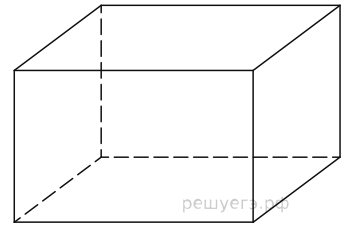


Прямоугольный параллелепипед

1. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.



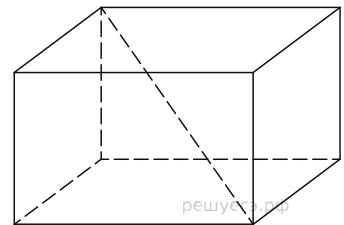
Решение.

Площадь поверхности параллелепипеда с ребрами a_1 , a_2 , a_3 дается формулой $S = 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)$. Пусть неизвестное ребро равно x . Подставляя известные величины из условия, получаем:

$$2(3 \cdot 4 + 3x + 4x) = 94 \Leftrightarrow 7x + 12 = 47 \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: 5.

2. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.



Решение.

Пусть длина третьего ребра, исходящего из той же вершины, равна x , тогда площадь поверхности параллелепипеда дается формулой $S = 2(1 \cdot 2 + 1 \cdot x + 2 \cdot x) = 6x + 4$. По условию площадь поверхности равна 16, тогда $6x + 4 = 16$, откуда $x = 2$.

Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда равна квадратному корню из суммы квадратов его измерений, поэтому $d = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$.

Ответ: 3.

Примечание о том, как не надо решать эту задачу.

Обозначим известные ребра за a_1 и a_2 , а неизвестное за a_3 . Площадь поверхности параллелепипеда выражается как $S = 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)$. Выразим a_3 :

$$a_3(a_1 + a_2) = \frac{S}{2} - a_1a_2,$$

откуда неизвестное ребро

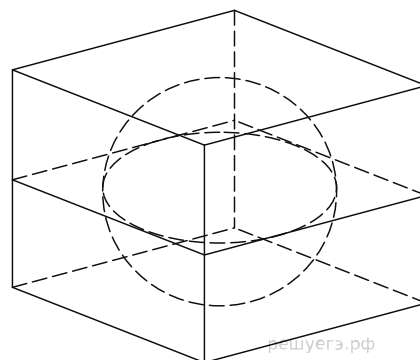
$$a_3 = \frac{S/2 - a_1a_2}{a_1 + a_2} = \frac{8 - 2}{3} = 2,$$

Диагональ параллелепипеда находится как

$$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 3.$$

Ответ: 3.

3. Прямоугольный параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его площадь поверхности.

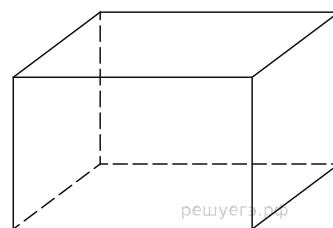


Решение.

Высота и сторона такого параллелепипеда равны диаметру сферы, поэтому это куб с ребром 2. Площадь его поверхности равна $6 \cdot 4 = 24$.

Ответ: 24.

4. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.



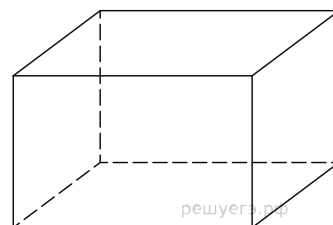
Решение.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен $V = Sh$, где S — площадь грани, а h — высота перпендикулярного к ней ребра. Имеем

$$V = Sh = 12 \cdot 4 = 48.$$

Ответ: 48.

5. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24. Одно из его ребер равно 3. Найдите площадь грани параллелепипеда, перпендикулярной этому ребру.



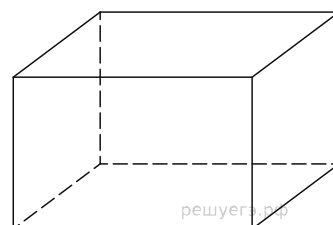
Решение.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен $V = Sh$, где S — площадь грани, а h — высота перпендикулярного к ней ребра. Тогда площадь грани

$$S = \frac{V}{h} = \frac{24}{3} = 8.$$

Ответ: 8.

6. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.



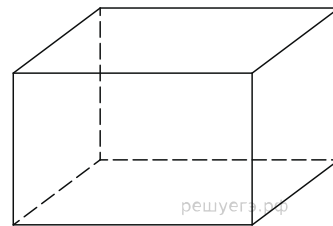
Решение.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен $V = Sh$, где S — площадь грани, а h — высота перпендикулярного к ней ребра. Тогда

$$h = \frac{V}{S} = \frac{60}{12} = 5.$$

Ответ: 5.

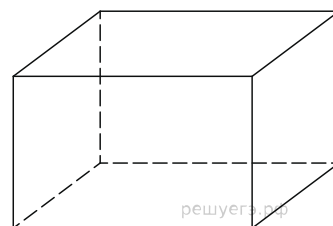
7. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объем параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.

**Решение.**

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений. Поэтому, если x — искомое ребро, то $2 \cdot 6 \cdot x = 48$, откуда $x = 4$.

Ответ: 4.

8. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4, 6, 9. Найдите ребро равновеликого ему куба.

**Решение.**

Объем куба $V = a^3$ равен объему параллелепипеда

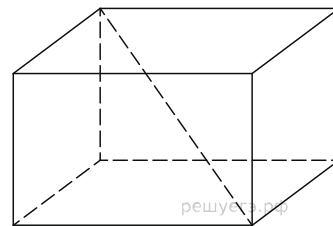
$$V = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216.$$

Значит для ребра куба имеем:

$$a = \sqrt[3]{216} = 6.$$

Ответ: 6.

9. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите объем параллелепипеда.



Решение.

Длина диагонали параллелепипеда равна

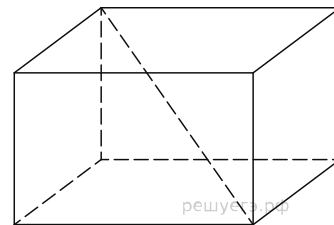
$$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{20 + a_3^2}.$$

Длина третьего ребра тогда $a_3 = \sqrt{d^2 - 20} = 4$. Получим, что объем параллелепипеда

$$V = a_1 a_2 a_3 = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32.$$

Ответ: 32.

10. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 3. Объем параллелепипеда равен 36. Найдите его диагональ.

**Решение.**

Объем параллелепипеда равен

$$V = a_1 a_2 a_3 = 36.$$

Отсюда найдем третье ребро:

$$a_3 = \frac{V}{a_1 a_2} = 6.$$

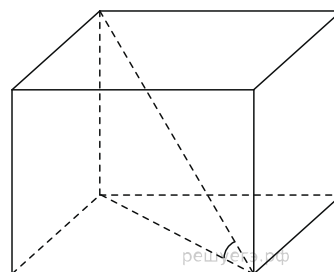
Длина диагонали параллелепипеда равна

$$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7.$$

Ответ: 7.

11.

Одна из граней прямоугольного параллелепипеда — квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45° . Найдите объем параллелепипеда.

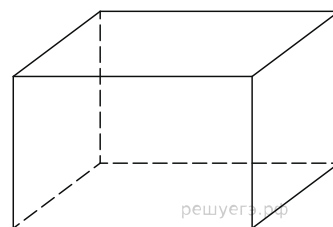
**Решение.**

Ребро параллелепипеда напротив угла в 45° равно $\sqrt{8} \sin 45^\circ = 2$, поскольку образует с заданной диагональю и диагональю одной из граней равнобедренный треугольник. Два другие ребра по построению лежат в прямоугольных треугольниках напротив угла в 30° и равны, поэтому половине диагонали. Тогда объем параллелепипеда:

$$2 \cdot \frac{\sqrt{8}}{2} \frac{\sqrt{8}}{2} = 4.$$

Ответ: 4.

12. Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите его площадь поверхности.



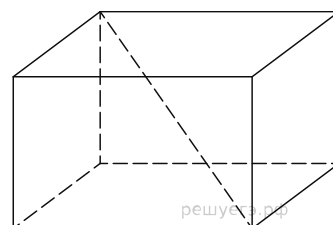
Решение.

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда равна удвоенной сумме попарных произведений его измерений

$$S = 2(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3) = 22.$$

Ответ: 22.

13. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.



Решение.

Обозначим известные ребра за a_1 и a_2 , а неизвестное за a_3 . Площадь поверхности параллелепипеда выражается как

$$S = 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3).$$

Диагональ параллелепипеда находится как

$$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Выразим a_3 :

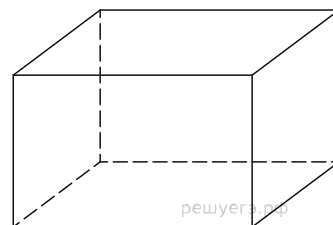
$$a_3 = \sqrt{d^2 - a_1^2 - a_2^2}.$$

Тогда площадь поверхности

$$\begin{aligned} S &= 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) = 2(a_1a_2 + (a_1 + a_2)\sqrt{d^2 - a_1^2 - a_2^2}) = \\ &= 2(8 + (2 + 4)\sqrt{36 - 4 - 16}) = 64. \end{aligned}$$

Ответ: 64.

14. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Объем параллелепипеда равен 6. Найдите площадь его поверхности.



Решение.

Найдем третье ребро из выражения для объема:

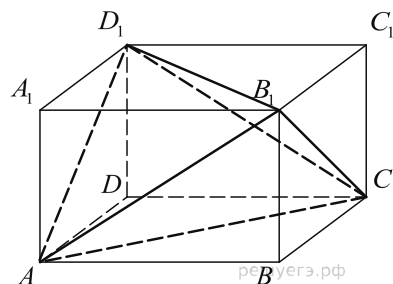
$$a_3 = \frac{V}{a_1 a_2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Площадь поверхности параллелепипеда

$$S = 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) = 2(2 + 3 + 6) = 22.$$

Ответ: 22.

15. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.

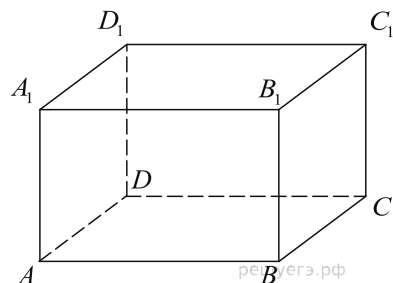
**Решение.**

Искомый объем равен разности объемов параллелепипеда со сторонами a , b и c и четырех пирамид, основания которых являются гранями данной треугольной пирамиды. Объем каждой из этих пирамид равен одной трети произведения площади основания на высоту, а площадь основания вдвое меньше площади основания параллелепипеда:

$$V = abc - 4 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} abc \right) = \frac{1}{3} abc = 1,5.$$

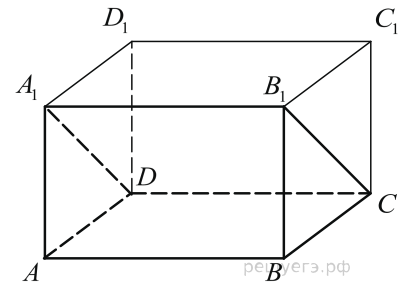
Ответ: 1,5.

16. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A , D , A_1 , B , C , B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 5$.



Решение.

Из рисунка видно, что многогранник является половиной данного прямоугольного параллелепипеда. Следовательно, объем искомого многогранника дается формулой:



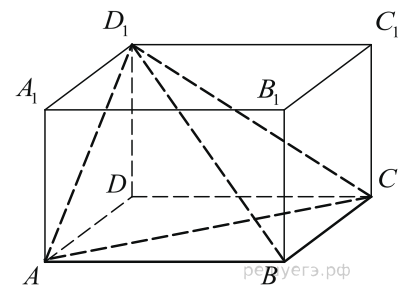
$$V_{\text{многогр}} = \frac{1}{2} V_{\text{паралл}} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 30.$$

Ответ: 30.

17. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 4$.

Решение.

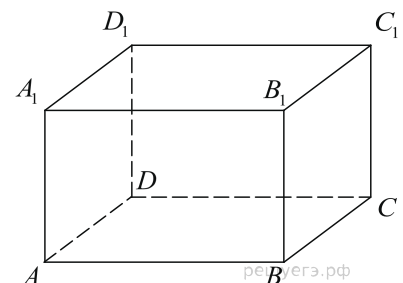
Площадь основания пирамиды в два раза меньше площади основания параллелепипеда, а высота у них общая. Поэтому



$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пир}} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\text{пар}} h = \frac{1}{6} S_{\text{пар}} h = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 8.$$

Ответ: 8.

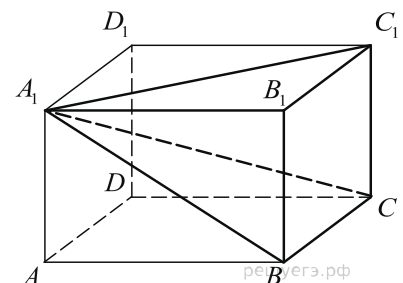
18. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B, C, C_1, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 4$.

**Решение.**

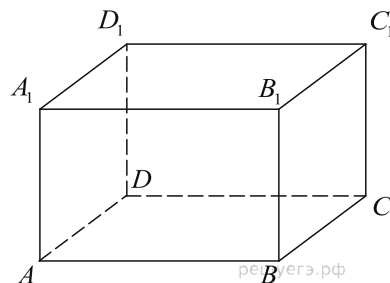
Основанием пирамиды, объем которой нужно найти, является боковая грань параллелепипеда, а ее высотой является ребро $A_1 B_1$. Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пир}} h = \frac{1}{3} S_{BCC_1 B_1} h = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 16.$$

Ответ: 16.

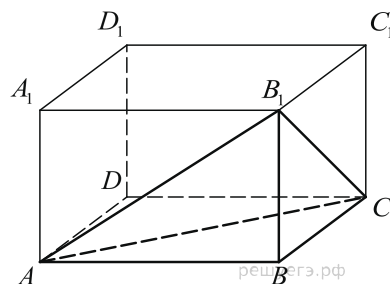


19. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3, AD = 3, AA_1 = 4$.



Решение.

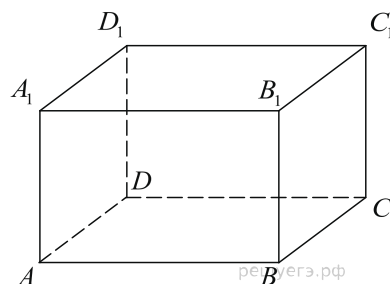
Площадь основания пирамиды в два раза меньше площади основания параллелепипеда, а высота у них общая. Поэтому



$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пир}} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\text{пар}} h = \frac{1}{6} S_{\text{пар}} h = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

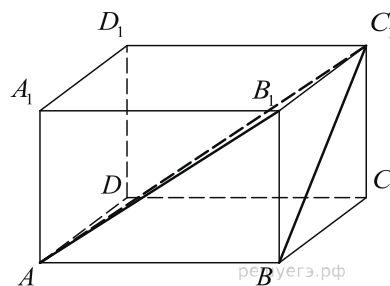
Ответ: 6.

20. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, B_1, C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 5, AD = 3, AA_1 = 4$.



Решение.

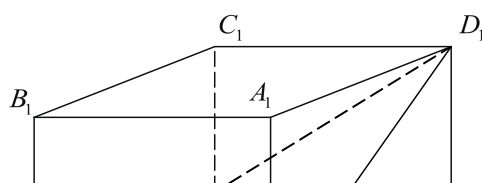
Основанием пирамиды, объем которой нужно найти, является половина боковой грани параллелепипеда, а высотой пирамиды является ребро параллелепипеда $B_1 C_1$. Поэтому

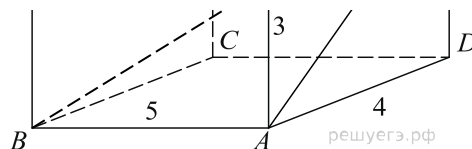


$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пир}} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\text{пар}} h = \frac{1}{6} S_{\text{пар}} h = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 10.$$

Ответ: 10.

21. Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5, AD = 4, AA_1 = 3$. Дайте ответ в градусах.





Решение.

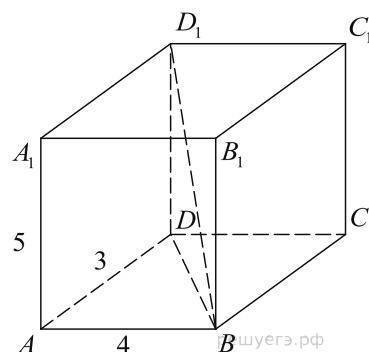
В прямоугольнике AA_1D_1D отрезок AD_1 является диагональю, $AA_1 \perp D_1D$. По теореме Пифагора

$$AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1D_1^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Прямоугольный треугольник ABD_1 равнобедренный: $AB = AD_1 = 5$, значит, его острые углы равны 45° .

Ответ: 45.

22. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$. Найдите угол DBD_1 . Ответ дайте в градусах.



Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABD . По теореме Пифагора

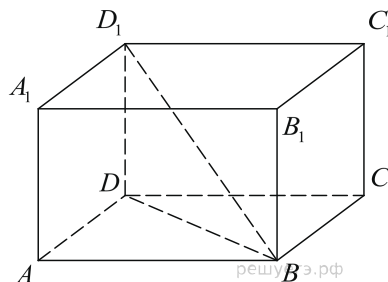
$$DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник BDD_1 . Так как $DB = AA_1 = DD_1$, то треугольник BDD_1 является равнобедренным, значит, углы при его основании равны по 45° .

Ответ: 45.

23.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $BD_1 = 3$, $CD = 2$, $AD = 2$. Найдите длину ребра AA_1 .



Решение.

Найдем диагональ BD прямоугольника $ABCD$ по теореме Пифагора:

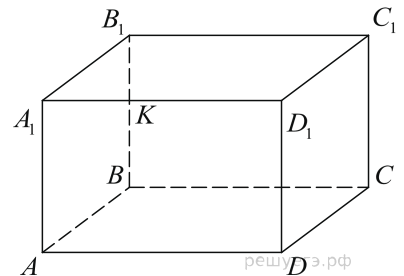
$$BD = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{8}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник DD_1B . По теореме Пифагора

$$AA_1 = DD_1 = \sqrt{BD_1^2 - BD^2} = \sqrt{9 - 8} = 1.$$

Ответ: 1.

24. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро $AB = 2$, ребро $AD = \sqrt{5}$, ребро $AA_1 = 2$. Точка K — середина ребра BB_1 . Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, D_1 и K .

**Решение.**

Сечение пересекает параллельные грани по параллельным отрезкам. Поэтому четырехугольник $A_1 K K_1 D_1$ — параллелограмм. Кроме того, ребро $A_1 D_1$ перпендикулярно граням $DD_1 C_1 C$ и $AA_1 B_1 B$, поэтому углы $A_1 D_1 K_1$ и $D_1 A_1 K$ — прямые. Следовательно, сечение $A_1 K K_1 D_1$ — прямоугольник.

Из прямоугольного треугольника $A_1 B_1 K$ по теореме Пифагора найдем $A_1 K$:

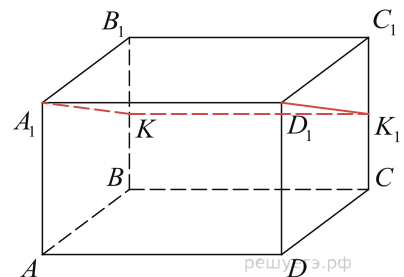
$$A_1 K = \sqrt{(A_1 B_1)^2 + (B_1 K)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

Тогда площадь прямоугольника $A_1 K K_1 D_1$ равна:

$$A_1 D_1 \cdot A_1 K = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5.$$

Ответ: 5.

25. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 24$, $AD = 10$, $AA_1 = 22$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, A_1 и C .



Решение.

Сечение пересекает параллельные грани по параллельным отрезкам. Поэтому сечение AA_1C_1C – параллелограмм. Кроме того, ребро A_1A перпендикулярно граням $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Поэтому углы AA_1C_1 и A_1AC – прямые. Поэтому сечение AA_1C_1C – прямоугольник.

Из прямоугольного треугольника ABC найдем AC :

$$AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26.$$

Тогда площадь прямоугольника AA_1C_1C равна:

$$AA_1 \cdot AC = 22 \cdot 26 = 572.$$

Ответ: 572.

26. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер $AB = 8$, $AD = 6$, $AA_1 = 21$. Найдите синус угла между прямыми CD и A_1C_1 .

Решение.

Отрезки DC и D_1C_1 лежат на параллельных прямых, поэтому искомый угол между прямыми A_1C_1 и DC равен углу между прямыми A_1C_1 и D_1C_1 .

Из прямоугольного треугольника $A_1C_1D_1$ получаем:

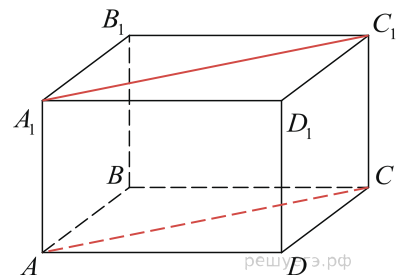
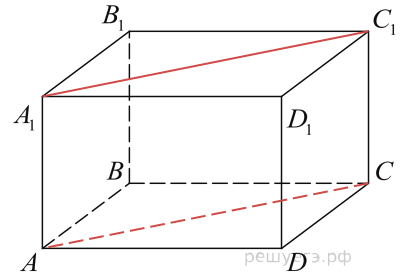
$$A_1C_1 = \sqrt{(D_1C_1)^2 + (A_1D_1)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

Тогда для угла $A_1C_1D_1$ имеем:

$$\sin A_1C_1D_1 = \frac{A_1D_1}{A_1C_1} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

27. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3$, $AD = 5$, $AA_1 = 12$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .



Решение.

Сечение пересекает параллельные грани по параллельным отрезкам. Поэтому сечение ABC_1D_1 — параллелограмм. Кроме того, ребро AB перпендикулярно граням AA_1D_1D и BB_1C_1C . Поэтому углы D_1AB и ABC_1 — прямые. Поэтому сечение ABC_1D_1 — прямоугольник.

Из прямоугольного треугольника AD_1D найдем AD_1 :

$$AD_1 = \sqrt{(AD)^2 + (DD_1)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Тогда площадь прямоугольника ABC_1D_1 равна:

$$AB \cdot AD_1 = 3 \cdot 13 = 39.$$

Ответ: 39.

