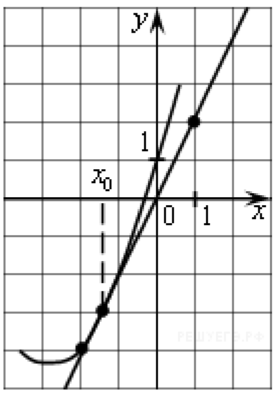
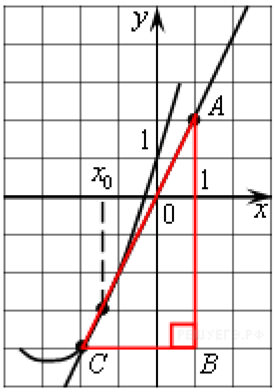
Геометрический смысл производной, касательная

1. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение.
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (1; 2), B (1; −4), C(−2; −4). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB:

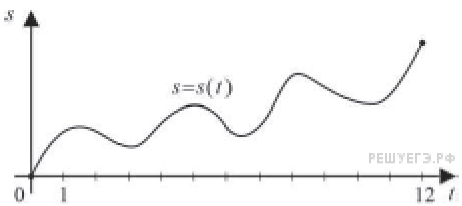


$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2.

2. Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s.

Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



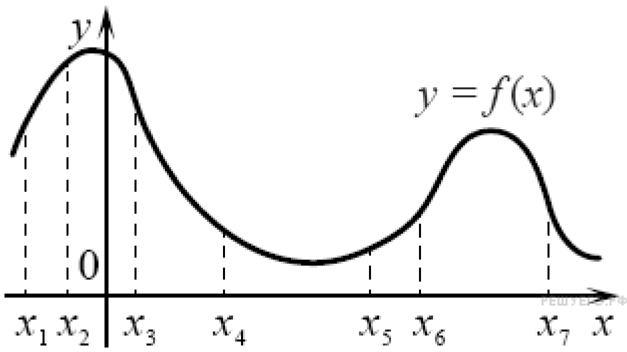
Решение.

Мгновенная скорость равна производной перемещения по времени. Значение производной равно нулю в точках экстремума функции $s(t)$. Точек экстремума на графике 6.

Ответ: 6.

3.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

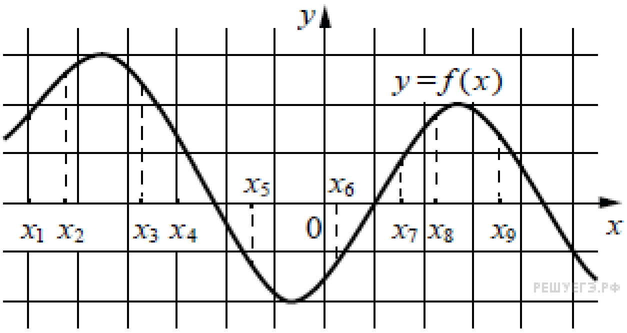


Решение.

Производная функции отрицательна в тех точках, которые принадлежат участкам убывания функции. Это точки x_3, x_4, x_7 — всего 3 точки.

Ответ: 3.

4. На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, ..., x_9$. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $y = f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество найденных точек.

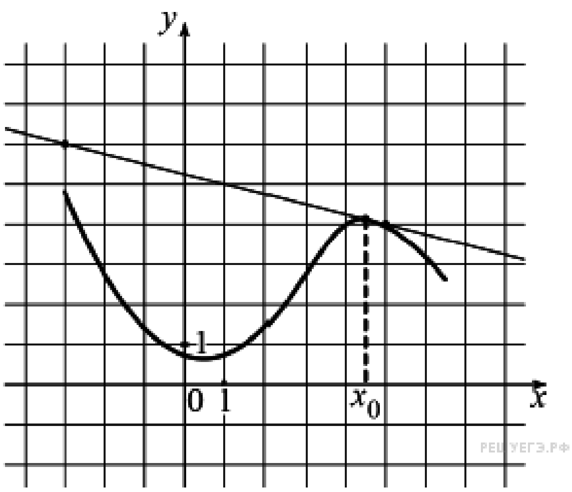


Решение.

Отрицательным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция $f(x)$ убывает. В этих интервалах лежат точки x_3, x_4, x_5, x_9. Таких точек 4.

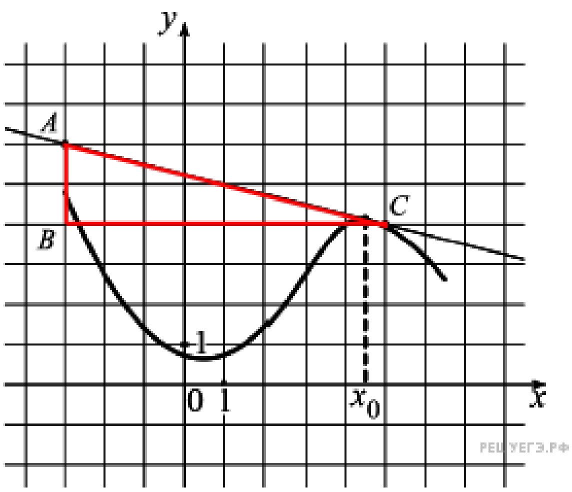
Ответ: 4.

5. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение.

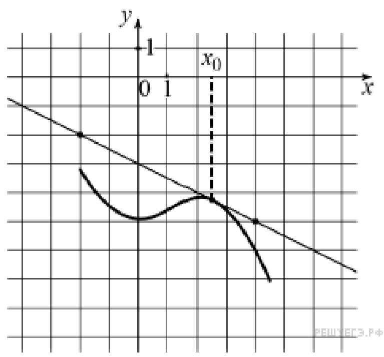
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (−3; 6), B (−3; 4), C (5; 4). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB:



$$y'(x_0) = \mathrm{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\mathrm{tg}\,\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25.$$

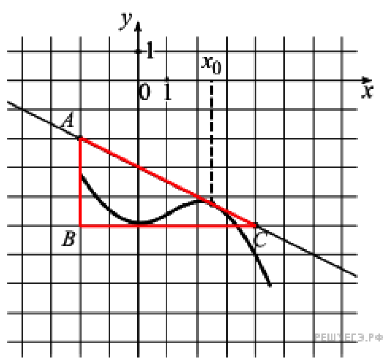
Ответ: −0,25.

6. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение.

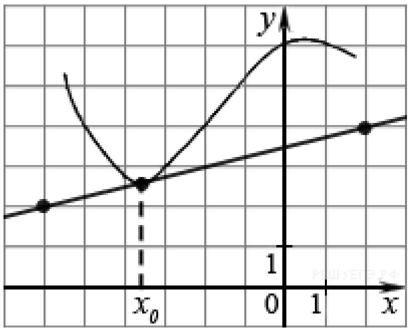
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (−2; −2), B (−2; −5), C (4; −5). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB:



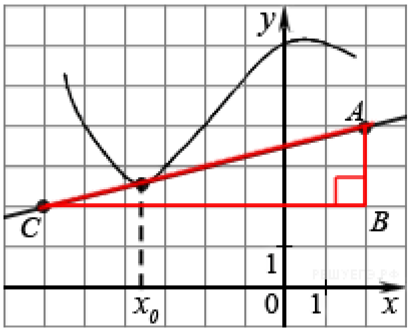
$$y'(x_0) = \mathrm{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\mathrm{tg}\,\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{3}{6} = -0,5.$$

Ответ: −0,5.

7. На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



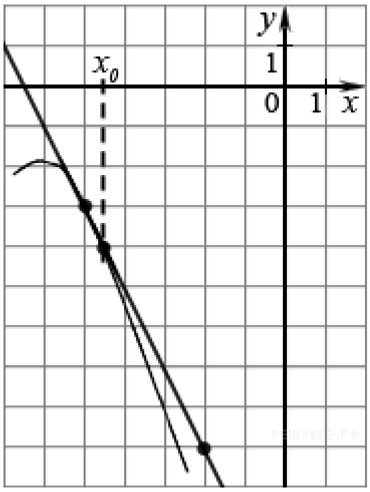
Решение.
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (2; 4), B (2; 2), C (−6; 2). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB. Поэтому



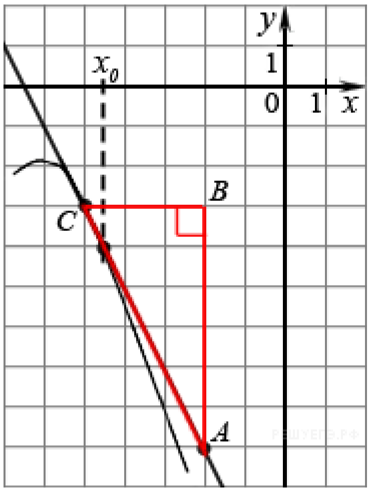
$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

8. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



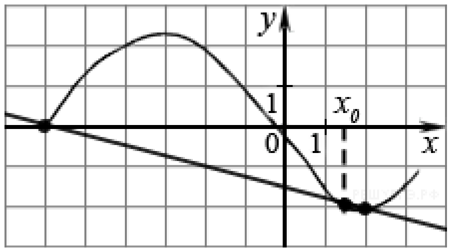
Решение.
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (−2; −9), B (−2; −3), C (−5; −3). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB. Поэтому



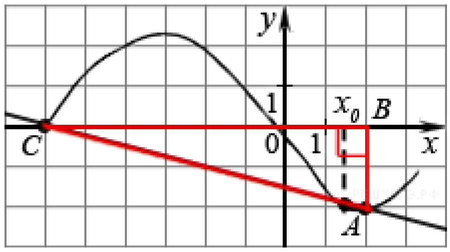
$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Ответ: −2.

9. На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



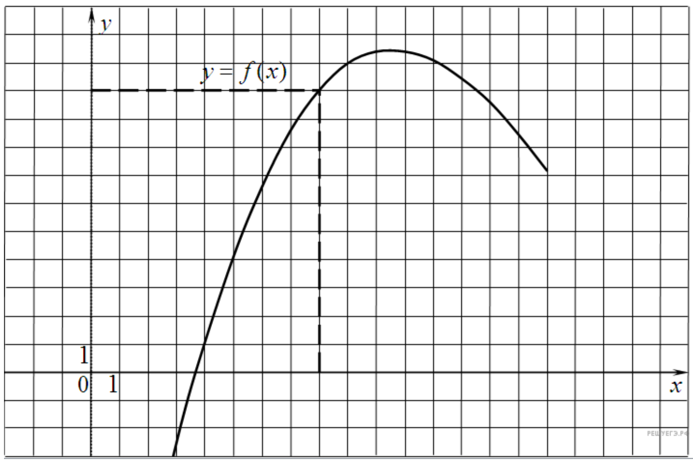
Решение.
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках *A* (2; −2), *B* (2; 0), *C* (−6; 0). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом *ACB*:



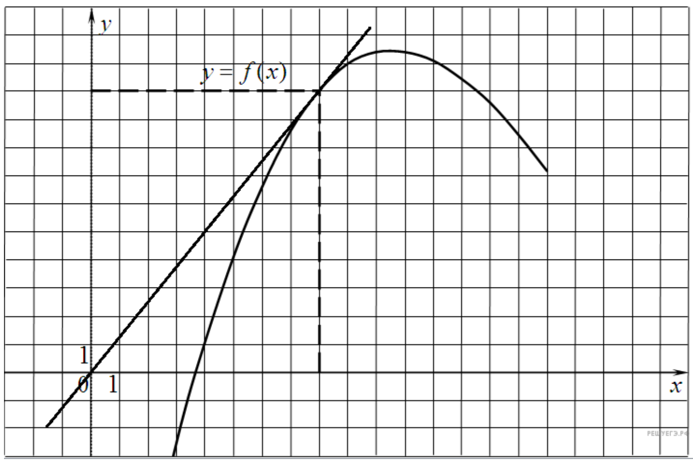
$$y'(x_0) = \mathrm{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\mathrm{tg}\,\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25.$$

Ответ: − 0,25.

10. На рисунке изображен график функции *y=f(x)*. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите *f'*(8).

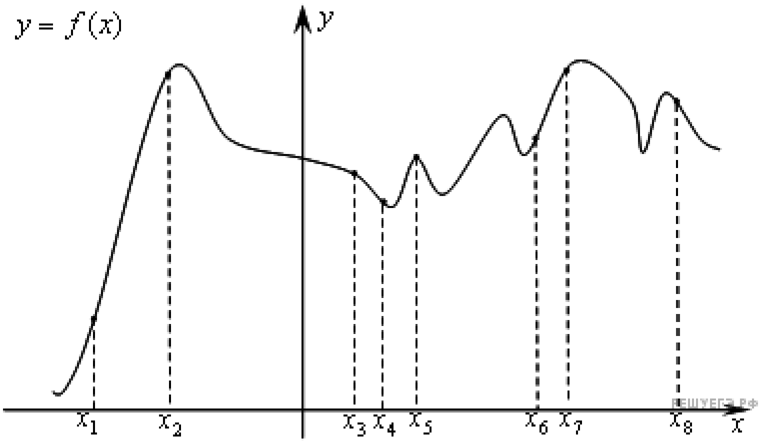


Решение.
Поскольку касательная проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид *y* = *kx*. Эта прямая проходит через точку (8; 10), поэтому 10 = 8 · *k*, откуда *k* = 1,25. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: *f'*(8) = 1,25.



Ответ: 1,25.

11. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

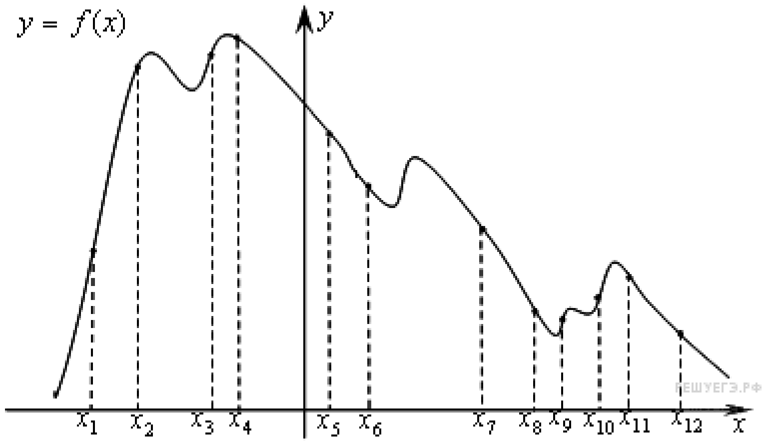


Решение.

Положительным значениям производной соответствует интервалы, на которых функция $f(x)$, возрастает. На них лежат точки x_1, x_2, x_6, x_7. Таких точек 4.

Ответ: 4.

12. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, . . ., x_{12}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

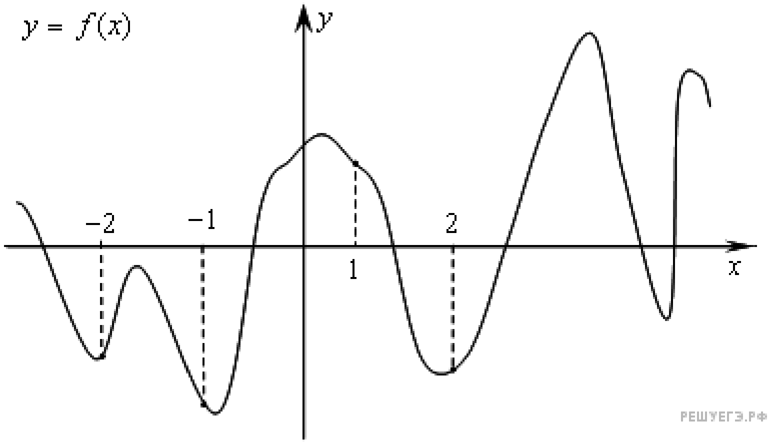


Решение.

Отрицательным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция $f(x)$ убывает. В этих интервалах лежат точки x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}. Таких точек 7.

Ответ: 7.

13. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −2, −1, 1, 2. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

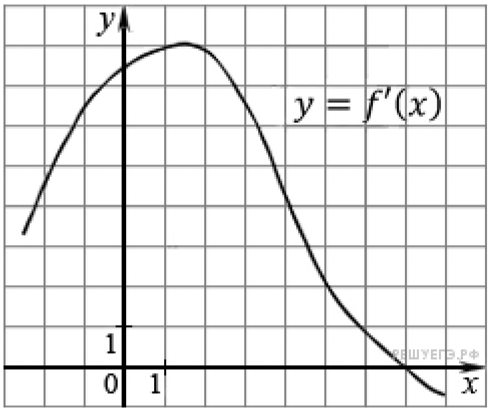


Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная положительна в точках −2 и 2. Угол наклона (и его тангенс) явно больше в точке −2.

Ответ: −2.

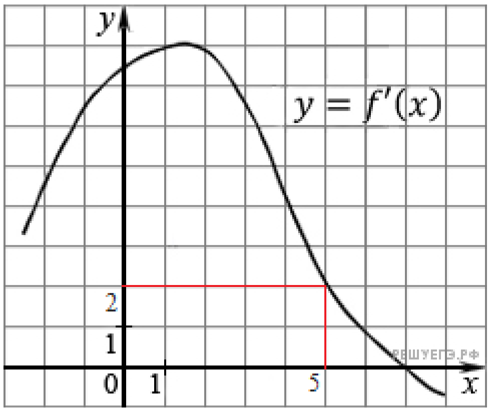
14. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней.



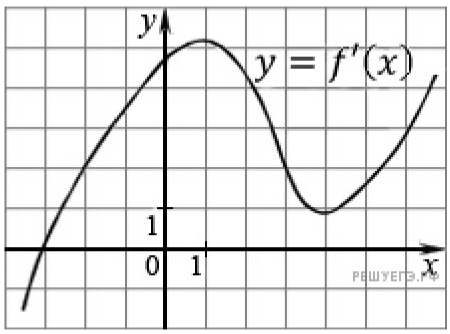
Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 2 и $f'(x_0) = 2$. Осталось найти, при каких x производная принимает значение 2. Искомая точка $x_0 = 5$.

Ответ: 5.



15. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна оси абсцисс или совпадает с ней, она имеет вид $y = b$, и её угловой коэффициент равен 0. Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент, равен нулю, а значит, и производная равна нулю. Производная равна нулю в той точке, в которой её график пересекает ось абсцисс. Поэтому искомая точка $x = -3$.

Ответ: −3.

16. Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 7x - 5$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y' = 7$:

$$(x^2 + 6x - 8)' = 7 \Leftrightarrow 2x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

17. Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 7 = -4, \\ x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x + 11 = 0, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{11}{3}, \\ x = -1, \end{array} \right. \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \ (*). \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания −1.

Ответ: −1.

18. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

Решение.

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2 = 3, \\ ax_0^2 + 2x_0 + 3 = 3x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = 0,5, \\ 0,5x_0 - x_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,125, \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

Искомое значение a равно 0,125.

Ответ: 0,125.

Приведем другое решение.

По смыслу задачи $a \neq 0$, а значит, график заданной функции — парабола. Касательная к параболе (а также и к гиперболе) имеет с ней единственную общую точку. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы уравнение $ax^2 + 2x + 3 = 3x + 1$ имело единственно решение. Для этого дискриминант $1 - 8a$ уравнения $ax^2 - x + 2 = 0$ должен быть равен нулю, откуда $a = \dfrac{1}{8} = 0,125.$

19. Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $3x^2 - 3x + c$. Найдите c.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 6x - 3 = 3, \\ 3x^2 - 3x + c = 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 3x^2 - 6x + c - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ c = 7. \end{cases}$$

Ответ: 7.

20. Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $28x^2 + bx + 15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + l$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + l. \end{cases}$$

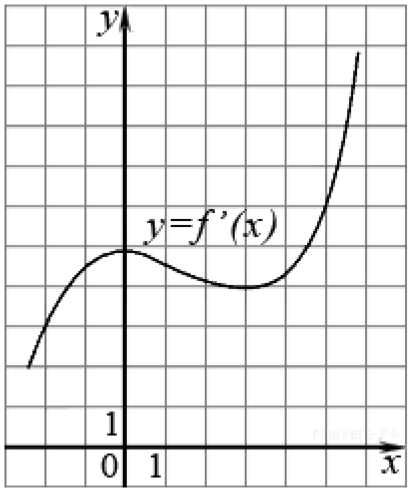
В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 56x + b = -5, \\ 28x^2 + bx + 15 = -5x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ 28x^2 + (-5 - 56x)x + 15 = -5x + 8 \end{cases} \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ x^2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому $x = 0,5$, откуда $b = -33$.

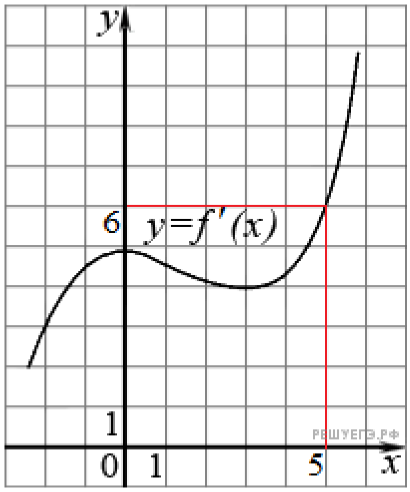
Ответ: −33.

21.



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней.

Решение.



Поскольку касательная параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 6. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Осталось найти, в какой точке x производная принимает значение 6: искомая точка $x = 5$.

Ответ: 5.