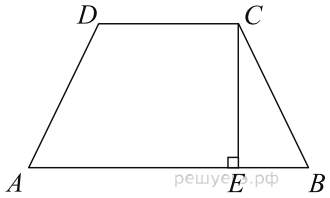
Трапеция

1. Основания равнобедренной трапеции равны 51 и 65. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.



Решение.

Пусть CE — высота

$$EB = \frac{AB - DC}{2} = 7.$$

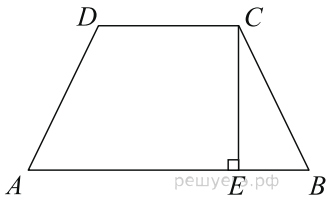
По теореме Пифагора находим: $CE = \sqrt{CB^2 - EB^2} = 24.$

Тогда

$$\sin B = \frac{CE}{CB} = \frac{24}{25} = 0,96.$$

Ответ: 0,96.

2. Основания равнобедренной трапеции равны 43 и 73. Косинус острого угла трапеции равен $\frac{5}{7}$. Найдите боковую сторону.

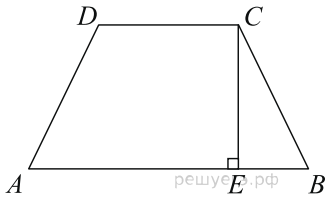


Решение.

$$EB = \frac{AB - DC}{2} = 15,\ CB = \frac{EB}{\cos B} = \frac{15}{\frac{5}{7}} = 21.$$

Ответ: 21.

3. Большее основание равнобедренной трапеции равно 34. Боковая сторона равна 14. Синус острого угла равен $\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите меньшее основание.



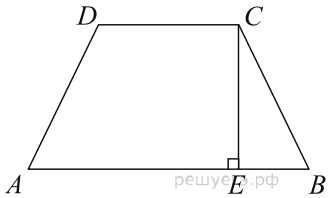
Решение.

Заметим, что

$$CD = AB - 2EB = AB - 2CB\cos A = AB - 2CB\sqrt{1 - \sin^2 A} = 34 - 2\cdot 14\sqrt{1 - \frac{40}{49}} = 34 - 12 = 22.$$

Ответ: 22.

4. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 51. Тангенс острого угла равен $\frac{5}{11}$. Найдите высоту трапеции.

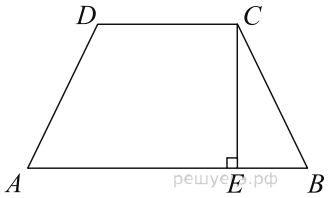


Решение.

$$CE = EB\operatorname{tg}B = \frac{AB-DC}{2}\cdot\operatorname{tg}B = \frac{44}{2}\cdot\frac{5}{11} = 10.$$

Ответ: 10.

5. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 23. Высота трапеции равна 39. Тангенс острого угла равен $\frac{13}{8}$. Найдите большее основание.

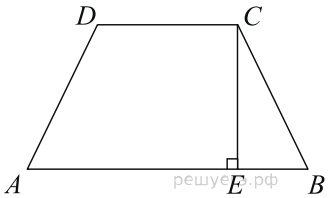


Решение.

$$AB = DC + 2EB = DC + 2\frac{CE}{\operatorname{tg}B} = 23 + 2\cdot\frac{39}{\frac{13}{8}} = 71.$$

Ответ: 71.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 17 и 87. Высота трапеции равна 14. Найдите тангенс острого угла.

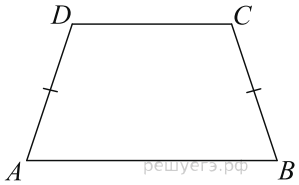


Решение.

$$\operatorname{tg}B = \frac{CE}{EB} = \frac{14}{\frac{AB-DC}{2}} = \frac{14}{35} = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

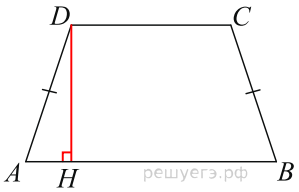
7. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.



Решение.

Трапеция равнобедренная, значит,

$$AH = \frac{AB-DC}{2} = 6 \text{ и } AD = \frac{P_{ABCD}-(AB+DC)}{2} = 10.$$

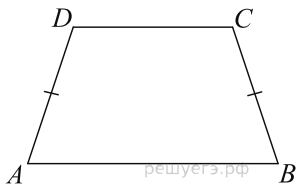


Тогда, по теореме Пифагора $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 8.$

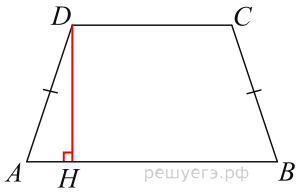
$$S = \frac{AB+CD}{2}\cdot DH = 20\cdot 8 = 160.$$

Ответ: 160.

8. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите периметр трапеции.



Решение.
Из формулы для площади



$$S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot DH$$

найдем высоту:

$$DH = \frac{2S_{ABCD}}{AB+CD} = \frac{80}{20} = 4.$$

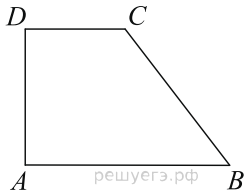
По теореме Пифагора

$$AD = \sqrt{DH^2 + AH^2} = \sqrt{DH^2 + \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2} = \sqrt{16+9} = 5,$$

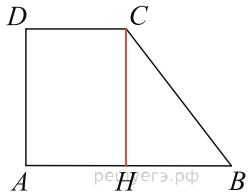
Откуда $P_{ABCD} = 2AD + AB + CD = 30.$

Ответ: 30.

9.
Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 6 и 2, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45°.



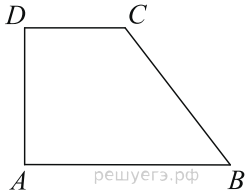
Решение.
Проведем высоту CH. Треугольник CHB — прямоугольный с $\angle B = 45^\circ$, значит, он также равнобедренный: $CH = HB = 4$.



$$S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot CH = 4 \cdot 4 = 16.$$

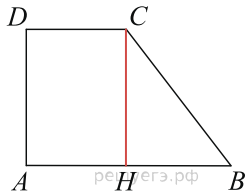
Ответ: 16.

10. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Ее площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



Решение.

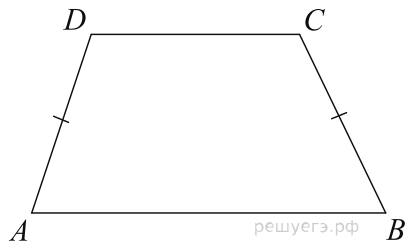
$$S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{2S_{ABCD}}{AB+CD} = \frac{2 \cdot 64}{16} = 8.$$



Рассмотрим прямоугольный треугольник CHB. $BH = AB - CD = 8$. $CH = HB$, значит, треугольник CHB — равнобедренный, тогда его острые углы равны 45°.

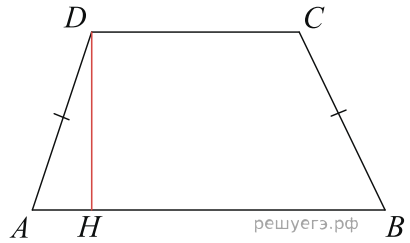
Ответ: 45.

11. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.



Решение.

$$AH = \frac{AB - CD}{2} = \frac{26 - 14}{2} = 6,$$

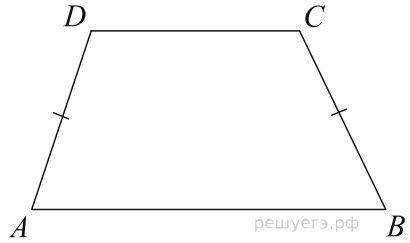


Откуда,

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot DH}{2} = \frac{(AB + CD) \cdot \sqrt{AD^2 - AH^2}}{2} = \frac{40 \cdot 8}{2} = 160.$$

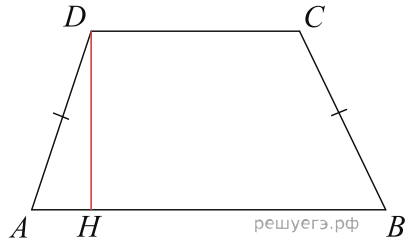
Ответ: 160.

12. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите боковую сторону трапеции.



Решение.
Найдем высоту трапеции DH из формулы для площади

$$\frac{7 + 13}{2} DH = 40 \Leftrightarrow DH = 4.$$

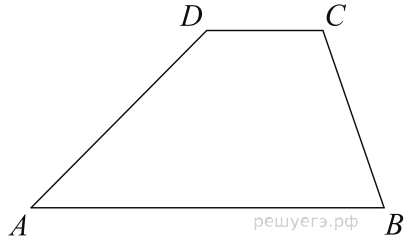


Применим торему Пифагора:

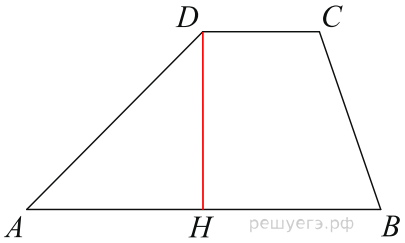
$$AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{\left(\frac{AB - CD}{2}\right)^2 + DH^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Ответ: 5.

13. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.



Решение.
Введём обозначения как показано на рисунке.



Заметим, что острый угол трапеции равен 30° и найдем высоту DH из прямоугольного треугольника AHD:

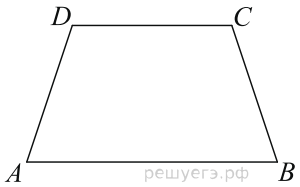
$$DH = AD\sin ADH = 7\cdot\frac{1}{2} = 3,5$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

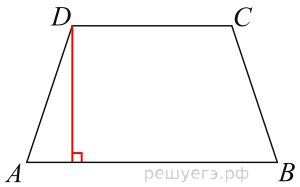
$$S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}DH = \frac{18+6}{2}\cdot 3,5 = 42.$$

Ответ: 42.

14. Основания трапеции равны 27 и 9, боковая сторона равна 8. Площадь трапеции равна 72. Найдите острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне. Ответ выразите в градусах.



Решение.
Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Пусть высота равна h, тогда

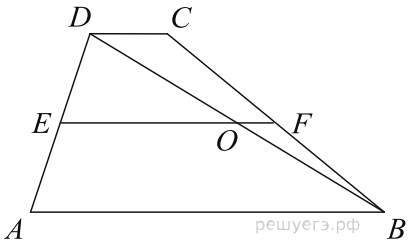


$$S = \frac{27+9}{2}\cdot h = 72,$$

откуда h = 4. Рассмотрим прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является боковая сторона трапеции, равная 8, а катетом — высота трапеции (см. рис.). Длина катета равна половине гипотенузы, следовательно, он лежит напротив угла 30°.

Ответ: 30.

15. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



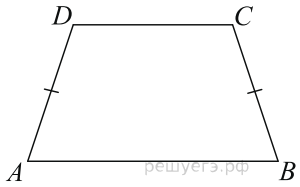
Решение.

Больший отрезок средней линии трапеции является средней линией треугольника ADB, а значит, равен половине его основания.

$$EO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5.$$

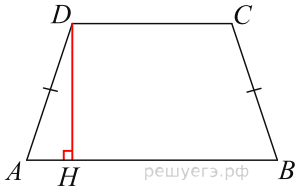
Ответ: 5.

16. В равнобедренной трапеции большее основание равно 25, боковая сторона равна 10, угол между ними 60°. Найдите меньшее основание.



Решение.

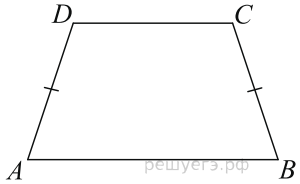
Проведем высоту DH.



$$DC = AB - 2AH = AB - 2AD\cos A = 25 - 20 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

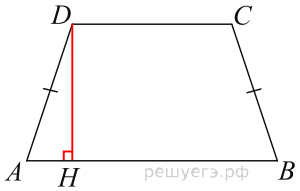
Ответ: 15.

17. В равнобедренной трапеции основания равны 12 и 27, острый угол равен 60°. Найдите ее периметр.



Решение.

Проведем высоту DH.

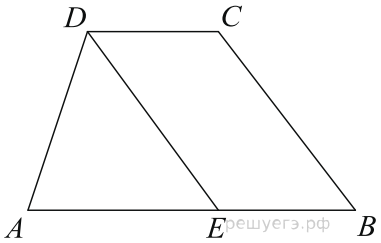


$$P_{ABCD} = AB + DC + 2AD = AB + DC + 2\frac{AH}{\cos A} =$$

$$= AB + DC + \frac{AB - DC}{\cos A} = 39 + \frac{15}{\cos 60^\circ} = 69.$$

Ответ: 69.

18. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.



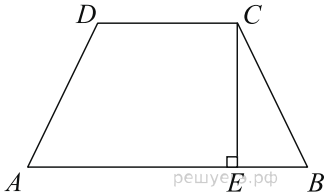
Решение.

Заметим, что $EDCB$ — параллелограмм. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны. Поэтому

$$P_{ABCD} = AD + CD + CB + AB = AD + DE + AE + 2CD =$$
$$= P_{ADE} + 2CD = 15 + 8 = 23.$$

Ответ: 23.

19. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 и 4. Найдите среднюю линию этой трапеции.



Решение.

Средняя линия трапеции равна:

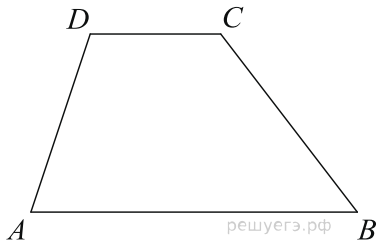
$$\frac{AB+DC}{2}=\frac{(AE+EB)+(AE-EB)}{2}=AE=10.$$

Ответ: 10.

Примечание.

Высота, опущенная из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит большее основание трапеции на два отрезка, больший из которых равен полусумме оснований (средней линии), а меньший — полуразности оснований.

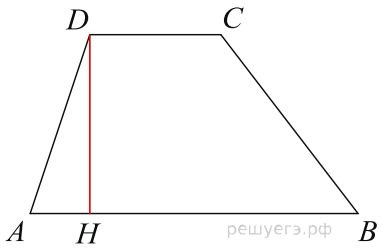
20. Основания равнобедренной трапеции равны 15 и 9, один из углов равен 45°. Найдите высоту трапеции.



Решение.

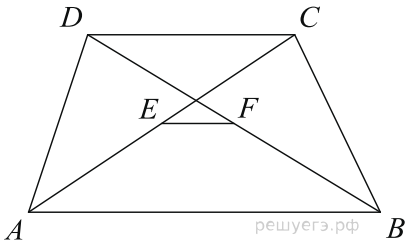
Проведем высоту DH.

$$DH=AH\cdot \mathrm{tg}A=\frac{AB-DC}{2}\cdot \mathrm{tg}A=\frac{15-9}{2}\cdot \mathrm{tg}45^\circ=3.$$



Ответ: 3.

21. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

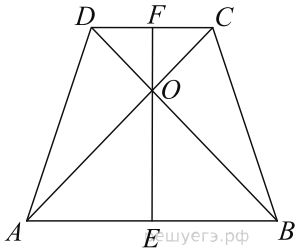


Решение.

Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции равен полуразности большего и меньшего оснований. Поэтому он равен (3 − 2):2 = 0,5.

Ответ: 0,5.

22. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию.



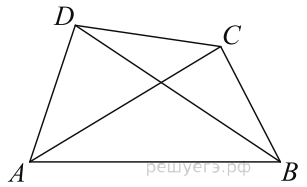
Решение.

треугольники CFO и BEO – равнобедренные, так как $\angle OCF = \angle COF = 45^\circ$ и $\angle OBE = \angle BOE = 45^\circ$, следовательно, средняя линия равна

$$KM = \frac{DC + AB}{2} = FC + EB = FO + OE = FE = 12.$$

Ответ: 12.

23. Диагонали четырехугольника равны 4 и 5. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.



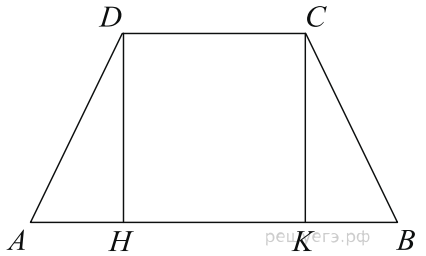
Решение.

Стороны искомого четырехугольника равны средним линиям треугольников, образуемых диагоналями и сторонами данного четырехугольника. Таким образом, стороны искомого четырехугольника равны половинам диагоналей. Соответственно,

$$P = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CA = AC + BD = 9.$$

Ответ: 9.

24. Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12. Синус острого угла трапеции равен 0,8. Найдите боковую сторону.



Решение.

треугольники ADH и BCK равны ($AD = CB$; $DH = CK$), значит, $AH = KB$.

$$AD = \frac{AH}{\cos A} = \frac{AB - CD}{2\cos A} = \frac{6}{2\sqrt{1 - \sin^2 A}} = \frac{3}{\sqrt{1 - 0,64}} = \frac{3}{0,6} = 5.$$

Ответ: 5.