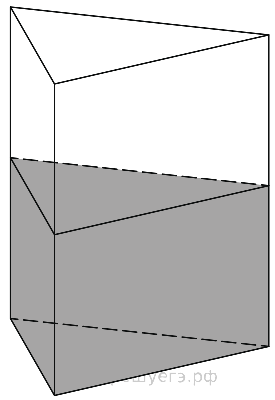
Призма

1. 1. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3.



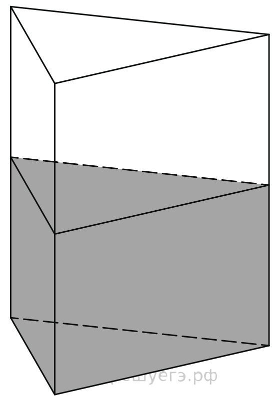
Решение.

Объём детали равен объёму вытесненной ею жидкости. Объём вытесненной жидкости равен 2/25 исходного объёма:

$$V_{\text{дет}} = \frac{2}{25} \cdot 2300 = 184\,\text{см}^3.$$

Ответ: 184.

2. 2. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.

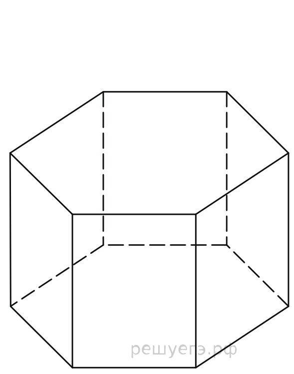


Решение.

Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту и выражается через сторону основания a и высоту H формулой $V = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}H$. Поэтому $H = \frac{4V}{\sqrt{3}a^2}$, а значит, при увеличении стороны a в 4 раза знаменатель увеличится в 16 раз, то есть высота уменьшится в 16 раз и будет равна 5 см.

Ответ: 5.

3. 3. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота – 10.



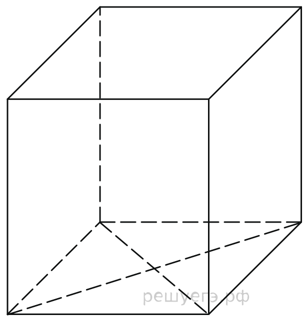
Решение.

Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей всех ее боковых граней:

$$S_{\text{бок}} = 6S_{\text{гр}} = 6 \cdot 5 \cdot 10 = 300.$$

Ответ: 300.

4. 4. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.



Решение.

Сторона ромба a выражается через его диагонали d_1 и d_2 формулой

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 5.$$

Найдем площадь ромба

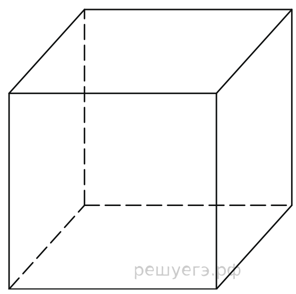
$$S_p = \frac{1}{2}d_1 d_2 = 24.$$

Тогда площадь поверхности призмы равна

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2S_p + 4aH = 48 + 4 \cdot 5 \cdot 10 = 248.$$

Ответ: 248.

5. 5. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 20, а площадь поверхности равна 1760.



Решение.

Площадь поверхности правильной четырехугольной призмы выражается через сторону ее основания a и боковое ребро H формулой

$$S = 2a^2 + 4aH.$$

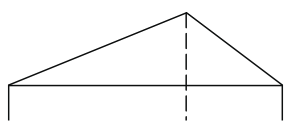
Подставим значения a и S:

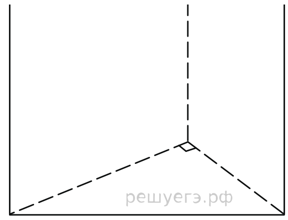
$$1760 = 2 \cdot 20^2 + 4 \cdot 20 \cdot H,$$

откуда находим, что $H = 12$.

Ответ: 12.

6. 6. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро равно 5. Найдите объем призмы.





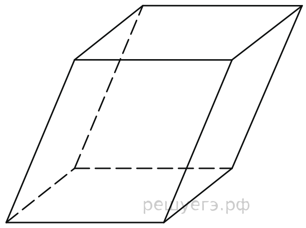
Решение.

Объем прямой призмы равен $V = Sh$ где S – площадь основания, а h – боковое ребро. Тогда объем равен

$$V = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 5 = 120.$$

Ответ: 120.

7. 7. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.



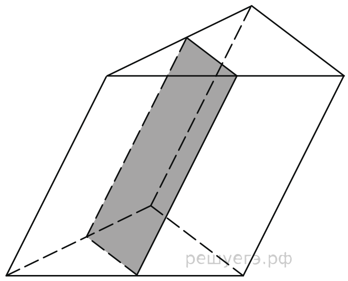
Решение.

Объем параллелепипеда $V = Sh = SL\sin\alpha$, где S — площадь одной из граней, а L — длина ребра, составляющего с этой гранью угол α. Площадь ромба с острым углом в 60° равна двум площадям равностороннего треугольника. Вычислим объем:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: 1,5.

8. 8. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

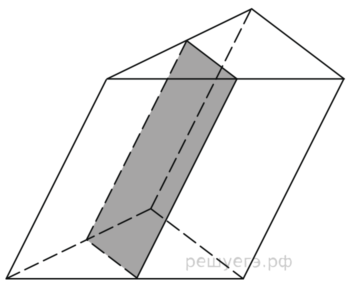


Решение.

Площадь основания отсеченной части меньше площади основания всей призмы в 4 раза (так как и высота и основание треугольника уменьшились в 2 раза). Высота осталась прежней, следовательно, объем уменьшился в 4 раза.

Ответ: 8.

9. 9. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсеченной треугольной призмы равен 5.



Решение.

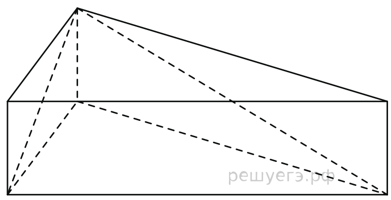
Площадь основания отсеченной части меньше площади основания всей призмы в 4 раза (так как и высота и основание треугольника уменьшились в 2 раза). Высоты обеих частей призмы одинаковы, поэтому объем отсеченной части в 4 раза меньше объема целой призмы. Тем самым, он равен 20.

Ответ: 20.

10. 10. От треугольной призмы, объем которой равен 6, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.

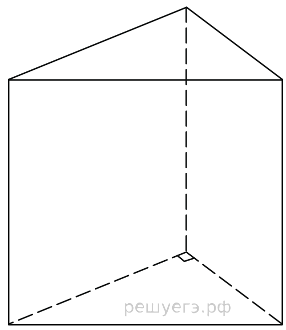
Решение.

Объем призмы больше объема пирамиды с такой же площадью основания и высотой в 3 раза. Объем оставшейся части составляет тогда две трети исходного, он равен 4.



Ответ: 4.

11. 11. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, высота призмы равна 10. Найдите площадь ее поверхности.



Решение.

Третья сторона треугольника в основании равна 10 и его площадь $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. Площадь боковой поверхности призмы с периметром основания P равна

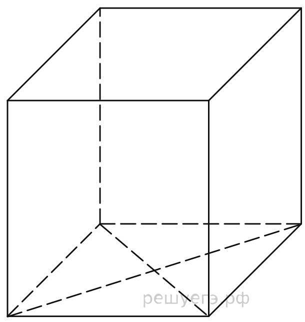
$$S_{\text{бок}} = Ph = 24 \cdot 10 = 240.$$

Полная площадь поверхности:

$$S = 2S_\Delta + S_{\text{бок}} = 48 + 240 = 288.$$

Ответ: 288.

12. 12. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 248. Найдите боковое ребро этой призмы.



Решение.

Сторона ромба a выражается через его диагонали d_1 и d_2 как

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 5.$$

Площадь ромба

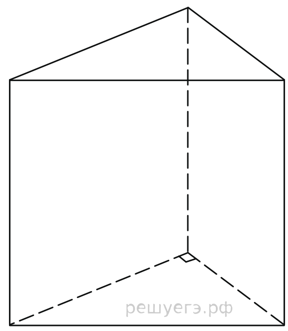
$$S_P = \frac{1}{2}d_1 d_2 = 24.$$

Тогда боковое ребро найдем из выражения для площади поверхности:

$$S = 2S_{\text{ромба}} + 4aH \Leftrightarrow H = \frac{S - 2S_{\text{ромба}}}{4a} = \frac{248 - 48}{20} = 10.$$

Ответ: 10.

13. 13. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.



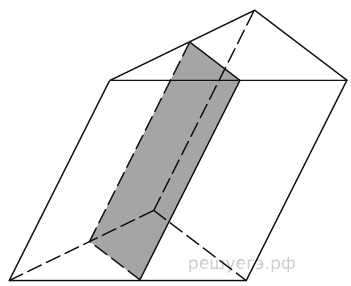
Решение.

Гипотенуза основания равна 10. Площадь основания $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. Высоту найдем из выражения для площади поверхности $S = 2S_\Delta + Ph$:

$$h = \frac{S - 2S_\Delta}{P} = \frac{288 - 48}{24} = 10.$$

Ответ: 10.

14. 14. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 8. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

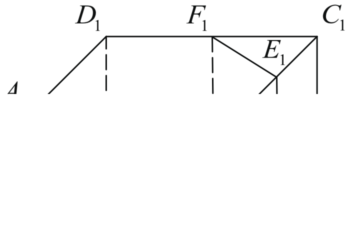


Решение.

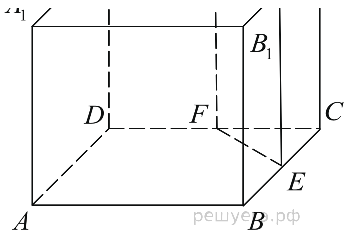
Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра основания на высоту боковой грани. Высота боковой грани у исходной призмы и отсеченной призм совпадает. Поэтому площади боковых граней относятся как периметры оснований. Треугольники в основании исходной и отсеченной призм подобны, все их стороны относятся как 1 : 2. Поэтому периметр основания отсеченной призмы вдвое меньше исходного. Следовательно, площадь боковой поверхности исходной призмы равна 16.

Ответ: 16.

15. 15. Объём куба равен 12. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плос-костью, проходящей через середины двух



рёбер, выходящих из одной вершины, и парал-лельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

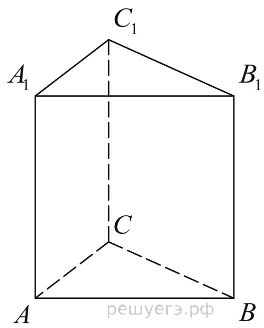


Решение.

Поскольку высота куба равна высоте призмы, их объемы пропорциональны площадям их оснований. Площадь основания построенной призмы в 8 раз меньше площади основания исходной, поэтому искомый объем призмы равен 12 : 8 = 1,5.

Ответ: 1,5.

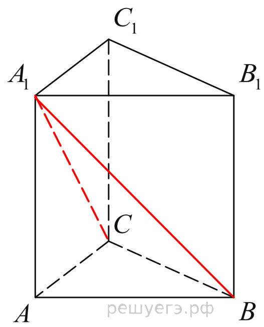
16. 16. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.



Решение.

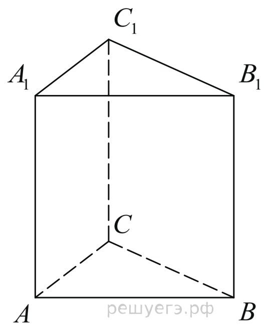
Требуется найти объём пирамиды, основание и высота которой совпадают с основанием и высотой данной треугольной призмы. Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пр}}h_{\text{пр}} = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3 = 2.$$



Ответ: 2.

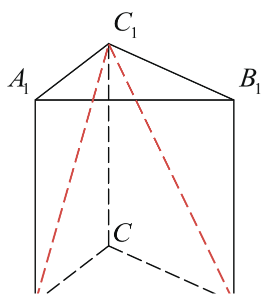
17. 17. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



Решение.

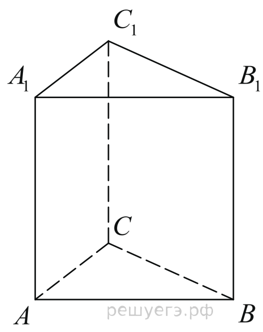
Искомый объём многогранника равен разности объёмов призмы $ABCA_1B_1C_1$ и пирамиды $BA_1B_1C_1$, основания и высоты которых совпадают. Поэтому

$$V_{\text{мног}} = S_{\text{пр}}h_{\text{пр}} - \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}} = 3\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 2 = 4.$$



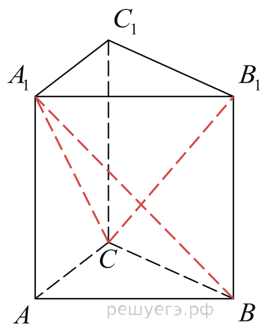
Ответ: 4.

18. 18. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B_1, B, C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



Решение.
Заметим, что искомый объём равен разности объема призмы и двух треугольных пирамид, основания и высоты которых совпадают с основанием и высотой призмы:

$$V_{CA_1B_1B} = V_{\text{пр}} - V_{CA_1B_1C_1} - V_{A_1ABC}.$$

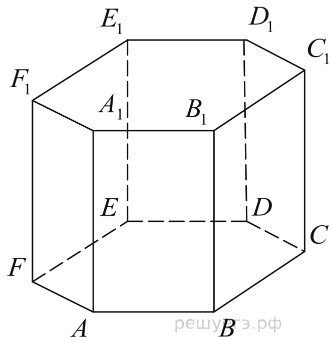


Поэтому

$$V_{CA_1B_1B} = 4\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 3 = 4.$$

Ответ: 4.

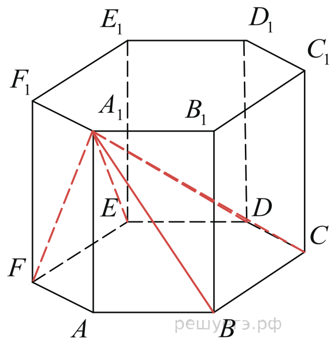
19. 19. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



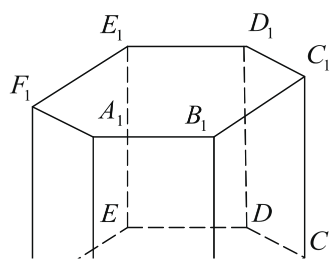
Решение.
Основание пирамиды такое же, как основание правильной шестиугольной призмы, и высота у них общая. Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пр}}h_{\text{пр}} = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 3 = 4.$$

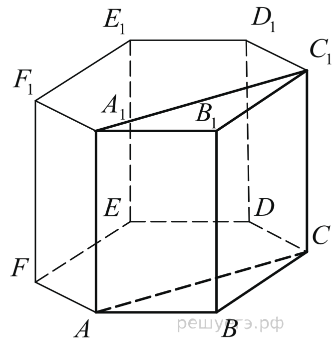
Ответ: 4.



20. 20. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.

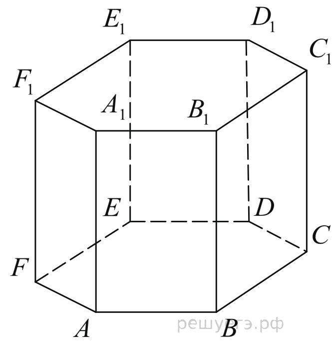


Решение.
Многогранник, объем которого требуется найти, является прямой треугольной призмой. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту. Основанием призмы является треугольник. Площадь правильного шестиугольника в основании равна $6\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$, площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}R\cdot R\sin 120^\circ = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$, следовательно, площадь треугольника ABC равна одной шестой площади основания шестиугольной призмы. Высотой прямой призмы является боковое ребро, его длина равна 3. Таким образом, искомый объем равен $1\cdot 3$.



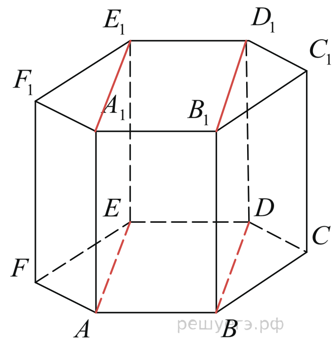
Ответ: 3.

21. 21. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.



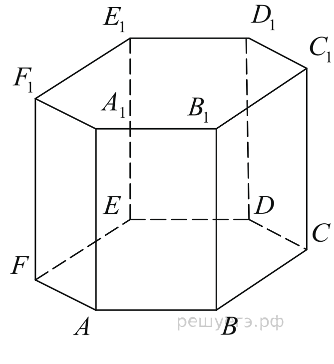
Решение.
Площадь основания четырехугольной призмы равна двум третьим площади основания правильной шестиугольной призмы, а высота у них общая. Поэтому

$$V_{\text{чет}} = \frac{2}{3}V_{\text{шест}} = \frac{2}{3}\cdot 6\cdot 2 = 8.$$

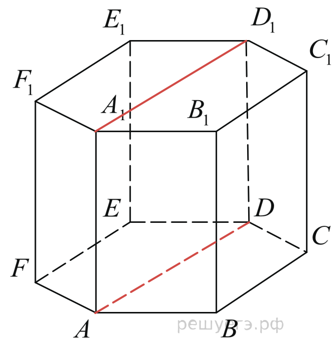


Ответ: 8.

22. 22. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.



Решение.
Площадь основания четырехугольной призмы равна половине площади основания правильной шестиугольной призмы, а высота у них общая. Поэтому



$$V_{\text{чет}} = \frac{1}{2}V_{\text{шест}} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2 = 6.$$

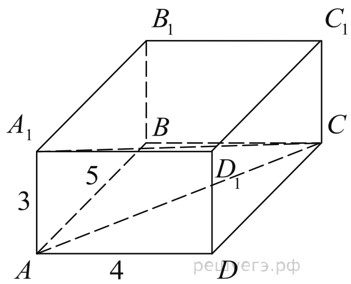
Ответ: 6.

23. 23. Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 6. Какой станет пло-щадь поверхности призмы, если все её рёбра увеличатся в три раза, а форма останется прежней?

Решение.
Площади подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия. Поэтому если все ребра увеличить в три раза, площадь поверхности увеличится в 9 раз. Следовательно, она станет равна 54.

Ответ: 54.

24. 24. Найдите квадрат расстояния между вершинами C и A_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1=3$.



Решение.
Рассмотрим прямоугольный треугольник AA_1C, в котором A_1C является гипотенузой. По теореме Пифагора

$$A_1C^2 = AA_1^2 + AC^2.$$

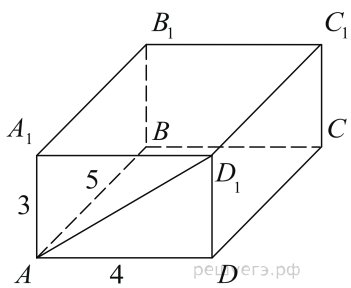
В прямоугольнике $ABCD$ AC – диагональ, $AB=CD$. Значит,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 16 + 25 = 41,$$

$$A_1C^2 = 9 + 41 = 50.$$

Ответ: 50.

25. 25. Найдите расстояние между вершинами A и D_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$.



Решение.

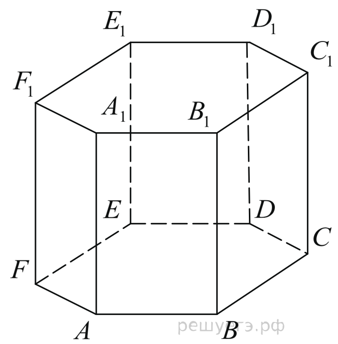
Рассмотрим прямоугольник AA_1D_1D, в котором AD_1 является диагональю, $A_1D_1{=}AD$. По теореме Пифагора

$$AD_1{}^2 = AA_1{}^2 + A_1D_1{}^2 = 9 + 16 = 25.$$

Значит, $AD_1 = 5$.

Ответ: 5.

26. 26. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками B и E.

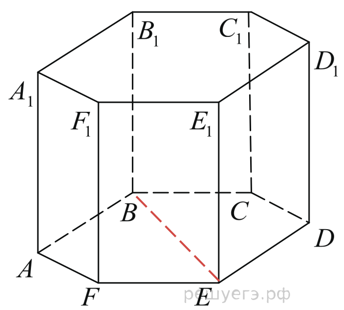


Решение.

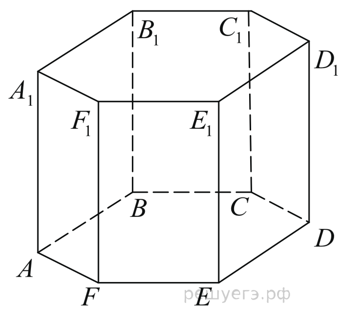
Длина большей диагонали правильного шестиугольника равна его удвоенной стороне. Поэтому

$$BE = 1 \cdot 2 = 2.$$

Ответ: 2.



27. 27. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол DAB. Ответ дайте в градусах.

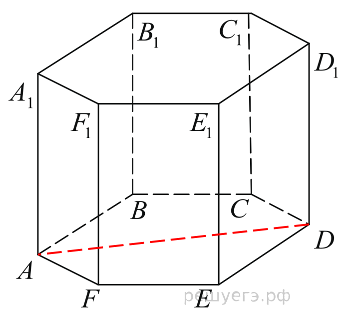


Решение.

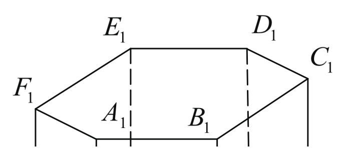
В правильном шестиугольнике углы между сторонами равны $120°$, значит,

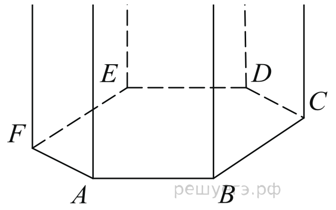
$$\angle DAB = \frac{1}{2}\angle FAB = \frac{1}{2}\cdot 120° = 60°.$$

Ответ: 60.



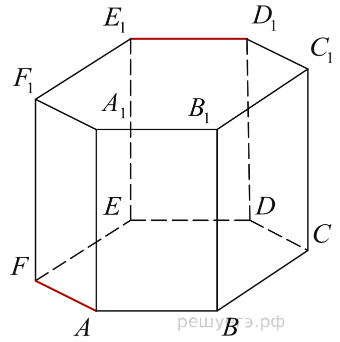
28. 28. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 8, найдите угол между прямыми FA и D_1E_1. Ответ дайте в градусах.





Решение.

Отрезки D_1E_1, DE и AB лежат на параллельных прямых, поэтому искомый угол между прямыми FA и E_1D_1 равен углу между прямыми FA и AB.



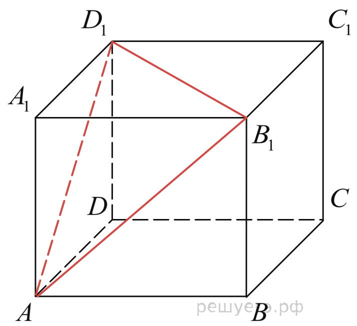
Поскольку угол FAB между сторонами правильного шестиугольника равен 120°, смежный с ним угол между прямыми FA и AB равен 60°.

Ответ: 60.

29. 29. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и B_1D_1. Ответ дайте в градусах.

Решение.

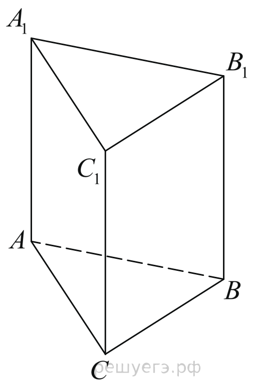
Поскольку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, каждая из его граней является квадратом. Диагонали этих квадратов равны, поэтому $D_1B_1 = B_1A = AD_1$.



Тогда треугольник D_1B_1A — равносторонний, следовательно, искомый угол равен 60°.

Ответ: 60.

30. 30. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 3, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1. Ответ дайте в градусах.

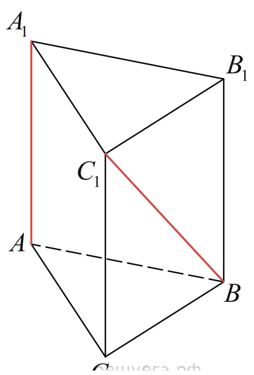


Решение.

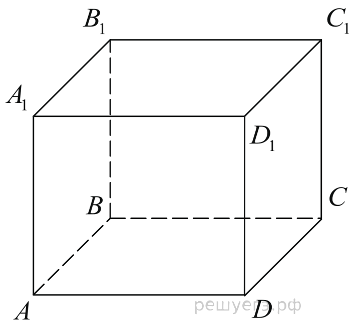
Отрезки A_1A и BB_1 лежат на параллельных прямых, поэтому искомый угол между прямыми A_1A и BC_1 равен углу между прямыми BB_1 и BC_1.

Боковая грань CBB_1C_1 — квадрат, поэтому угол между его стороной и диагональю равен 45°.

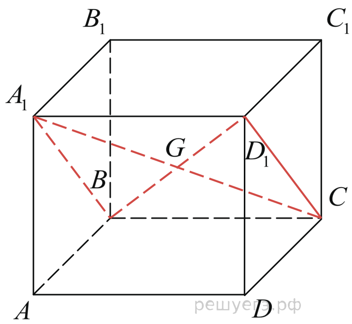
Ответ: 45.



31. 31. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AC_1 = 2BC$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и CA_1. Ответ дайте в градусах.



Решение.
Правильная четырёхугольная призма является прямоугольным параллелепипедом, диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, диагональное сечение является прямоугольником.



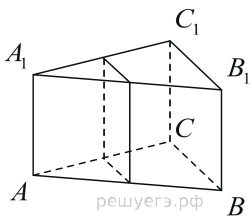
Рассмотрим прямоугольный треугольник A_1BC: в нем катет BC вдвое меньше гипотенузы A_1C, поэтому угол A_1CB равен 60°. Аналогично в треугольнике D_1CB угол D_1BC равен 60°.

Сумма углов треугольника BGC равна 180° получаем, поскольку углы два его угла равны 60°, третий угол тоже равен 60°.

Ответ: 60.

32. 32.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 2, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.



Решение.

Противоположные стороны сечения являются соответственно средними треугольников, лежащих в основании, и прямоугольников, являющихся боковыми гранями призмы. Тем самым, сечение представляет собой прямоугольник со сторонами 1 и 5, площадь которого равна 5.

Ответ: 5.

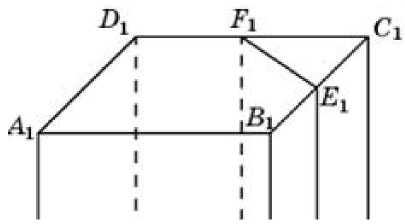
33. 33. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно 15, а диагональ BD_1 равна 17. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A, A_1 и C.

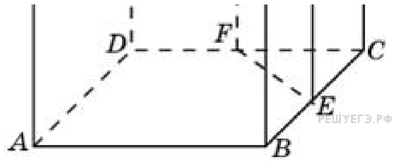
Решение.

Диагональное сечение прямой призмы — прямоугольник AA_1C_1C. Диагонали правильной четырёхугольной призмы равны: $BD_1 = A_1C$. По теореме Пифагора получаем: $AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1{}^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. Тем самым, для искомой площади сечения имеем $S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = 120$.

Ответ: 120.

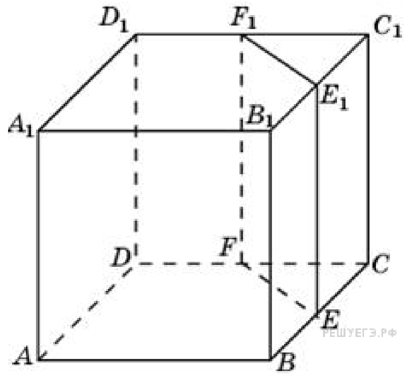
34. 34. Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 2. Найдите объём куба.





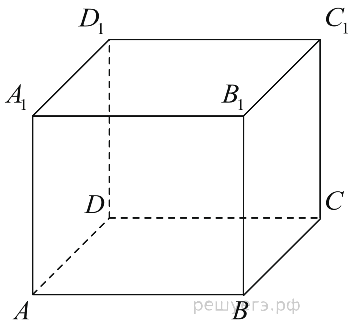
Решение.
Высота отсчённой призмы равна ребру куба, поэтому их объёмы относятся как площади оснований. Отрезок FE — средняя линия треугольника DBC, поэтому треугольники FCE и DCB подобны с коэффициентом подобия $1:2$, а их площади относятся как $1:4$. Поскольку квадрата $ADCB$ вдвое больше площади треугольника DCB, площадь $ADCB$ в 8 раз больше площади треугольника FCE.

Тем самым, объём куба в 8 раз больше объеёма отсечённой призмы, поэтому он равен 16.



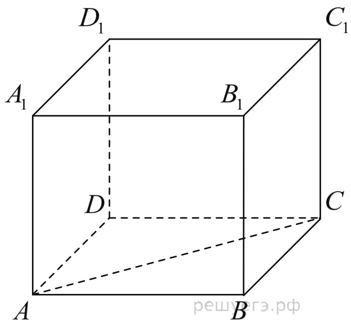
Ответ: 16.

35. 35. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 9$, $AD = 12$, $AA_1 = 18$. Найдите синус угла между прямыми A_1D_1 и AC.



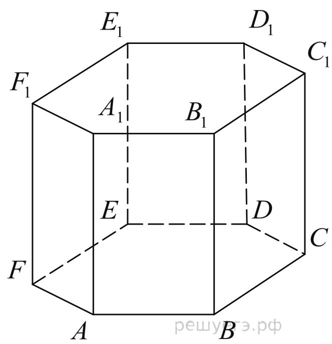
Решение.
Отрезок $A_1D_1 = AD$. Тогда синус угла между прямыми A_1D_1 и AC равен синусу угла $\widehat{DAC}$:

$$\frac{CD}{AC}=\frac{AB}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\frac{9}{\sqrt{81+144}}=\frac{9}{15}=0,6.$$

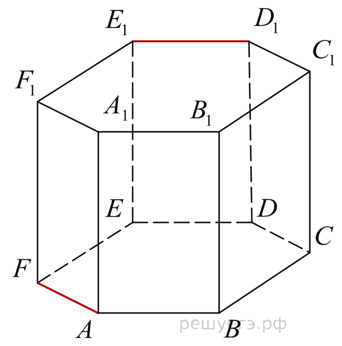


Ответ:0,6.

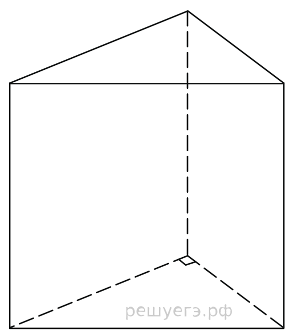
36. 36. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 5, найдите угол между прямыми FA и D_1E_1. Ответ дайте в градусах.



Решение.
В силу параллельности прямых AB и E_1D_1, угол между FA и E_1D_1 равен углу между прямыми FA и AB. Угол FAB между смежными сторонами правильного шестиугольника равен 120°. Значит, угол между прямыми FA и AB равен углу, смежному с углом FAB, т. е. 60°.



37. 37. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объем призмы равен 30. Найдите ее боковое ребро.

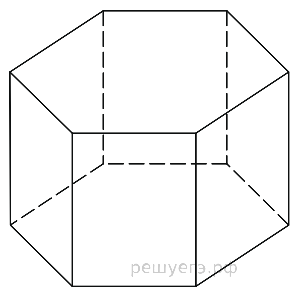


Решение.
Объем прямой призмы равен $V = Sh$ где S – площадь основания, а h – боковое ребро. Тогда длина ее бокового ребра равна

$$h = \frac{V}{S} = \frac{30}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5} = 4.$$

Ответ: 4.

38. 38. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.



Решение.
Объем прямой призмы равен $V = Sh$, где S — площадь основания, а h — боковое ребро. Площадь правильного шестиугольника со стороной a, лежащего в основании, задается формулой

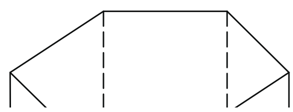
$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

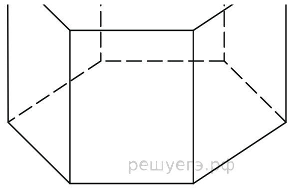
Тогда объем призмы равен

$$V = Sh = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

39. 39. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны $\sqrt{3}$.





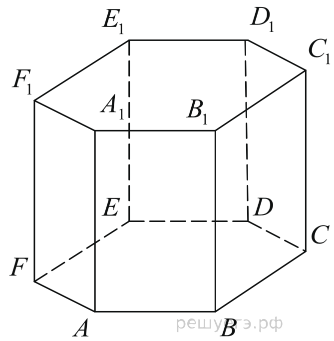
Решение.

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту. Высотой правильной призмы является ее боковое ребро. Основание призмы — правильный шестиугольник. Площадь правильного шестиугольника со стороной a вычисляется по формуле $S = 1,5\sqrt{3}a^2$. Следовательно,

$$V = S_{\text{осн}}H = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{2}a^2 = \frac{27}{2} = 13,5.$$

Ответ: 13,5.

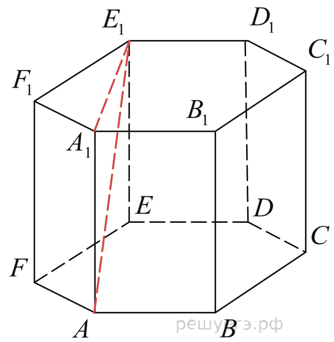
40. 40. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками A и E_1.



Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AA_1E_1. По теореме Пифагора

$$AE_1 = \sqrt{AA_1{}^2 + A_1E_1{}^2}.$$



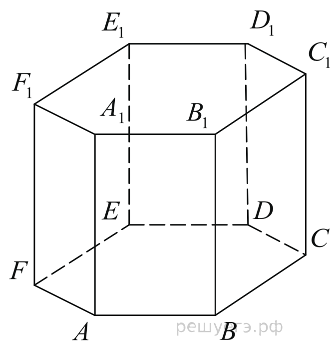
Угол между сторонами правильного шестиугольника равен $120°$. По теореме косинусов

$$A_1E_1 = \sqrt{A_1F_1{}^2 + F_1E_1{}^2 - 2A_1F_1 \cdot F_1E_1 \cdot \cos 120°} = \sqrt{3}.$$

Значит, $AE_1 = \sqrt{1+3} = 2$.

Ответ: 2.

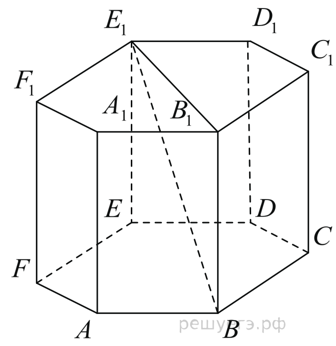
41. 41. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны $\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1.



Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BB_1E_1. По теореме Пифагора:

$$BE_1 = \sqrt{BB_1{}^2 + B_1E_1{}^2}.$$

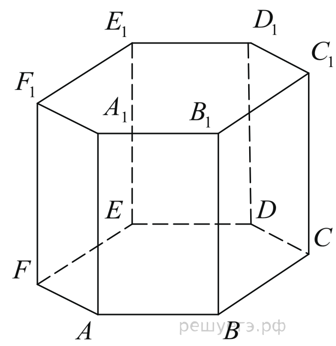


B_1E_1 — большая диагональ правильного шестиугольника, ее длина равна его удвоенной стороне. Поэтому $B_1E_1 = 2\sqrt{5}$. Поскольку $BB_1 = \sqrt{5}$ имеем:

$$BE_1 = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{5 + 4 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: 5.

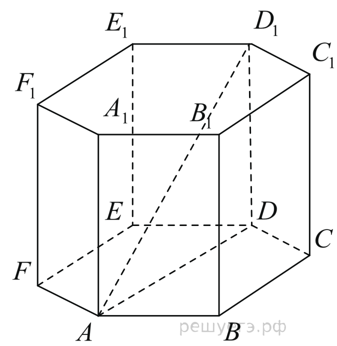
42. 42. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите тангенс угла AD_1D.



Решение.

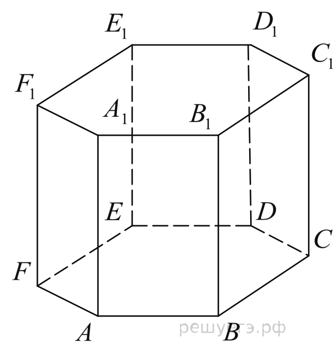
Рассмотрим прямоугольный треугольник ADD_1, катет которого является большей диагональю основания. Длина большей диагонали правильного шестиугольника равна его удвоенной стороне: $AD = 2$. Поскольку $DD_1 = 1$ имеем:

$$\operatorname{tg}\angle AD_1D = \frac{AD}{DD_1} = \frac{2}{1} = 2.$$



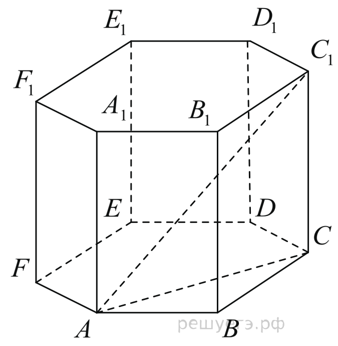
Ответ: 2.

43. 43. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол AC_1C. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACC_1:



$$\operatorname{tg}\angle AC_1C = \frac{AC}{CC_1} = AC.$$

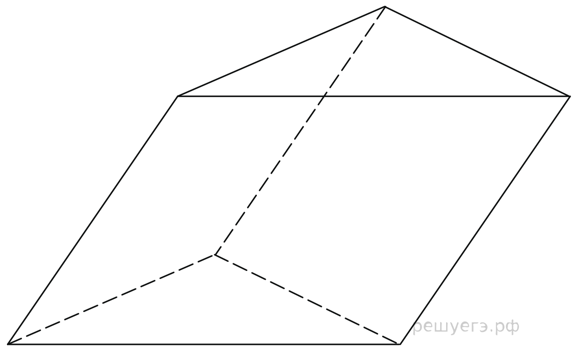
Осталось найти диагональ основания. В правильном шестиугольнике углы между сторонами равны 120°, тогда по теореме косинусов для треугольника ABC имеем:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}.$$

Так как $\angle AC_1C$ — острый, он равен 60°.

Ответ: 60.

44. 44. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 и отстоит от других боковых ребер на 6 и 8. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.



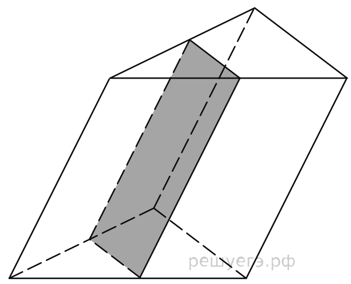
Решение.

Для вычисления боковой поверхности призмы воспользуемся формулой , где l – длина бокового ребра, а $P_\perp$ – периметр перпендикулярного сечения призмы:

$$S_{\text{бок}} = l \cdot P_\perp = 10 \cdot (10 + 6 + 8) = 240.$$

Ответ: 240.

45. 45. Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите пло-щадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.

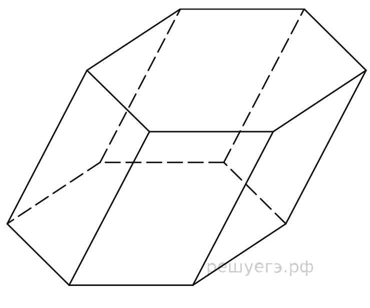


Решение.

Площадь боковых граней отсеченной призмы вдвое меньше соответствующих площадей боковых граней исходной призмы. Поэтому площадь боковой поверхности отсеченной призмы вдвое меньше площади боковой поверхности исходной.

Ответ: 12.

46. 46. Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30°.



Решение.

Объем призмы $V = Sh = SL\sin\alpha,$ где S – площадь основания, а L – длина ребра, составляющего с основанием угол α. Площадь правильного шестиугольника со стороной a равна

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Тогда объем призмы

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 18.$$

Ответ: 18.