторон a и b. Тогда периметр и площадь прямоугольника соответственно равны $P = 2(a+b) = 34$ и $S = ab = 60$. Решим систему:

$$\begin{cases} a+b=17, \\ ab=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=17-b, \\ 17b-b^2=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=17-b, \\ \left[\begin{array}{l} b=5, \\ b=12 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=12, \\ b=5, \end{cases} \\ \begin{cases} a=5, \\ b=12. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тем самым, стороны прямоугольника треугольника равны 5 и 12.

Диагональ разбивает прямоугольник на два прямоугольных треугольника, в которых она является гипотенузой. Пусть длина диагонали равна c, тогда по теореме Пифагора

$$c = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = 13.$$

Ответ: 13.

Примечание 1.

Можно заметить, что система уравнений $a+b=17, ab=60$ является системой Виета. Поэтому её решения — корни квадратного уравнения $t^2-17t+60=0$, откуда $t=5$ и $t=12$.

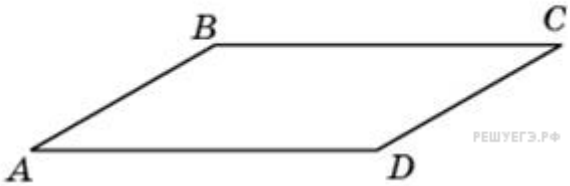
Примечание 2.

Можно было и вовсе не решать систему уравнений: действительно,

$$c^2 = a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab = 17^2-2\cdot 60 = 169 = 289-120 = 169,$$

откуда $c=13$.

8. ##



Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению его сторон на синус угла между ними. Площадь прямоугольника равна произведению длины на ширину. Пусть одна сторона параллелограмма и прямоугольника равна a, а вторая равна b, а острый угол параллелограмма равен α. Тогда площадь параллелограмма равна $S_1 = a\cdot b\cdot \sin\alpha$, а площадь прямоугольника равна $S_2 = a\cdot b$.

По условию площадь прямоугольника вдвое больше: $S_2 = 2S_1$. Следовательно,

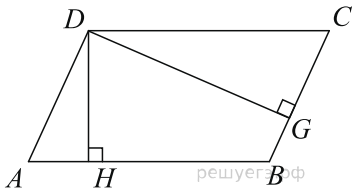
$$a\cdot b = 2\cdot a\cdot b\cdot \sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = 0{,}5 \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Ответ: 30.

9. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

Решение.

Пусть x — искомая высота. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, опущенную на это основание. Вычислим площадь параллелограмма двумя способами:



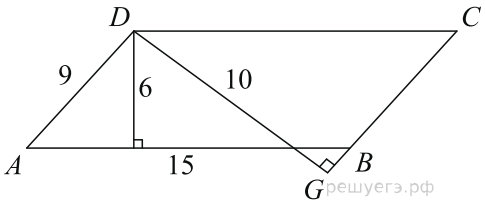
$$S = 9 \cdot 10 = 15 \cdot x.$$

Из полученного уравнения находим $x = 6$.

Ответ: 6.

Примечание.

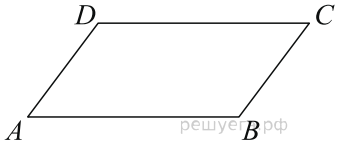
Внимательный читатель заметит, что если в прямоугольном треугольнике DGC вычислить длину катета CG, то окажется, что



$$CG = \sqrt{CD^2 - DG^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} > CB.$$

Связано это с тем, что на самом деле основание высоты параллелограмма падает на продолжение стороны CB за точку B. Однако это не влияет на корректность решения задачи.

10. Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту этого параллелограмма.

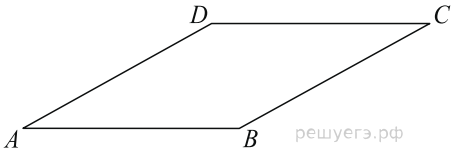


Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, опущенную на это основание. Пусть высоты равны соответственно a и b. Тогда $S = 5 \cdot a = 10 \cdot b = 40$. Поэтому $a = 8$, $b = 4$. Большая высота равна 8.

Ответ: 8.

11. Найдите площадь ромба, если его высота равна 2, а острый угол 30°.



Решение.

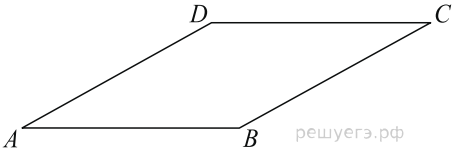
Площадь ромба равна произведению квадрата его стороны на синус его угла. С другой стороны, площадь ромба равна произведению его основания на высоту, опущенную на это основание. Поэтому если сторона ромба равна a, то

$$a^2 \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot a.$$

Из полученного уравнения $a = 4$, поэтому $S = 2 \cdot 4 = 8$.

Ответ: 8.

12. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 12.



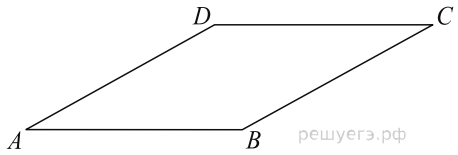
Решение.

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 24.$$

Ответ: 24.

13. Площадь ромба равна 18. Одна из его диагоналей равна 12. Найдите другую диагональ.



Решение.

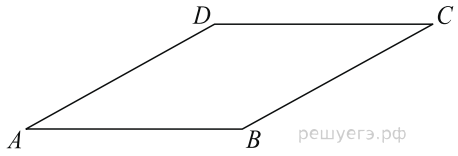
Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей, следовательно,

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 12 = 18,$$

где a — искомая диагональ. Поэтому $a = 3$.

Ответ: 3.

14. Площадь ромба равна 6. Одна из его диагоналей в 3 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.



Решение.

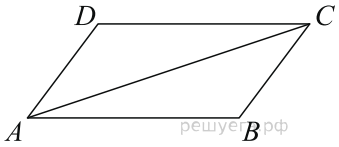
Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Пусть меньшая из диагоналей равна a, тогда большая равна $3a$. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3a = 6.$$

Поэтому $a = 2$.

Ответ: 2.

15. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 26° и 34°. Найдите больший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



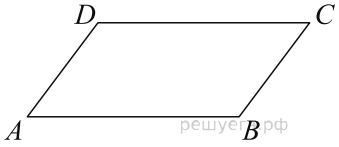
Решение.

сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма равна 180°.

$$\angle D = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - (\angle DAC + \angle CAB) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Ответ: 120.

16. Периметр параллелограмма равен 46. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.



Решение.

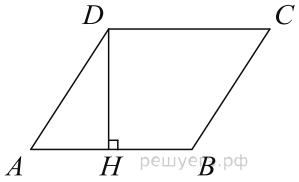
Противоположные стороны параллелограмма попарно равны, значит,

$$P = 2(AD + AB) = 2(AD + AD + 3) = 4AD + 6.$$

Зная, что периметр параллелограмма равен 46, находим $AD = 10$.

Ответ: 10.

17. Найдите высоту ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.



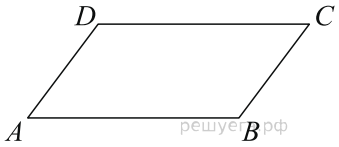
Решение.

По определению синуса

$$DH = AD\sin A = \sqrt{3}\sin 60^\circ = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

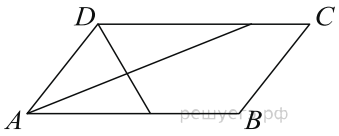
18. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне. Ответ дайте в градусах.



Решение.

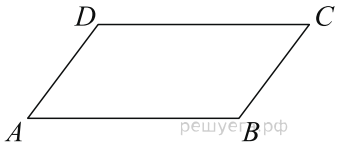
Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°. Тогда искомый угол равен

$$180^\circ - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle D}{2} = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle D}{2} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$



Ответ: 90.

19. Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4, а периметр его равен 70. Найдите большую сторону параллелограмма.



Решение.

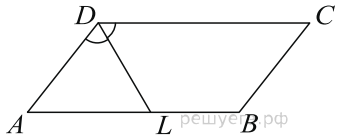
Противоположные стороны параллелограмма попарно равны, значит,

$$P = 2(AD + AB) = 2\left(\frac{3}{4}AB + AB\right) = 3{,}5AB.$$

Зная, что периметр параллелограмма равен 70, находим: $AB = 20$.

Ответ: 20.

20. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 4 : 3, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.



Решение.

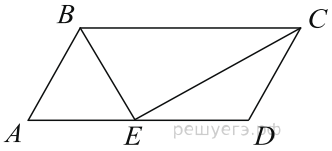
Заметим, что $\angle CDL = \angle ALD$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых секущей. Значит, треугольник ADL – равнобедренный. Пусть $AL = 4x$, тогда $AD = 4x$, $AB = 7x$. Противоположные стороны параллелограмма $ABCD$ попарно равны, тогда

$$P_{ABCD} = 2(AD + AB) = 22x = 88,$$

откуда $x = 4$. Находим $AB = 7x = 28$.

Ответ: 28.

21. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.



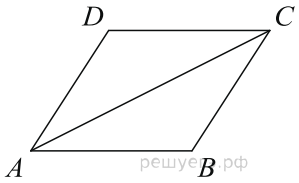
Решение.

$\angle CBE = \angle BEA$ и $\angle BCE = \angle CED$ как углы при параллельных прямых, значит, треугольники ABE и ECD – равнобедренные.

$$AD = AE + ED = AB + CD = 2AB = 10.$$

Ответ: 10.

22. Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.



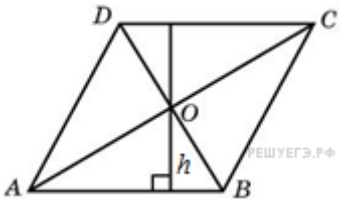
Решение.

Тупой угол ромба равен 180° − 60° = 120°. Воспользуемся теоремой косинусов:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos D} = \sqrt{2AD^2(1 - \cos 120^\circ)} = \sqrt{6(1 + 0{,}5)} = 3.$$

Ответ: 3.

23. Диагонали ромба относятся как 3:4. Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.



Решение.

Заметим, что сторона ромба равна 50. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам. Пусть $OB = 3x$, тогда $AO = 4x$. По теореме Пифагора $AO^2 + OB^2 = AB^2$, поэтому $25x^2 = 2500$, откуда $x = 10$. Тогда для высоты треугольника AOB имеем

$$h = \frac{AO \cdot OB}{AB} = \frac{4x \cdot 3x}{5x} = \frac{12x}{5} = \frac{12 \cdot 10}{5} = 24.$$

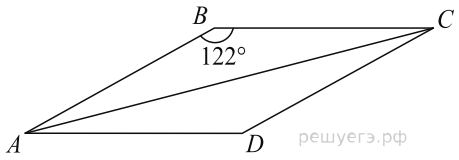
Следовательно, высота ромба равна $2h = 48$.

Ответ: 48.

24. В ромбе $ABCD$ угол ABC равен 122°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Сумма углов B и C равна 180°, поэтому угол C равен 58°. Диагональ ромба AC является биссектрисой угла C, поэтому искомый угол ACD равен 29°.

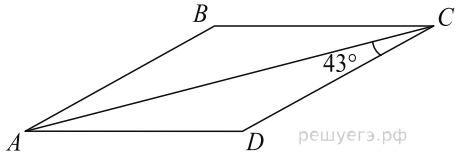


Ответ: 29.

25. В ромбе $ABCD$ угол ACD равен 43°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Диагональ ромба AC является биссектрисой угла C, поэтому он равен 86°. Сумма углов B и C равна 180°, поэтому искомый угол B равен 94°.



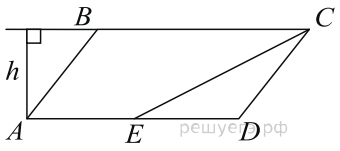
Ответ: 94.

26. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 189. Точка E — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $AECB$.

Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту:

$$S_{\text{п}} = AD \cdot h.$$



Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту. Выразим площадь трапеции через площадь параллелограмма:

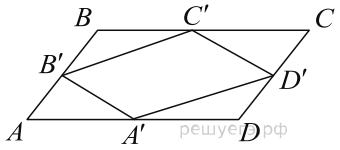
$$S_{ABCE} = \frac{1}{2}(AE+BC)\cdot h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AD+AD\right)h = \frac{3}{4}AD\cdot h = \frac{3}{4}S_{ABCD} = \frac{3}{4}\cdot 189 = 141{,}75.$$

Ответ: 141,75.

27. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 153. Найдите площадь параллелограмма $A'B'C'D'$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Решение.

Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного четырехугольника, является параллелограммом, площадь которого равна половине площади исходного четырехугольника (см. ~~параллелограмм Вариньона~~).



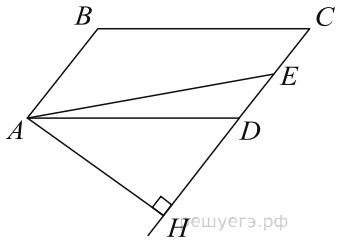
Поэтому его площадь равна 76,5.

Ответ: 76,5.

28. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 176. Точка E — середина стороны CD. Найдите площадь треугольника ADE.

Решение.

Пусть AH — перпендикуляр, опущенный из точки A на продолжение стороны CD. Выразим площадь треугольника ADE через площадь параллелограмма $ABCD$:



$$S_{ADE} = \frac{1}{2}AH\cdot DE = \frac{1}{2}AH\cdot\frac{1}{2}DC =$$
$$= \frac{1}{4}AH\cdot DC = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4}\cdot 176 = 44.$$

Ответ: 44.