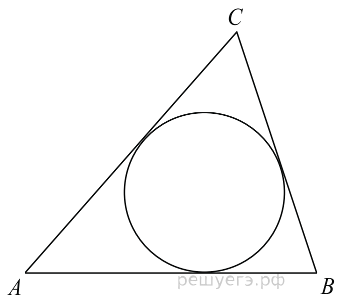
Вписанные окружности

1.
Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.

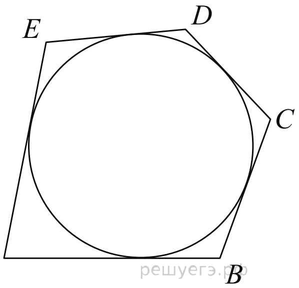


Решение.
Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности:

$$S = pr = 6 \cdot 1 = 6.$$

Ответ: 6.

2. Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, периметр которого равен 20. Найдите его площадь.



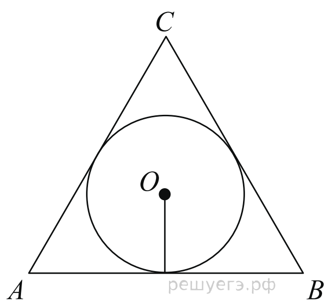
Решение.
Радиус вписанной в многоугольник окружности равен отношению его площади к полупериметру. Пусть площадь равна S, периметр равен P, радиус окружности равен R. Тогда

$$R = \frac{S}{\frac{P}{2}} = \frac{S}{\frac{20}{2}} = \frac{S}{10} = 3.$$

Поэтому $S = 30$.

Ответ: 30.

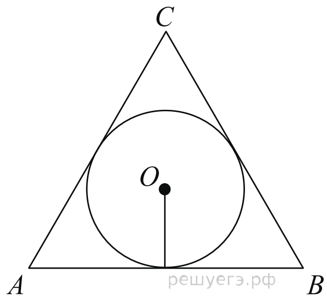
3. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.



Решение.
Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен одной трети высоты. Поэтому он равен 2.

Ответ: 2.

4. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6.
Найдите высоту этого треугольника.



Решение.

$$r=\frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}AC^2\sin 60^\circ}{3AC}=\frac{AC\sin 60^\circ}{3}=\frac{h}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin 60^\circ}{3}=\frac{h}{3},$$

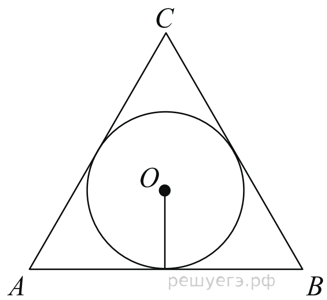
значит, $h=3r=18.$

Ответ: 18.

Приведем другое решение.

Высота правильного треугольника равна 3 радиусам вписанной окружности, поэтому она равна 18.

5. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}.$ Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Решение.

Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру:

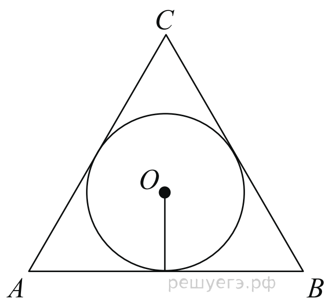
$$r=\frac{S_{ABC}}{p_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AB^2\sin A}{\frac{3AB}{2}}=\frac{\sqrt{3}\sin 60^\circ}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

Примечание

Другой способ решения состоит в использовании формулы, выражающей радиус вписанной в равносторонний треугольник через его сторону: $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

6. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Найдите сторону этого треугольника.

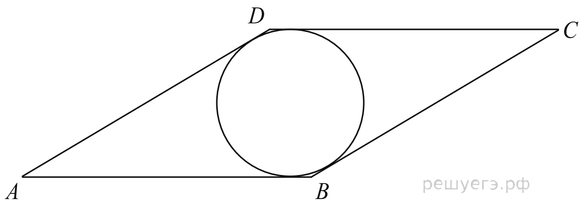


Решение.

Известно, что $r=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$, а по условию $r=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Поэтому длина стороны треугольника $a=1$.

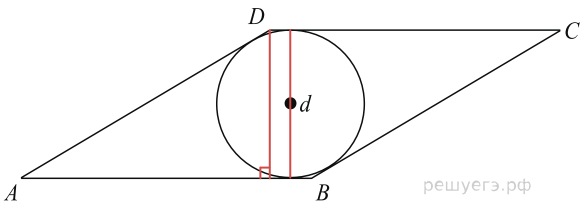
Ответ: 1.

7. Сторона ромба равна 1, острый угол равен 30°. Найдите радиус вписанной окружности этого ромба.



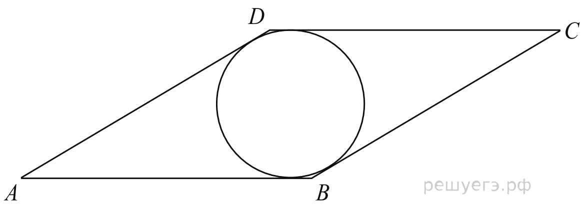
Решение.
Радиус r вписанной в ромб окружности вдвое меньше его высоты d. Поэтому

$$r=\frac{d}{2}=\frac{DH}{2}=\frac{AD\sin A}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0,25.$$



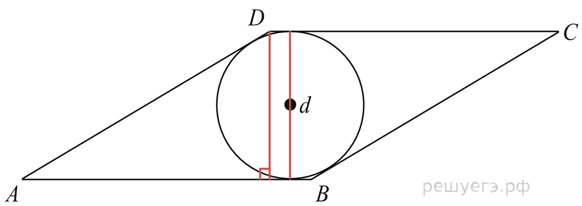
Ответ: 0,25.

8. Острый угол ромба равен 30°. Радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2. Найдите сторону ромба.



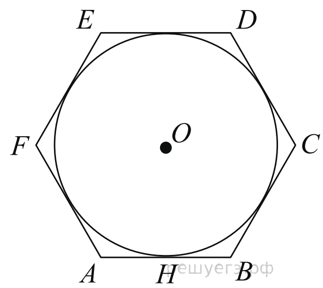
Решение.
Радиус r вписанной в ромб окружности вдвое меньше его высоты d. Поэтому

$$AD=\frac{DH}{\sin A}=\frac{d}{\sin A}=\frac{2r}{\sin A}=\frac{4}{\sin 30^\circ}=8.$$



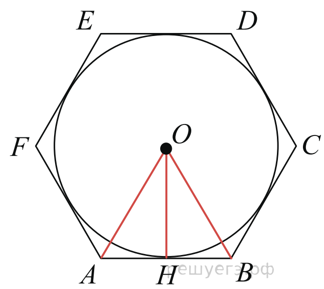
Ответ: 8.

9. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}$.



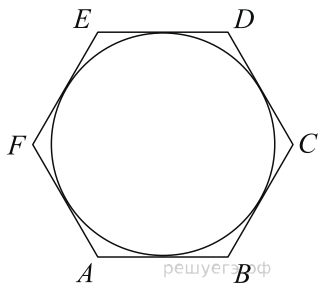
Решение.
Рассмотрим равносторонний треугольник AOB (см. рис.). В этом треугольнике

$$AB=2HB=2OH\operatorname{tg}\widehat{HOB}=2\sqrt{3}\operatorname{tg}30^\circ=2.$$

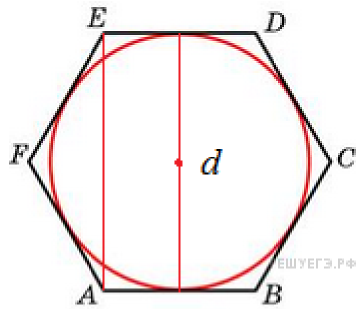


Ответ: 2.

10. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$.



Решение.
Угол между сторонами правильного шестиугольника равен 120°. Рассмотрим треугольник *FEA* и применим теорему косинусов, считая, что длина стороны шестиугольника равна *a*:

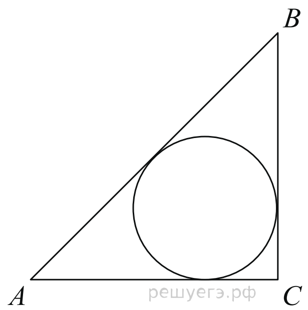


$$AE = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 cos120^\circ} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

Далее имеем: $r = \dfrac{d}{2} = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 1,5.$

Ответ: 1,5.

11. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2+\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Решение.
Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен половине разности суммы катетов и гипотенузы:

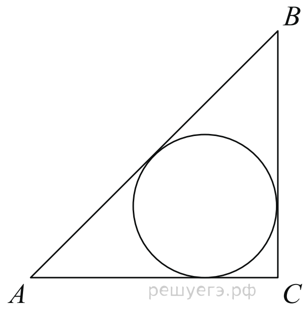
$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2} = \frac{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

Приведём другое решение.
Радиус вписанной в многоугольник окружности равен отношению его удвоенной площади к периметру. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. Тем самым, для катетов $a = b = 2+\sqrt{2}$ и гипотенузы $c = \sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{2}$ имеем:

$$r = \frac{2S}{P} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a^2}{2a+a\sqrt{2}} = \frac{a^2}{a(2+\sqrt{2})} = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 1.$$

12. В треугольнике *ABC* стороны *AC* = 4, *BC* = 3, угол *C* равен 90°. Найдите радиус вписанной окружности.



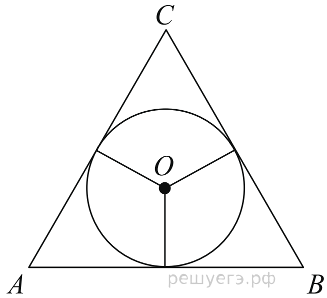
Решение.

Имеем:

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{AC + BC - \sqrt{AC^2 + BC^2}}{2} = \frac{7 - \sqrt{25}}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

13. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.



Решение.

Радиус вписанной окружности равен отношению площади к полупериметру. Для нахождения площади, воспользуемся формулой Герона:

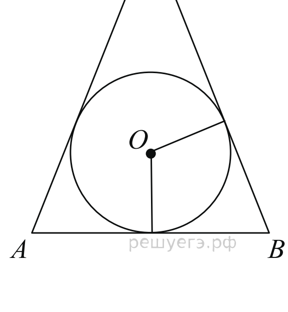
$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{P_{ABC}}{2}\left(\frac{P_{ABC}}{2} - AB\right)\left(\frac{P_{ABC}}{2} - BC\right)\left(\frac{P_{ABC}}{2} - AC\right)} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12.$$

Тогда

$$r = \frac{S}{p} = \frac{12}{8} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

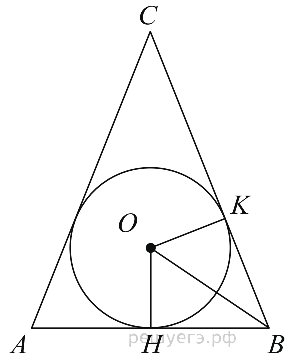
14. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите периметр треугольника.



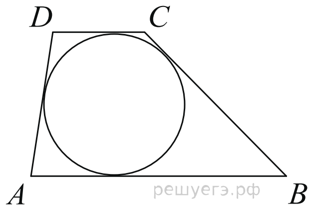
Решение.
Пусть точки H и K являются точками касания окружности и сторон AB и CB соответственно. Треугольники HOB и KOB равны, т. к. являются прямоугольными с общей гипотенузой и равными катетами, значит, $HB = KB = 3$.

$$P_{ABC} = AC + CB + AH + HB = 2CB + 2HB = 16 + 6 = 22.$$

Ответ: 22.

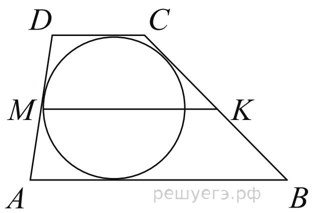


15. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.



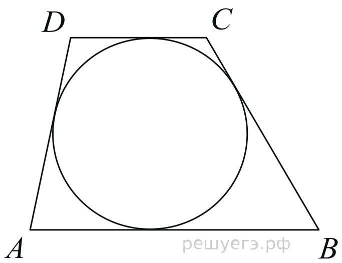
Решение.
в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$,

$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{AD + BC}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$



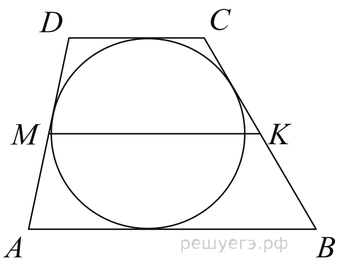
Ответ: 4.

16. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите длину её средней линии.



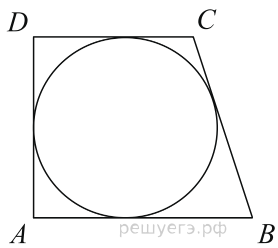
Решение.
В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$,

$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{P_{ABCD}}{4} = 10.$$



Ответ: 10.

17. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.



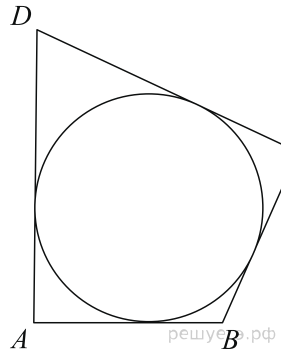
Решение.

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD,$

$$r=\frac{AD}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{2}-BC\right)=\frac{11-7}{2}=2.$$

Ответ: 2.

18. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $CD = 16$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.



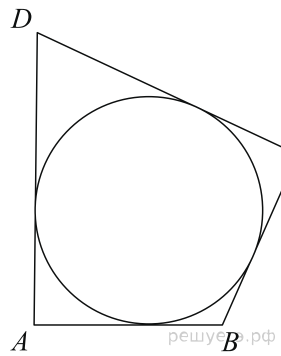
Решение.

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$. Тогда

$$P_{ABCD}=AB+CD+BC+DA=2(AB+CD)=52.$$

Ответ: 52.

19. Периметр четырехугольника, описанного около окружности, равен 24, две его стороны равны 5 и 6. Найдите большую из оставшихся сторон.



Решение.

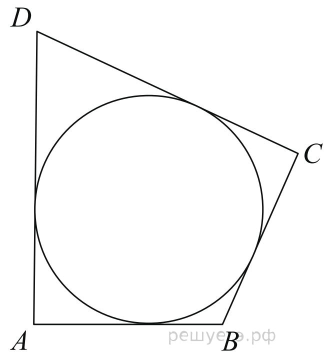
Пусть большая из двух оставшихся сторон имеет длину x, тогда длина четвертой стороны равна $24-5-6-x=13-x$. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны. В этом случае периметр четырехугольника вдвое больше суммы длин противоположных сторон, а значит, стороны длиной x и $13 - x$, как и стороны длиной 5 и 6, не могут быть противоположными и являются смежными.

Итак, напротив большей из первой пары смежных сторон с длинами x и $13 - x$ лежит меньшая из второй пары смежных сторон с длинами 5 и 6. Поскольку суммы длин противоположных сторон равны, имеем:

$$x+5=(13-x)+6 \Leftrightarrow x=7.$$

Ответ: 7.

20. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $BC = 11$ и $CD = 15$. Найдите четвертую сторону четырехугольника.



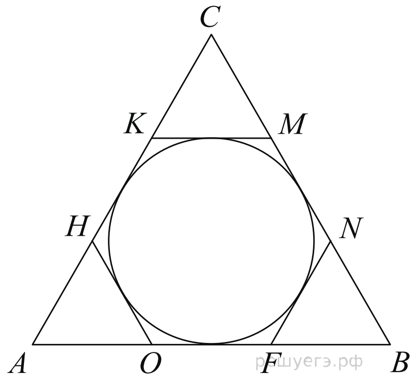
Решение.

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$, значит,

$$AD = (AB + CD) - BC = 14.$$

Ответ: 14.

21. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



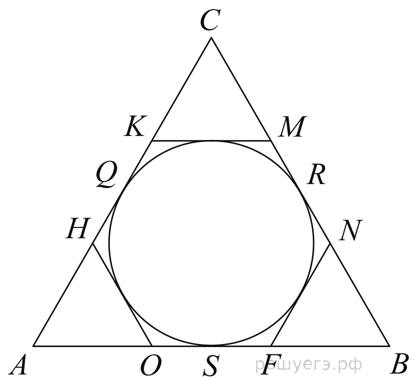
Решение.

Отрезки касательных, проведенных к окружности из точек K, H, O, F, N, M, соответственно равны друг другу. Поэтому

$$CQ + CR = P_{CKM},\ AQ + AS = P_{AHO},\ BS + BR = P_{BFN}.$$

Следовательно,

$$P_{ABC} = P_{AOH} + P_{KCM} + P_{FNB} = 24.$$



Ответ: 24.