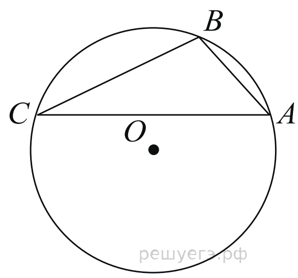
Описанные окружности

1. Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как 1 : 3 : 5. Найдите больший угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.



Решение.

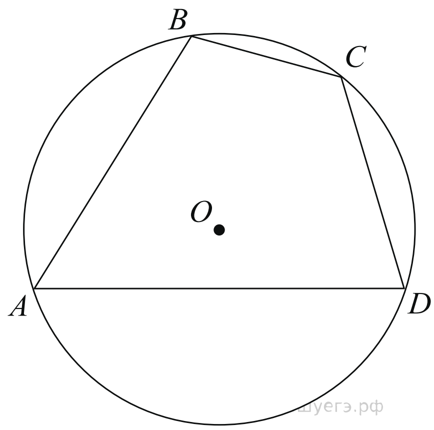
Пусть меньшая часть окружности равна x, тогда

$$x+3x+5x=360^\circ \Leftrightarrow x=40^\circ.$$

Больший угол опирается на большую дугу; вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Следовательно, искомый угол равен половине от $5\cdot 40^\circ$ или 100°.

Ответ: 100.

2. Угол A четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 58°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



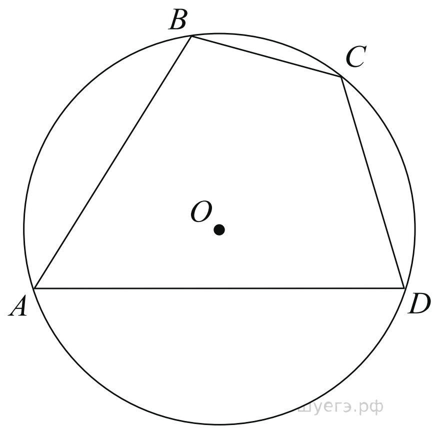
Решение.

Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна 180°, поэтому

$$\angle C=180^\circ-\angle A=180^\circ-58^\circ=122^\circ.$$

Ответ: 122.

3. Стороны четырехугольника $ABCD$ AB, BC, CD и AD стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 95°, 49°, 71°, 145°. Найдите угол B этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

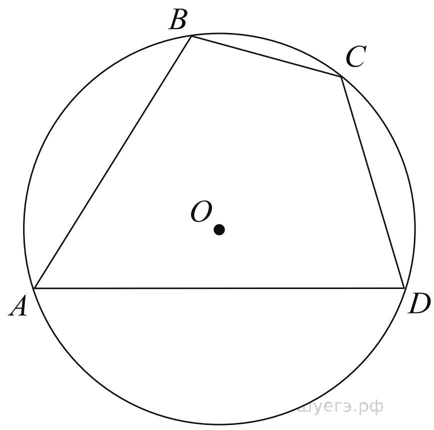


Решение.
вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит

$$\angle B = \frac{1}{2} \cup ADC = \frac{1}{2}(145^\circ + 71^\circ) = 108^\circ.$$

Ответ: 108.

4. Точки A, B, C, D, расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD и AD, градусные величины которых относятся соответственно как 4 : 2 : 3 : 6. Найдите угол A четырехугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.



Решение.
Пусть дуга AB равна $4x$, тогда

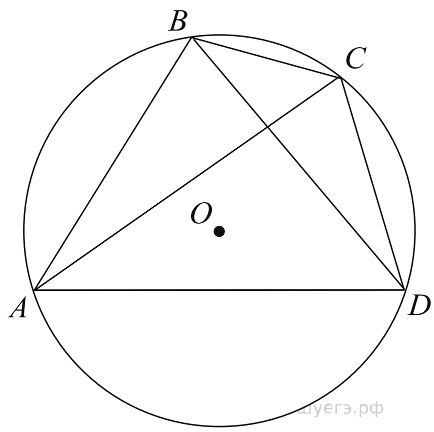
$$4x + 2x + 3x + 6x = 360^\circ \Leftrightarrow x = 24^\circ.$$

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, следовательно,

$$\angle A = \frac{1}{2}(\cup BC + \cup CD) = \frac{1}{2}(2x + 3x) = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Ответ: 60.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 105°, угол CAD равен 35°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

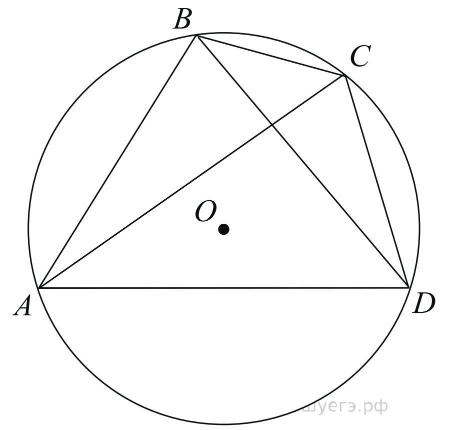


Решение.
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит,

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD = \frac{1}{2}(\cup ADC - \cup CD) = \frac{1}{2}(2\angle ABC - 2\angle CAD) = 70^\circ.$$

Ответ: 70.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 75°, угол CAD равен 35°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

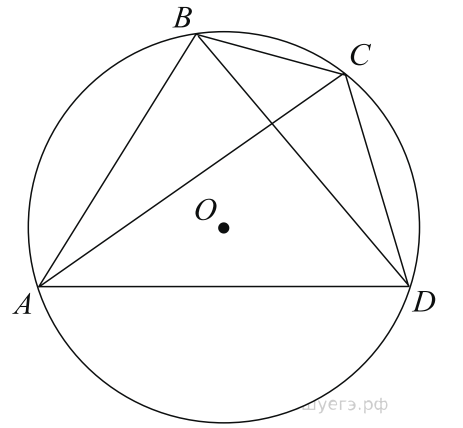


Решение.
вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит,

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup ADC = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup CD) = \angle ABD + \angle CAD = 110^\circ.$$

Ответ: 110.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 110°, угол ABD равен 70°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



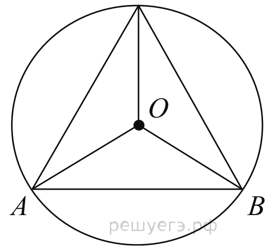
Решение.

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, следовательно,

$$\angle CAD = \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2}(\cup ADC - \cup AD) = \angle ABC - \angle ABD = 40^\circ.$$

Ответ: 40.

8. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



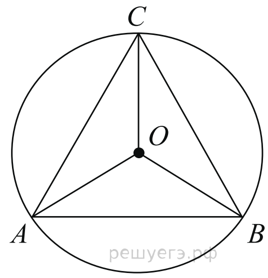
Решение.

Треугольник ABC правильный, значит, все его углы равны 60°. Тогда

$$R = \frac{AC}{2\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

9. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен $\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



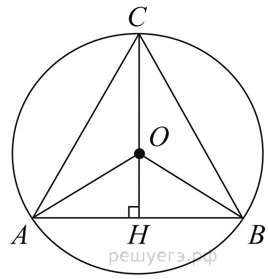
Решение.

Треугольник ABC правильный, значит, все его углы равны 60°. Тогда

$$CB = 2R\sin A = 2\sqrt{3}\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

10. Высота правильного треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Решение.

Треугольник ABC правильный, значит, все углы равны по 60°. По теореме синусов имеем:

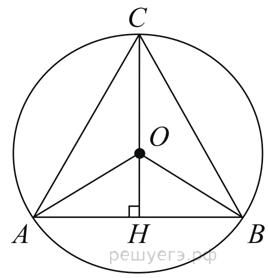
$$R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{CH}{2\sin A\cdot\sin B} = \frac{3}{2\sin^2 60^\circ} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 2.$$

Ответ: 2.

Приведём другое решение.

В правильном треугольнике радиус описанной окружности равен двум третим высоты. Поэтому он равен 2.

11. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 3. Найдите высоту этого треугольника.



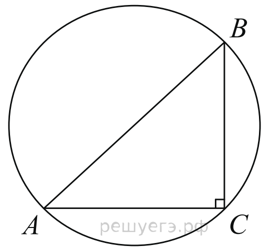
Решение.

треугольник ABC правильный, значит, все углы равны по 60°.

$$CH = AC\sin A = 2R\sin B\sin A = 2\cdot 3\sin^2 60^\circ = 6\cdot\frac{3}{4} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

12. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

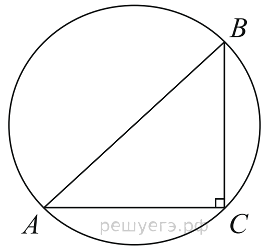


Решение.
вписанный угол опирающийся на диаметр окружности, является прямым, значит, AB – диаметр.

$$R = \frac{D}{2} = 6.$$

Ответ: 6.

13. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 4. Найдите гипотенузу этого треугольника.

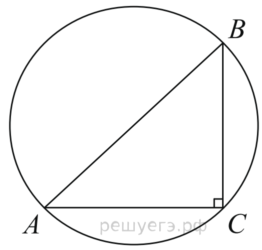


Решение.
Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым, значит, AB — диаметр.

$$AB = D = 2R = 8.$$

Ответ: 8.

14. В треугольнике ABC $AC = 4$, $BC = 3$, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

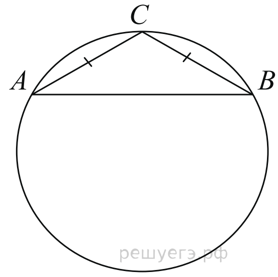


Решение.
Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы. Поэтому

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{AC^2 + BC^2}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

15. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.



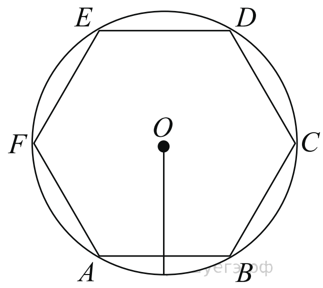
Решение.

Сумма двух равных углов при основании треугольника равна 60°, поэтому каждый из них равен 30°. Тогда по теореме синусов

$$d=\frac{BC}{\sin A}=\frac{1}{\sin 30^\circ}=2.$$

Ответ: 2.

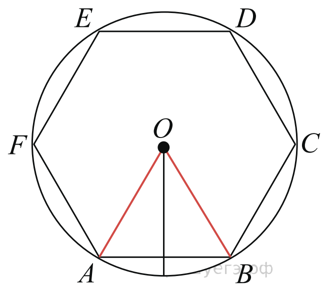
16. Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 6?



Решение.

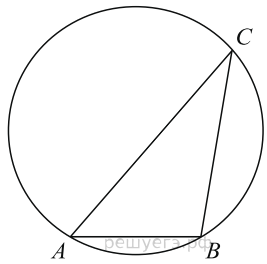
Заметим, что $\angle AOB=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$, $AB=AO=R=6$. Значит, треугольник AOB — равносторонний. Тогда

$$AB=AO=R=6.$$



Ответ: 6.

17. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



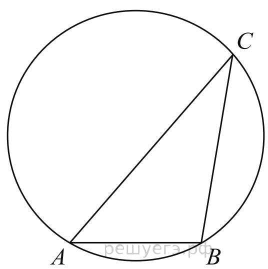
Решение.

По теореме синусов имеем:

$$R=\frac{AB}{2\sin\angle C}=\frac{R}{2\sin 30^\circ}=1.$$

Ответ: 1.

18. Одна сторона треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол треугольника, противолежащий этой стороне. Ответ дайте в градусах



Решение.

По теореме синусов

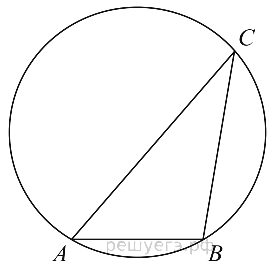
$$R = \frac{AB}{2\sin\angle C} = \frac{R}{2\sin\angle C},$$

тогда

$$\sin C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 30^\circ.$$

Ответ: 30.

19. Угол C треугольника ABC, вписанного в окружность радиуса 3, равен 30°. Найдите сторону AB этого треугольника.



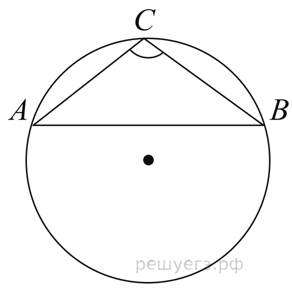
Решение.

По теореме синусов:

$$AB = 2R\sin C = 2\cdot 3\cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

20. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 150°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



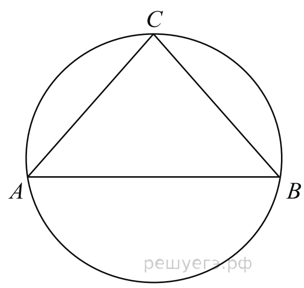
Решение.

Используем теорему синусов:

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle C} = \frac{1}{2\sin 150^\circ} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1.$$

Ответ: 1.

21. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Решение.

Для нахождения площади треугольника ABC, воспользуемся формулой Герона:

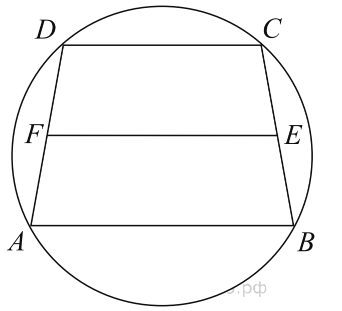
$$S=\sqrt{p(p-AC)(p-AB)(p-BC)}=768.$$

Далее по формуле $R=\dfrac{abc}{4S}$:

$$R=\frac{40\cdot 40\cdot 48}{4\cdot\sqrt{64\cdot 24\cdot 24\cdot 16}}=\frac{10\cdot 40\cdot 48}{24\cdot 8\cdot 4}=25.$$

Ответ: 25.

22. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.



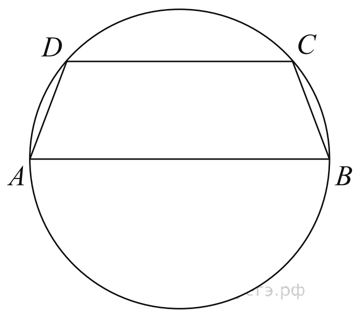
Решение.

Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, т. к. вокруг неё описана окружность.

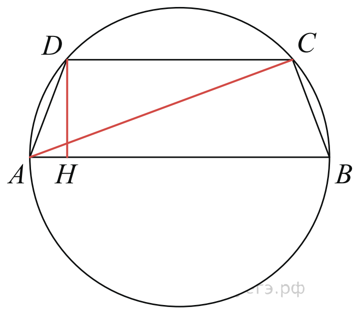
$$AD=\frac{P_{ABCD}-(AB+CD)}{2}=\frac{P_{ABCD}}{2}-\frac{AB+CD}{2}=\frac{P_{ABCD}}{2}-FE=11-5=6.$$

Ответ: 6.

23. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.



Решение.



Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника ADC. Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120°, углы при основании равны 30°. Найдем его боковую сторону:

$$AD = AB - 2AH = AB - 2AD\cos 60^\circ = 12 - AD,$$

откуда $AD = 6$. Тогда по теореме синусов:

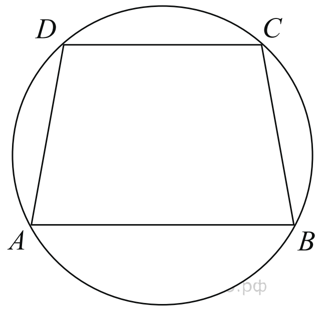
$$R = \frac{AD}{2\sin\angle DCA} = \frac{6}{2\sin 30^\circ} = 6.$$

Ответ: 6.

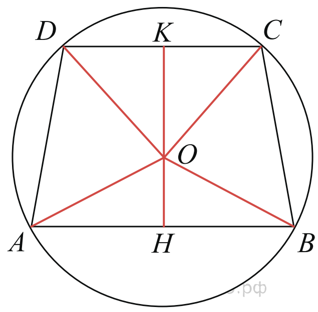
Приведем другое решение (Р. А., СПб.).

Хорды AD, DC и CB равны, поэтому равны и стягиваемые ими дуги. Вписанный угол A равен 60°, он опирается на две из этих дуг и равен половине их суммы. Поэтому каждая из дуг равна 60°, их сумма равна 180°, а хорда AB является диаметром. Отсюда получаем, что искомый радиус равен 6.

24. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите высоту трапеции.



Решение.



Высота трапеции $KH = KO + OH$, где KO и OH — высоты равнобедренных треугольников DOC и AOB. По теореме Пифагора:

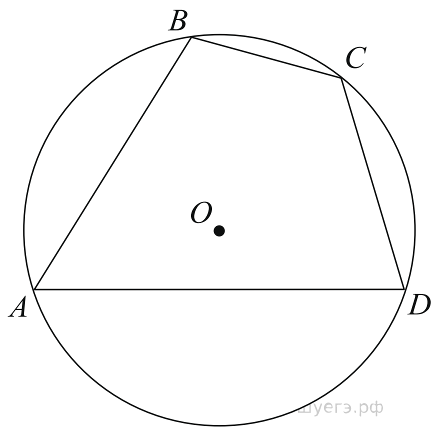
$$KO = \sqrt{OC^2 - KC^2} = \sqrt{R^2 - \frac{DC^2}{4}} = \sqrt{25 - 9} = 4,$$

$$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Тогда $KH = KO + OH = 7$.

Ответ: 7.

25. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 82° и 58°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

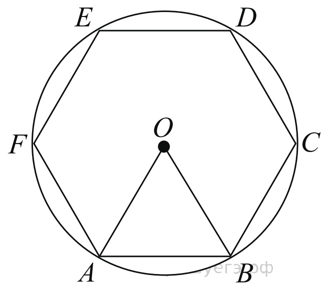


Решение.

Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°. Больший из оставшихся углов лежит напротив меньшего из указанных в условии. Поэтому он равен $180° - 58° = 122°$.

Ответ: 122.

26. Периметр правильного шестиугольника равен 72. Найдите диаметр описанной окружности.



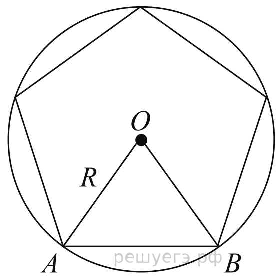
Решение.

Найдем сторону шестиугольника: $72 : 6 = 12$.

Рассмотрим треугольник AOB. Радиус описанной вокруг шестиугольника окружности равен его стороне, а диаметр вдвое больше. Поэтому он равен 24.

Ответ: 24.

27. Угол между стороной правильного n-угольника, вписанного в окружность, и радиусом этой окружности, проведенным в одну из вершин стороны, равен 54°. Найдите n.



Решение.

Рассмотрим треугольник равнобедренный AOB. Углы при его основании равны 54°, значит, угол при вершине 72°. Тогда $n = 360° : 72° = 5$.

Ответ: 5.