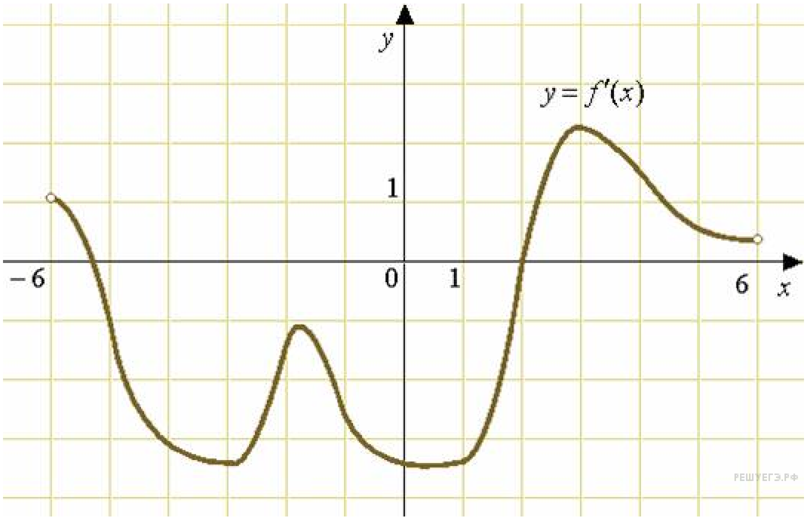
Применение производной к исследованию функций

1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

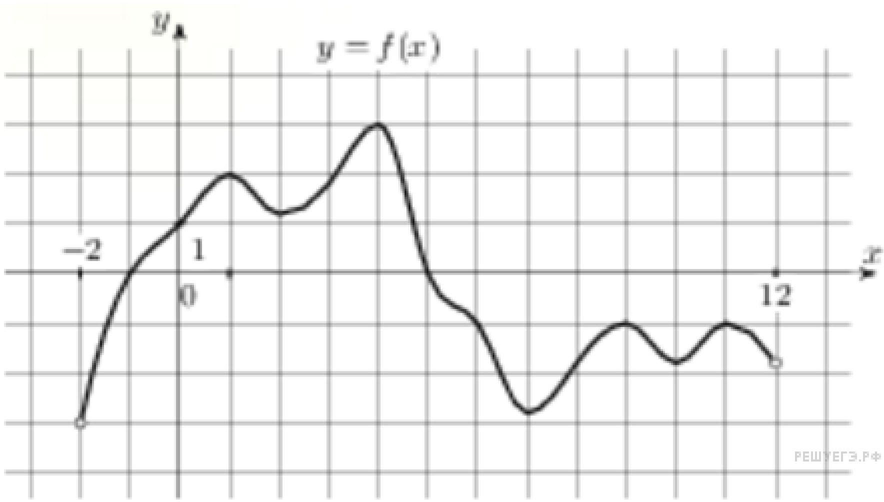


Решение.

Промежутки возрастания данной функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам $(-6; -5{,}2]$ и $[2; 6)$. Данные промежутки содержат целые точки 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 14.

Ответ: 14.

2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $y = f(x)$.

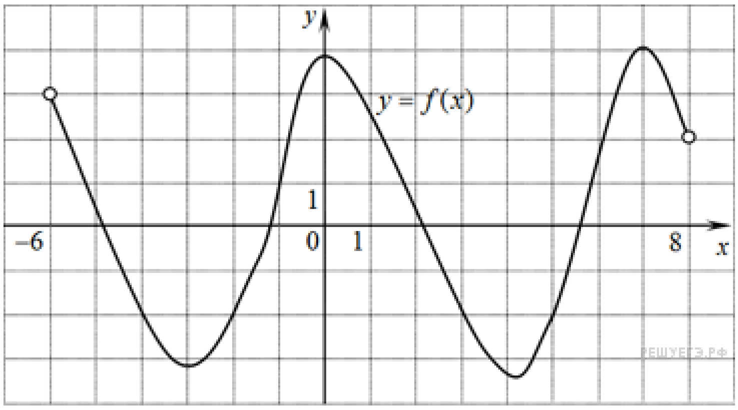


Решение.

Заданная функция имеет максимумы в точках 1; 4; 9; 11 и минимумы в точках 2; 7; 10. Поэтому сумма точек экстремума равна $1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44$

Ответ: 44.

3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

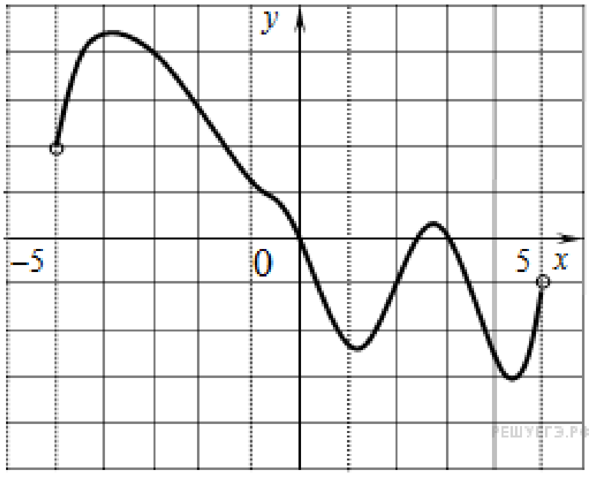


Решение.

Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает, т. е. на интервалах (−3; 0) и (4,2; 7). В них содержатся целые точки −2, −1, 5 и 6, всего их 4.

Ответ: 4.

4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−5; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

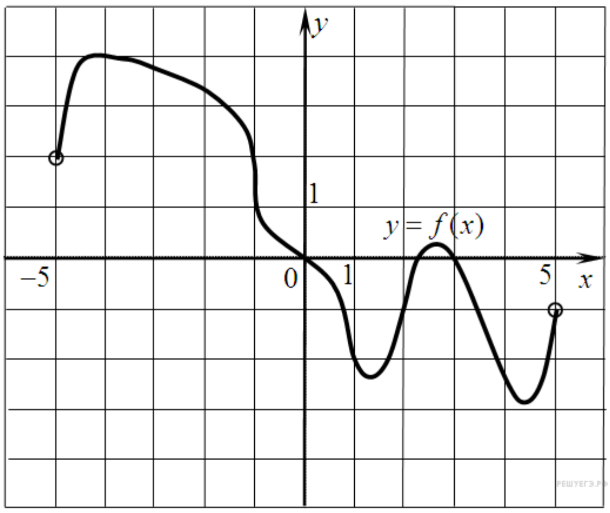


Решение.

Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает, т. е. на интервалах (−3,8; 1,2) и (2,8; 4,4). В них содержатся целые точки −3, −2, −1, 0, 1, 3, 4. Их 7 штук.

Ответ: 7.

5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−5; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.

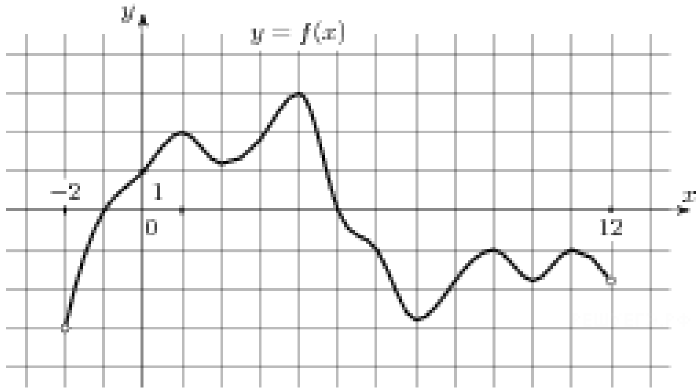


Решение.

Поскольку касательная параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. Производная равна нулю в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней в 4 точках.

Ответ: 4.

6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2;\ 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

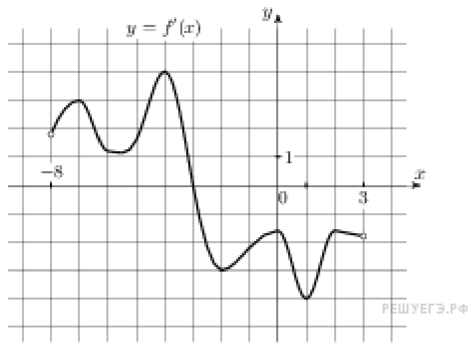


Решение.

Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна $1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44$.

Ответ: 44.

7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;\ 3)$. В какой точке отрезка $[-3;\ 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

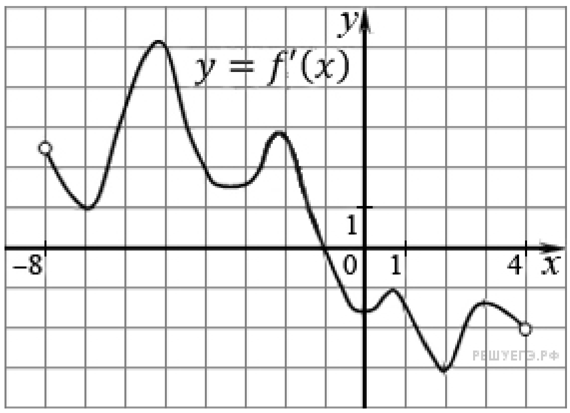


Решение.

На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке −3.

Ответ: −3.

8. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;\ 4)$. В какой точке отрезка $[-7;\ -3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

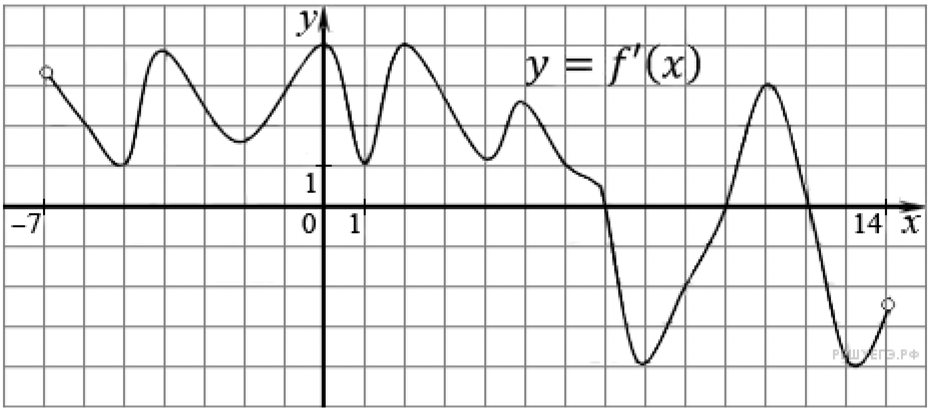


Решение.

На заданном отрезке производная функции положительна, поэтому функция на этом отрезке возрастает. Поэтому наименьшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке -7.

Ответ: −7.

9. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 14). Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−6; 9].

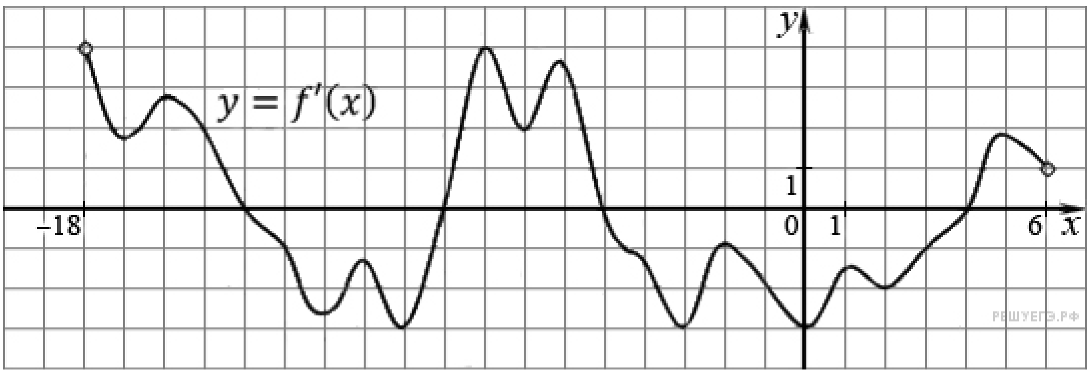


Решение.

Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный. На отрезке [−6; 9] функция имеет одну точку максимума $x = 7$.

Ответ: 1.

10. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−18; 6). Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке [−13;1].

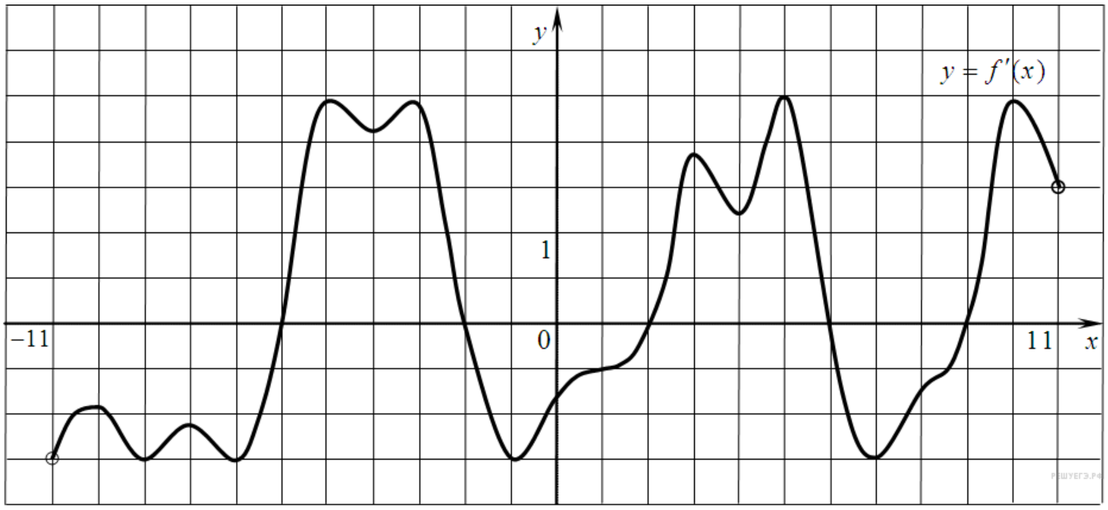


Решение.

Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с минуса на плюс. На отрезке [−13;1] функция имеет одну точку минимума $x = -9$.

Ответ: 1.

11. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11; 11). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)* на отрезке [−10; 10].

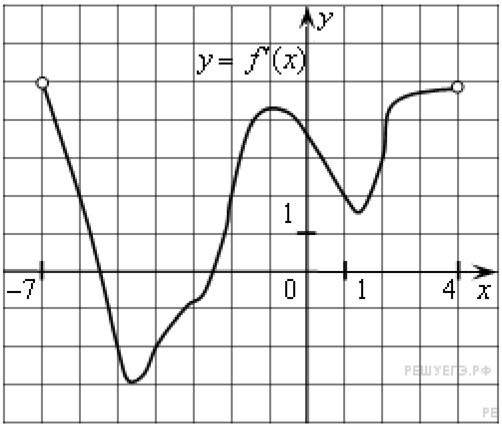


Решение.

Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной. Производная меняет знак в точках −6, −2, 2, 6, 9. Тем самым, на отрезке [−10; 10] функция имеет 5 точек экстремума.

Ответ: 5.

12. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 4). Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

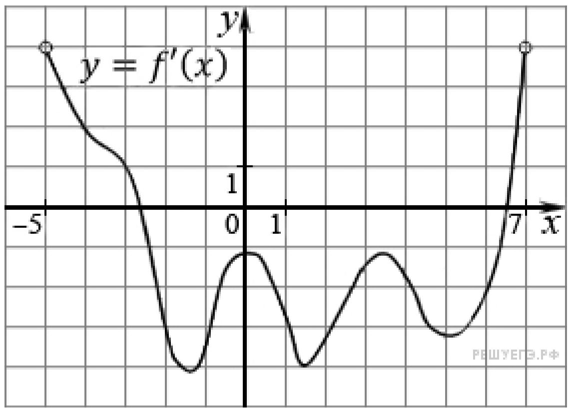


Решение.

Промежутки возрастания данной функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна то есть промежуткам (−7; −5,5] и [−2,5; 4). Данные промежутки содержат целые точки –6, –2, –1, 0, 1, 2, 3. Их сумма равна –3.

Ответ: –3.

13. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−5; 7). Найдите промежутки убывания функции *f(x)*. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

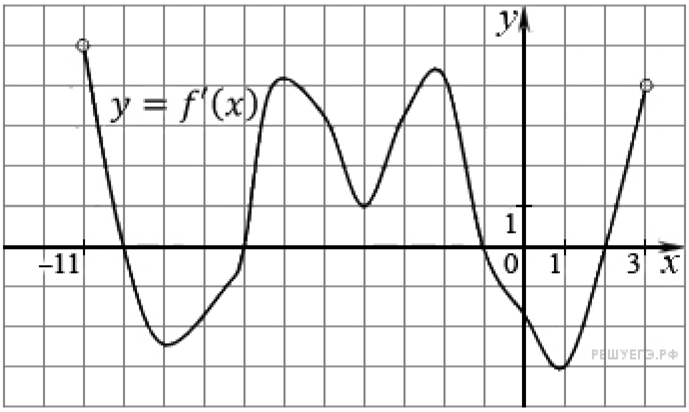


Решение.

Промежутки убывания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалу (−2,5; 6,5). Данный интервал содержит следующие целые точки: –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 сумма которых равна 18.

Ответ: 18.

14. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11; 3). Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.

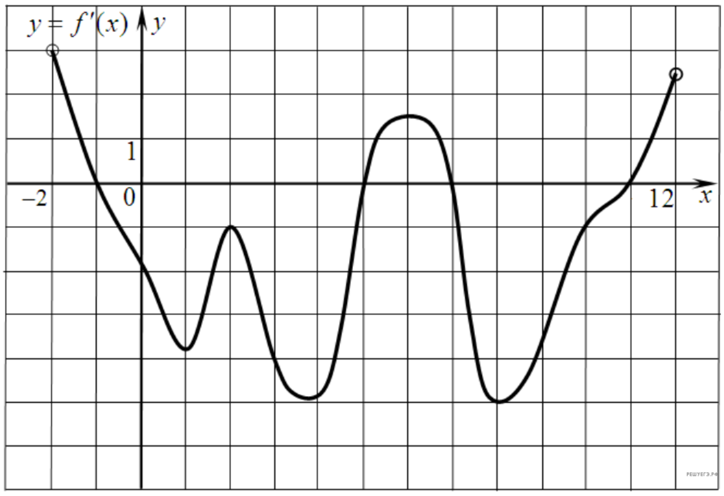


Решение.

Промежутки возрастания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции положительна, то есть интервалам (−11; −10), (−7; −1), (2; 3). Наибольший из них — интервал (−7; −1), длина которого 6.

Ответ: 6.

15. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−2; 12). Найдите промежутки убывания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.

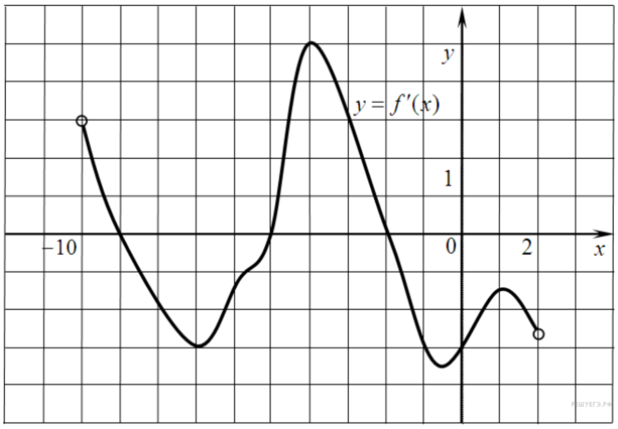


Решение.

Промежутки убывания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалам (−1; 5) длиной 6 и (7; 11) длиной 4. Длина наибольшего из них 6.

Ответ: 6.

16. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.

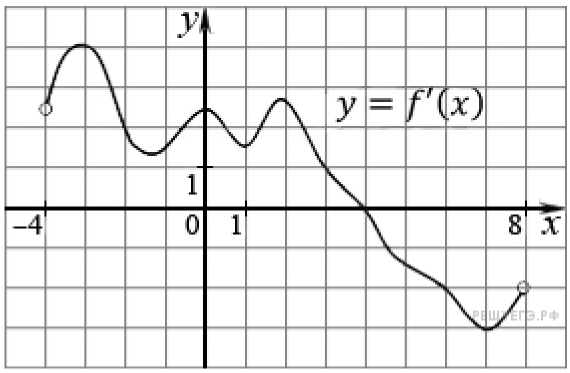


Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны –2. Найдем количество точек, в которых $y'(x_0) = -2$, это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой $y = -2$. На данном интервале таких точек 5.

Ответ: 5.

17. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−4; 8). Найдите точку экстремума функции *f(x)* на отрезке [−2; 6].

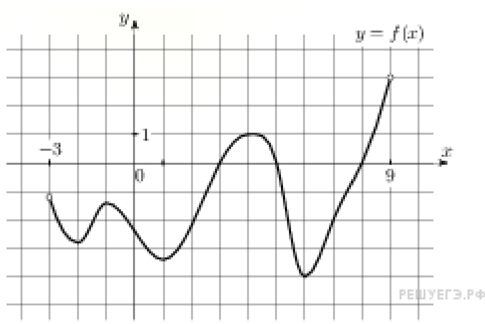


Решение.

Если производная в некоторой точке равна нулю, а в ее окрестности меняет знак, то это точка экстремума. На отрезке [–2; 6] график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, точка 4 является точкой экстремума.

Ответ: 4.

18. На рисунке изображен график функции *y=f(x)* , определенной на интервале (−3; 9) . Найдите количество точек, в которых производная функции *f(x)* равна 0.

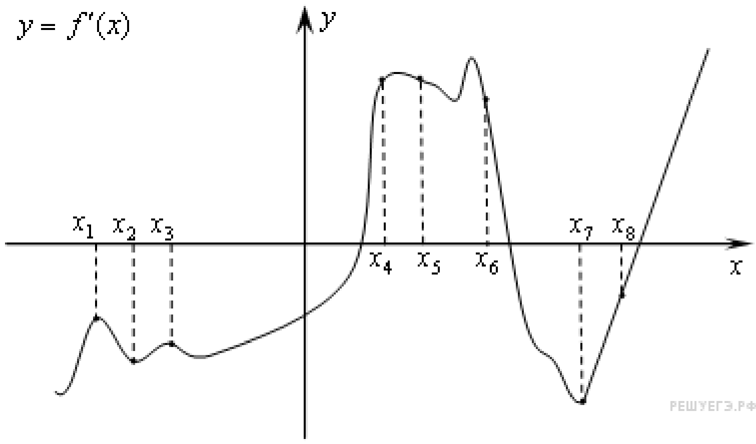


Решение.

Производная изображенной на рисунке функции *f(x)* равна нулю в точках экстремумов: −2; −1; 1; 4 и 6. Производная равна нулю в 5 точках.

Ответ: 5.

19. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ - производной функции *f*(*x*).На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, ..., x_8$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции *f*(*x*) ?

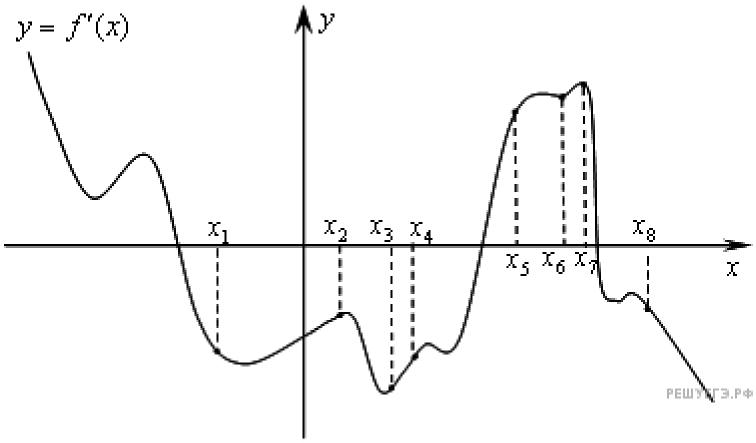


Решение.

Возрастанию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют положительные значения её производной. Производная положительна в точках x_4, x_5 x_6. Таких точек 3.

Ответ: 3.

20. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?

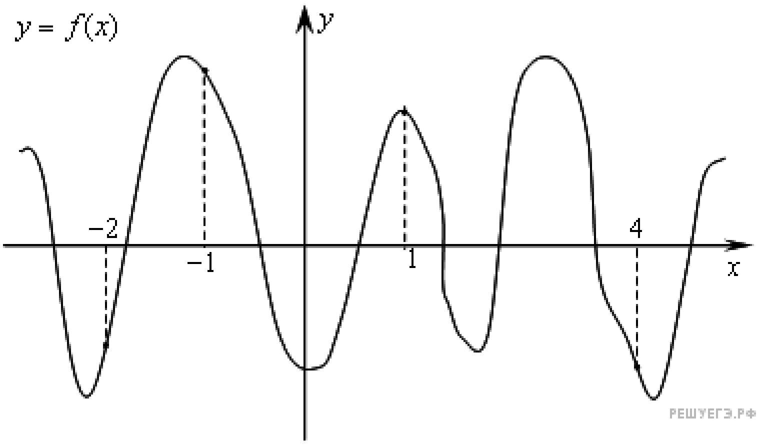


Решение.

Убыванию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют отрицательные значения её производной. Производная отрицательна в точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_8: точки лежат ниже оси абсцисс, их ординаты отрицательгы. Таких точек 5.

Ответ: 5.

21. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −2, −1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

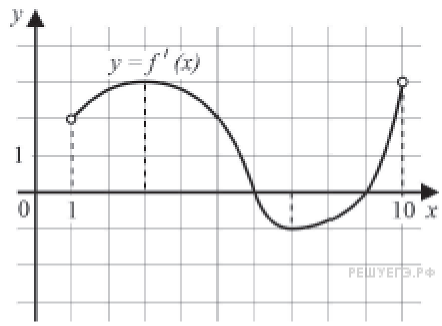


Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная отрицательна в точках −1 и 4. Модуль тангенса угла наклона касательной явно больше в точке 4, поэтому тангенс в этой точке наименьший.

Ответ: 4.

22. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ определённой на интервале (1; 10). Найдите точку минимума функции $f(x)$.

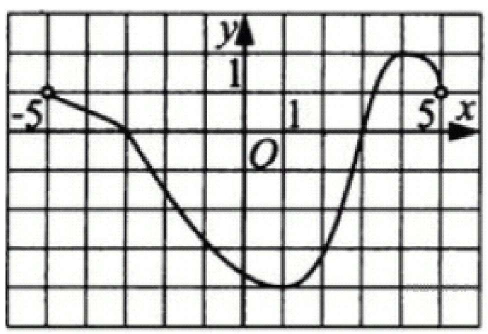


Решение.

Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с отрицательного на положительный. На интервале (1; 10) функция имеет одну точку минимума $x = 9$.

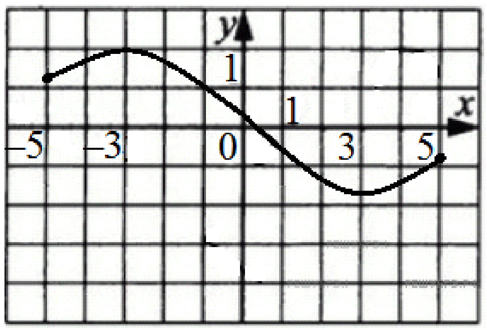
Ответ: 9.

23. Функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке [−5; 5]. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0, в которой функция принимает наименьшее значение, если $f(-5) \geq f(5)$.



Решение.

Напомним, что если функция непрерывна на отрезке [a; b], а её производная положительна (отрицательна) на интервале (a; b), то функция возрастает (убывает) на отрезке [a; b].



Тем самым, функция f, график производной которой дан в условии, возрастает на отрезках [−5; −3] и [3; 5] и убывает на отрезке [−3; 3].

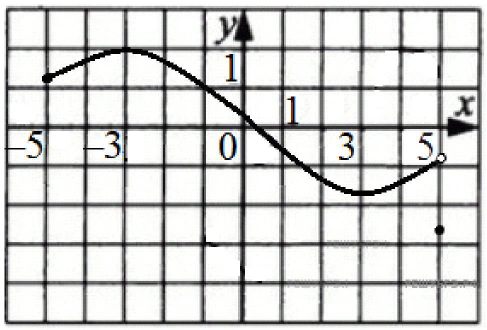
Из этого следует, что f принимает наименьшее значение на левой границе отрезка, в точке −5, или в точке минимума $x_{\min} = 3$. В силу возрастания f на отрезке [3; 5] справедливо неравенство $f\,(5) > f\,(3)$. Поскольку по условию $f\,(-5)$ не меньше, чем $f\,(5)$, справедлива оценка $f\,(-5) > f\,(3)$.

Тем самым, наименьшего значения функция f достигает в точке 3. График одной из функций, удовлетворяющих условию, приведён на рисунке.

Ответ: 3.

Примечание Б. М. Беккера (Санкт-Петербург).

Непрерывность функции на концах отрезка существенна. Действительно, если бы функция f имела в точке 5 разрыв первого рода (см. рис.), значение $f\,(5)$ могло оказаться меньше значения $f\,(3)$, а тогда наименьшим значением функции на отрезке [−5; 5] являлось бы значение функции в точке 5.



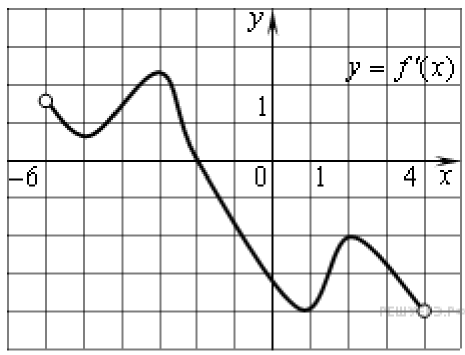
Примечание портала РЕШУ ЕГЭ.

Мы были удивлены, обнаружив это задание в экзаменационной работе досрочного ЕГЭ по математике 28.04.2014 г. Это непростое задание отсутствует в Открытых банках заданий, что, несомненно, оказалось неприятным сюрпризом для выпускников.

Примечание Александра Ларина (Москва).

В этой задачке весь ужас «выстрелил вхолостую», 99,9999% решающих даже и не обратят внимание на потенциальную угрозу — ответ-то получается такой же. А про соотношение значений на границах и уж тем более про непрерывность никто читать и не собирается :-) А вот если условие слегка поменять, то «минус балл» всей стране обеспечен будет.

24. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 4)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите абсциссу точки, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.

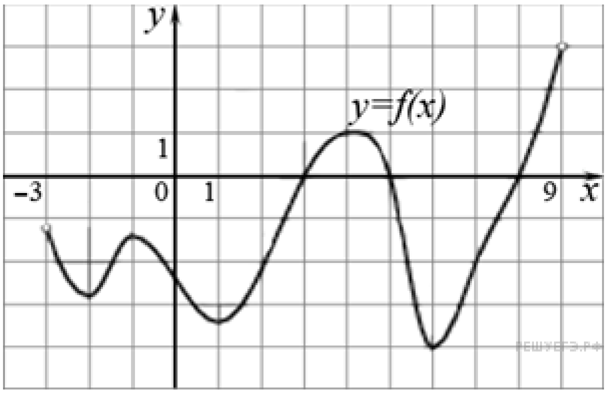


Решение.

Смена знака производной с положительного на отрицательный соответствует точке максимума, следовательно, в точке с абсциссой −2 достигается наибольшее значение функции.

Ответ: −2.

25. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−3; 9). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 12$ или совпадает с ней.

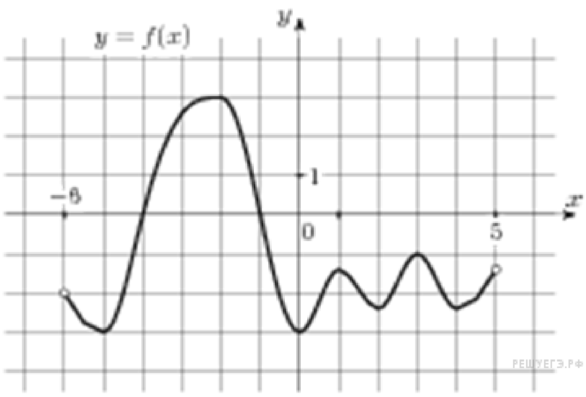


Решение.

Касательная параллельна горизонтальной прямой в точках экстремумов, таких точек на графике 5.

Ответ: 5.

26. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.

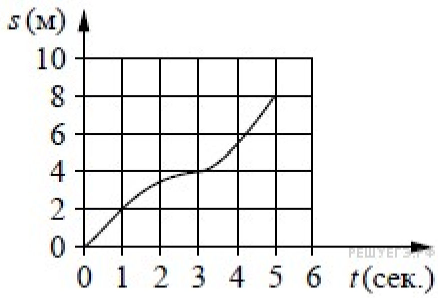


Решение.

Касательная параллельна горизонтальной прямой в точках экстремумов, таких точек на графике 7.

Ответ: 7.

27. Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.

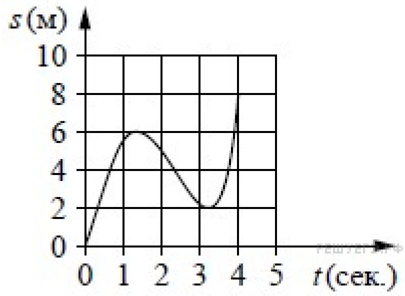


Решение.

Чтобы найти среднюю скорость движения точки, необходимо пройденное расстояние поделить на время прохождения: $8:5=1,6$ м/с

Ответ: 1,6

28. Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Решение.

Чтобы найти среднюю скорость, необходимо перемещение разделить на время, за которое это перемещение совершено.Таким образом, средняя скорость: $8 : 4 = 2$ м/с

Ответ: 2.

Примечание:

При данной формулировке задания вычислить среднюю путевую скорость невозможно. По условию на оси ординат откладывается расстояние от начального положения точки (в метрах), а не пройденный путь. В условии также нет указания на прямолинейность движения.