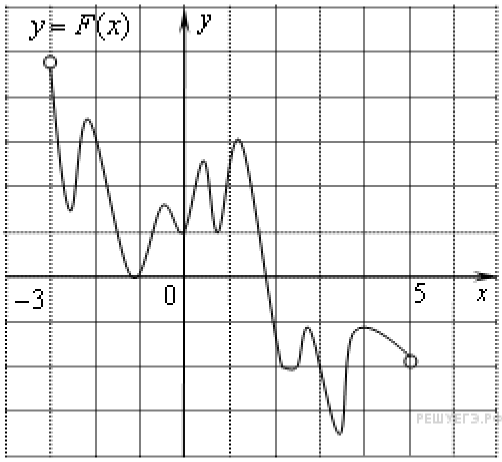
Первообразная

1. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-2; 4]$.



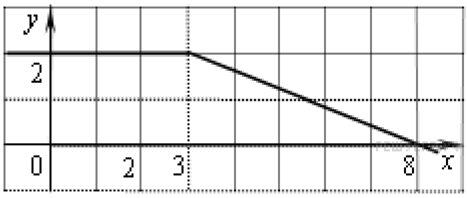
Решение.
По определению первообразной на интервале $(-3; 5)$ справедливо равенство

$$f(x) = F'(x).$$

Следовательно, решениями уравнения $f(x)=0$ являются точки экстремумов изображенной на рисунке функции $F(x)$ Это точки −2,6; −2,2; −1,2; −0,5; 0; 0,4; 0,8; 1,2; 2,2; 2,8; 3,4; 3,8. Из них на отрезке [−2;4] лежат 10 точек. Таким образом, на отрезке [−2;4] уравнение $f(x) = 0$ имеет 10 решений.

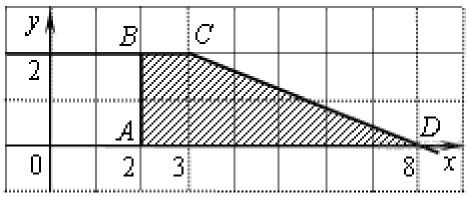
Ответ: 10.

2. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



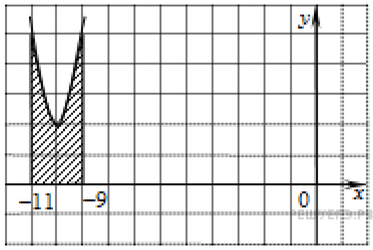
Решение.
Разность значений первообразной в точках 8 и 2 равна площади выделенной на рисунке трапеции $ABCD$. Поэтому

$$F(b) - F(a) = \frac{1+6}{2} \cdot 2 = 7.$$



Ответ:7.

3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение.

Площадь выделенной фигуры равна разности значений первообразных, вычисленных в точках -9 и -11.

Имеем:

$$F(-9)=(-9)^3+30\cdot(-9)^2+302\cdot(-9)-\frac{15}{8}=-729+2430-2718-\frac{15}{8}=-1018\frac{7}{8}.$$

$$F(-11)=(-11)^3+30\cdot(-11)^2+302\cdot(-11)-\frac{15}{8}=-1331+3630-3322-\frac{15}{8}=-1024\frac{7}{8}.$$

$$F(-9)-F(-11)=-1018\frac{7}{8}+1024\frac{7}{8}=6.$$

Приведем другое решение.

Получим явное выражение для $f(x)$. Поскольку

$$f(x)=F'(x)=3x^2+60x+302=3(x^2+20x+100)+2=3(x+10)^2+2,$$

имеем:

$$\int\limits_{-11}^{-9}(3(x+10)^2+2)dx=((x+10)^3+2x)\Bigg|_{-11}^{-9}=1-(-1)+2(-9-(-11))=2+4=6.$$

Примечание.

Внимательный читатель отметит, что второй подход эквивалентен выделению полного куба:

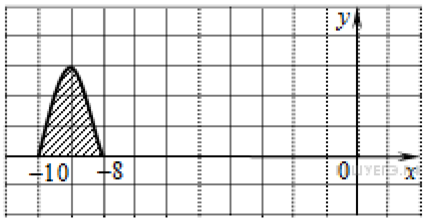
$$F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}=(x+10)^3+2x-1000-\frac{15}{8},$$

что позволяет сразу же найти $F(-9)-F(-11)$.

Еще один способ рассуждений покажем на примере следующей задачи.

Ответ: 6.

4. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x)=-x^3-27x^2-240x-8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение.

Найдем формулу, задающую функцию $f(x)$, график которой изображён на рисунке.

$$f(x)=F'(x)=-3x^2-54x-240=-3(x^2+18x)-240=3-3(x+9)^2.$$

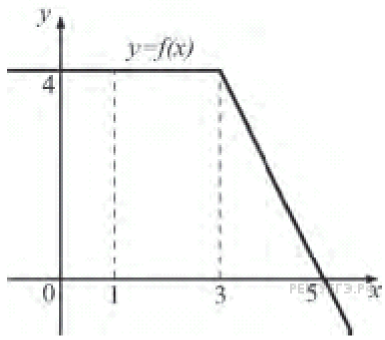
Следовательно, график функции $f(x)$ получен сдвигом графика функции $y=3-3x^2$ на 9 единиц влево вдоль оси абсцисс. Поэтому искомая площадь фигуры равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $y=3-3x^2$ и отрезком $[-1;\ 1]$ оси абсцисс. Имеем:

$$S=\int\limits_{-1}^{1}(3-3x^2)dx=2\int\limits_{0}^{1}(3-3x^2)dx=2(3x-x^3)\Big|_0^1=2(3-1)-0=4.$$

Ответ: 4.

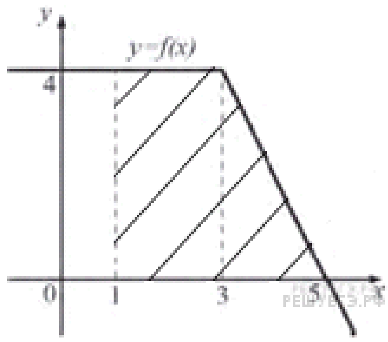
Еще несколько способов рассуждений покажем на примере следующей задачи.

5. На рисунке изображен график некоторой функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int\limits_1^5 f(x)\,dx$.



Решение.

Определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[1;5]$ дает значение площади подграфика функции $f(x)$ на отрезке. Область под графиком разбивается на прямоугольный треугольник, площадь которого $S_{\text{тр}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4,$ и прямоугольник, площадь которого $S_{\text{пр}}=2\cdot 4=8.$ Сумма этих площадей дает искомый интеграл



$$\int\limits_1^5 f(x)\,dx=S_{\text{пр}}+S_{\text{тр}}=4+8=12.$$

Ответ: 12.