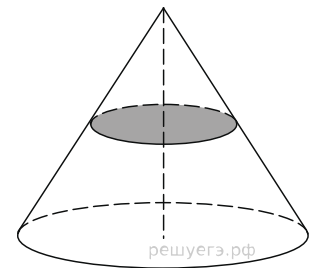


Конус

1. 1. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

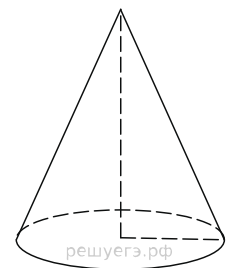


Решение.

Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем меньшего конуса в восемь раз меньше объема большего конуса.

Ответ: 2.

2. 2. Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30° . В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



Решение.

Объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S — площадь основания, а h — высота конуса. Высоту конуса найдем по свойству стороны прямоугольного треугольника, находящейся напротив угла в 30° : — он вдвое меньше гипотенузы, которой в данном случае является образующая конуса. Радиус основания найдем по теореме Пифагора:

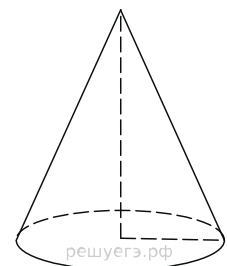
$$r = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}.$$

Тогда объем

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3 \cdot 1 = \pi.$$

Ответ: 1.

3. 3. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



Решение.

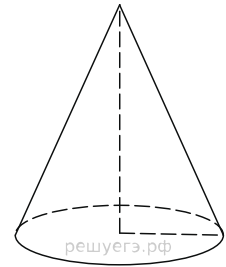
Объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S — площадь основания, а h — высота конуса. При уменьшении высоты в 3 раза объем конуса также уменьшится в 3 раза.

Ответ: 3.

4. 4. Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 1,5 раза, а высота останется прежней?

**Решение.**

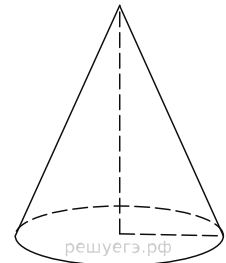
Объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

где S — площадь основания, h — высота конуса, а r — радиус основания. При увеличении радиуса основания в 1,5 раза объем конуса увеличится в 2,25 раза.

Ответ: 2,25.

5. 5. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объем, деленный на π .

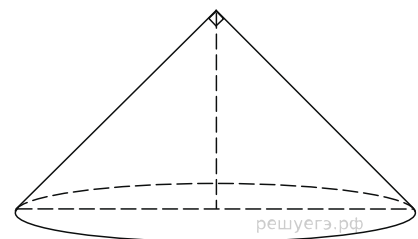
**Решение.**

По теореме Пифагора найдем, что радиус основания равен $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Тогда объем конуса, деленный на π :

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 6 = 128$$

Ответ: 128.

6. 6. Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса, деленный на π .



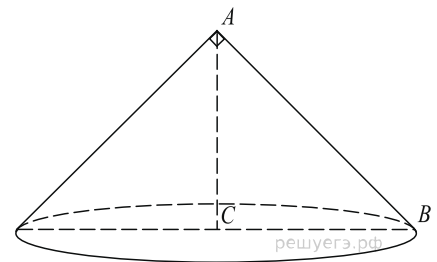
Решение.

В треугольнике, образованном радиусом основания r , высотой h и образующей конуса l , углы при образующей равны, поэтому высота конуса равна радиусу его основания: $h = r$. Тогда объем конуса, деленный на π вычисляется следующим образом:

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} r^2 r = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9.$$

Ответ: 9.

7. 7. Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника ABC вокруг катета, равного 6. Найдите его объем, деленный на π .

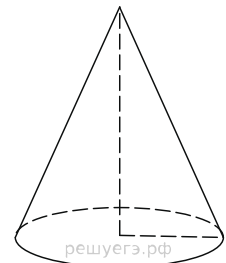
**Решение.**

Треугольник ABC — так же равнобедренный, т. к. углы при основании $AB = 45^\circ$. Тогда радиус основания равен 6, а для объема конуса, деленного на π имеем:

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} r^2 r = \frac{1}{3} \cdot 6^3 = 72.$$

Ответ: 72.

8. 8. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

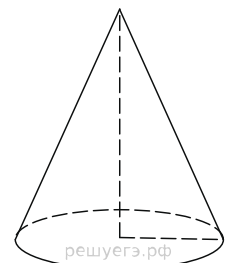
**Решение.**

Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \pi Rl = \frac{1}{2} Cl$, где C — длина окружности основания, а l — образующая. Тогда

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3.$$

Ответ: 3.

9. 9. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?

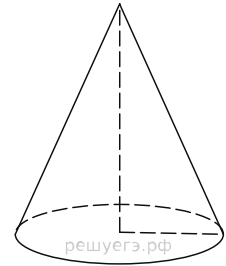


Решение.

Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \frac{1}{2}lC$, где C — длина окружности основания, а l — образующая. При увеличении образующей в 3 раза площадь боковой поверхности конуса увеличится в 3 раза.

Ответ: 3.

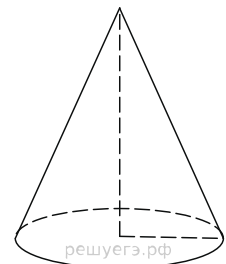
10. 10. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшится в 1,5 раза, а образующая останется прежней?

**Решение.**

Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \pi r l$, где r — радиус окружности в основании, а l — образующая. Поэтому при уменьшении радиуса основания в 1,5 раза при неизменной величине образующей площадь боковой поверхности тоже уменьшится в 1,5 раза.

Ответ: 1,5.

11. 11. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π .

**Решение.**

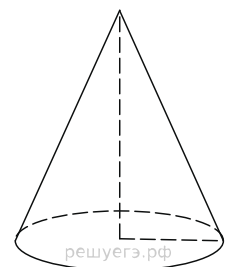
Площадь поверхности складывается из площади основания $S_{\text{осн}} = \pi r^2$ и площади боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = \pi r l$.

Радиус основания найдем по теореме Пифагора для треугольника, образованного высотой, образующей и радиусом: $r = \sqrt{l^2 - h^2} = 8$. Тогда площадь поверхности

$$S = \pi r^2 + l\pi r = \pi r(l + r) = \pi \cdot 8 \cdot 18 = 144\pi.$$

Ответ: 144.

12. 12. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.



Решение.

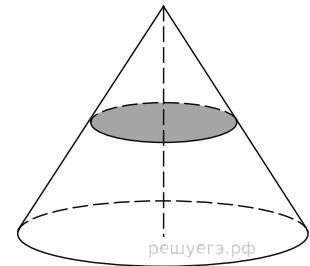
Площадь основания конуса равна $S_{\text{осн}} = \pi r^2$, а площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}} = \pi r l$. Из условия имеем:

$$S_{\text{бок}} = 2S_{\text{осн}} \Leftrightarrow \pi r l = 2\pi r^2 \Leftrightarrow l = 2r.$$

Значит, в прямоугольном треугольнике, образованном высотой, образующей и радиусом основания конуса, катет, равный радиусу, вдвое меньше гипотенузы. Тогда он лежит напротив угла 30° . Следовательно, угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60° .

Ответ: 60.

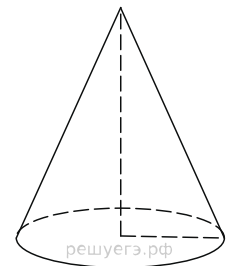
13. 13. Площадь полной поверхности конуса равна 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 1:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсеченного конуса.

**Решение.**

Исходный и отсеченный конус подобны с коэффициентом подобия 2. Площади поверхностей подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия. Поэтому площадь отсеченного конуса в 4 раза меньше площади поверхности исходного. Тем самым, она равна 3.

Ответ: 3.

14. 14. Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π .

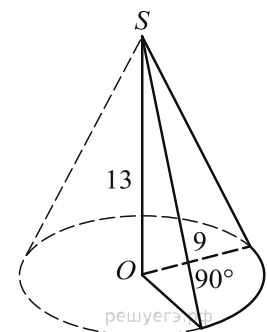
**Решение.**

Найдем образующую по теореме Пифагора: $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 5$. Площадь полной поверхности конуса

$$S = \pi r^2 + l\pi r = \pi r(l + r) = \pi \cdot 3 \cdot 8 = 24\pi.$$

Ответ: 24.

15. 15. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .



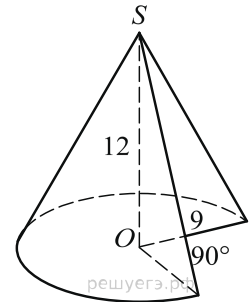
Решение.

Объем данной части конуса равен

$$\frac{90^\circ}{360^\circ} \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{12} 9^2 \cdot 13\pi = 87,75\pi.$$

Ответ: 87,75.

16. 16. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .

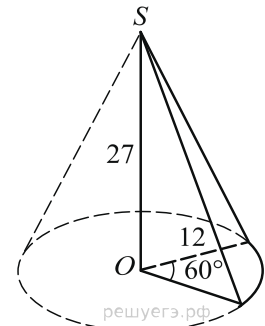
**Решение.**

Объем данной части конуса равен

$$\frac{270^\circ}{360^\circ} V_{\text{кон}} = \frac{3}{4} V_{\text{кон}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{4} \cdot 9^2 \cdot 12\pi = 243\pi.$$

Ответ: 243.

17. 17. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .

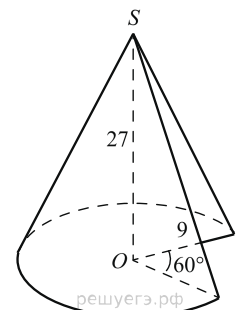
**Решение.**

Объем данной части конуса равен

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{18} 12^2 \cdot 27\pi = 216\pi.$$

Ответ: 216.

18. 18. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .



Решение.

Объем данной части конуса равен

$$\frac{300^\circ}{360^\circ} \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{5}{18} 9^2 \cdot 27\pi = 607,5\pi.$$

Ответ: 607,5.

19. 19.

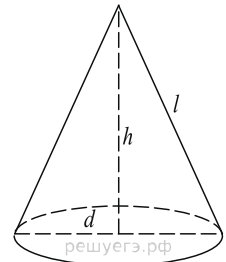
Высота конуса равна 4, а диаметр основания — 6. Найдите образующую конуса.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение конуса. По теореме Пифагора

$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{36}{4}} = \sqrt{25} = 5.$$

Ответ: 5.

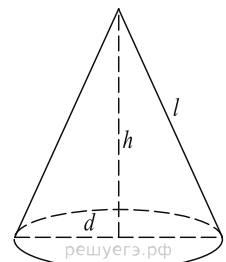


20. 20. Высота конуса равна 4, а длина образующей — 5. Найдите диаметр основания конуса.

Решение.

Радиус основания конуса, его высота и образующая связаны соотношением $r^2 + H^2 = l^2$. В нашем случае $r^2 + 4^2 = 5^2$, поэтому $r = 3$. Следовательно, диаметр основания конуса равен 6.

Ответ: 6.

**21. 21.**

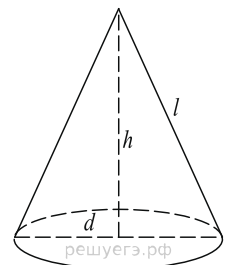
Диаметр основания конуса равен 6, а длина образующей — 5. Найдите высоту конуса.

Решение.

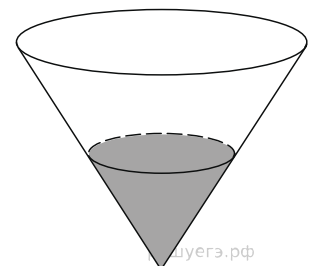
Рассмотрим осевое сечение конуса. По теореме Пифагора

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{36}{4}} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

Ответ: 4.



22. 22. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объем жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Решение.

Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем большего конуса в 8 раз больше объема меньшего конуса, он равен 560 мл. Следовательно, необходимо долить $560 - 70 = 490$ мл жидкости.

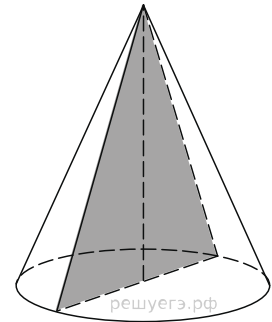
Ответ: 490.

23. 23. Площадь основания конуса равна 16π , высота — 6. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Решение.

Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, высота которого совпадает с высотой конуса, а основание является диаметром основания конуса. Поэтому площадь осевого сечения равна половине произведения высоты конуса на диаметр его основания или произведению высоты конуса на радиус основания R . Поскольку по условию $\pi R^2 = 16\pi$, радиус основания конуса равен 4, а тогда искомая площадь осевого сечения равна 24.

Ответ: 24.

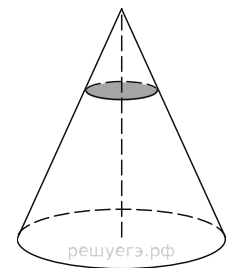


24. 24. Площадь основания конуса равна 18. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

Решение.

Сечение плоскостью, параллельной основанию, представляет собой круг, радиус которого относится к радиусу основания конуса как 3 : 9. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому площадь сечения в 9 раз меньше площади основания. Тем самым, она равна 2.

Ответ: 2.

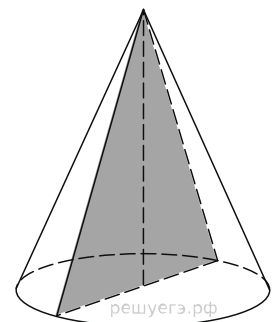


25. 25. Высота конуса равна 8, а длина образующей — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

Решение.

Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, основание которого — диаметр основания конуса, а высота совпадает с высотой конуса. Образующая конуса l , его высота h и радиус основания r связаны соотношением $l^2 = h^2 + r^2$, откуда $r = \sqrt{100 - 64} = 6$. Следовательно, диаметр осевого сечения конуса равен 12, а площадь осевого сечения равна $0,5 \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

Ответ: 48.

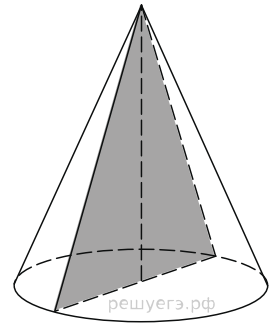


26. 26. Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

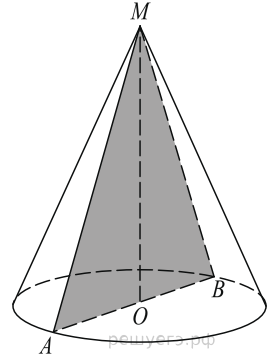
Решение.

Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, основание которого — диаметр основания конуса, а высота совпадает с высотой конуса. Образующая конуса l , его высота h и радиус основания r связаны соотношением $l^2 = h^2 + r^2$, откуда $h = \sqrt{100 - 36} = 8$. Следовательно, площадь осевого сечения равна $0,5 \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

Ответ: 48.



27. 27. Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 3, а образующая равна 5.

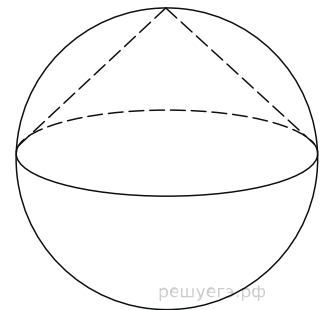
**Решение.**

Осевое сечение конуса является равнобедренным треугольником, стороны которого являются образующими конуса, а основание — диаметр его основания. Поэтому для треугольника AMB имеем:

$$S_{AMB} = \frac{1}{2}AB \cdot MO = \frac{1}{2}AB \sqrt{AB^2 - OB^2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{5^2 - 3^2} = 12.$$

Ответ: 12.

28. 28. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

**Решение.**

Высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$l^2 = r^2 + r^2 \Leftrightarrow l = r\sqrt{2}.$$

Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$, поэтому образующая равна $10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20$.

Ответ: 20.