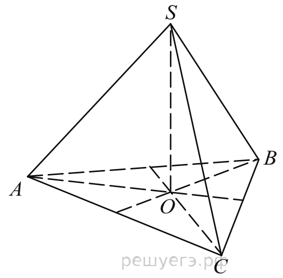
Пирамида

1. 1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.



Решение.

Отрезок OS высота треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO.$$

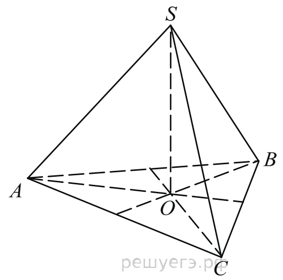
Таким образом,

$$SO = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9.$$

Ответ: 9.

2. 2.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 9; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.



Решение.

Отрезок OS является высотой треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

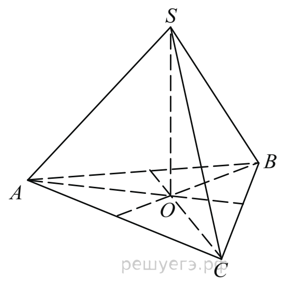
$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO.$$

Таким образом,

$$SO = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 6}{9} = 2.$$

Ответ: 2.

3. 3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 5. Найдите длину отрезка OS.



Решение.
отрезок OS высотой треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

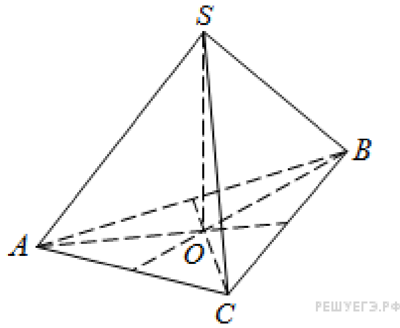
$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SO.$$

Таким образом,

$$SO=\frac{3V}{S_{ABC}}=\frac{3\cdot 5}{2}=7,5.$$

Ответ: 7,5.

4. 4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 4. Найдите длину отрезка OS.



Решение.
Отрезок OS является высотой треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

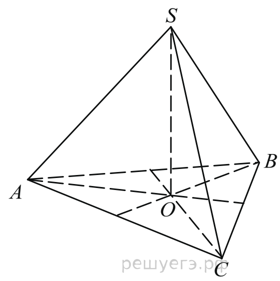
$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SO.$$

Таким образом,

$$SO=\frac{3V}{S_{ABC}}=\frac{3\cdot 4}{2}=6.$$

Ответ: 6.

5. 5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 4; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.



Решение.
отрезок OS высотой треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

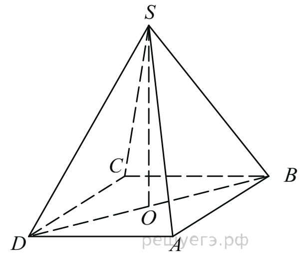
$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SO.$$

Таким образом,

$$SO=\frac{3V}{S_{ABC}}=\frac{3\cdot 6}{4}=4,5.$$

Ответ: 4,5.

6. 6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 15$, $BD = 16$. Найдите боковое ребро SA.



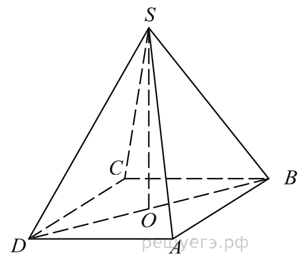
Решение.

В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SA = SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{225 + 64} = 17.$$

Ответ: 17.

7. 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SB = 13$, $AC = 24$. Найдите длину отрезка SO.



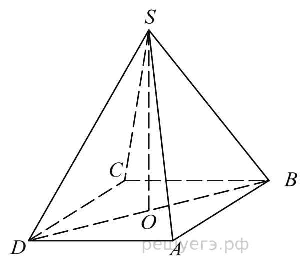
Решение.

в правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$$

Ответ: 5.

8. 8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 8$, $BD = 30$. Найдите боковое ребро SC.



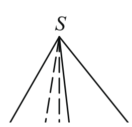
Решение.

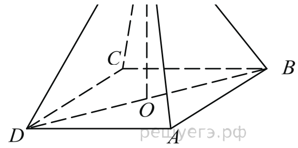
в правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SA = SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{64 + 225} = 17.$$

Ответ: 17.

9. 9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SD = 10$, $SO = 6$. Найдите длину отрезка AC.





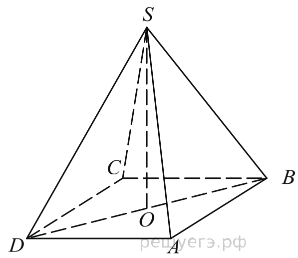
Решение.

В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно, SO является высотой пирамиды. Тогда по теореме Пифагора

$$AC = 2AO = 2OD = 2\sqrt{SD^2 - SO^2} = 2\sqrt{100-36} = 16.$$

Ответ: 16.

10. 10. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO=12, BD=18. Найдите боковое ребро SA.



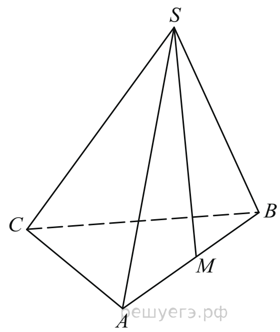
Решение.

в правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SA = SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{144+81} = 15.$$

Ответ: 15.

11. 11. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M – середина ребра AB, S – вершина. Известно, что $BC = 3$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 45. Найдите длину отрезка SM.



Решение.

Найдем площадь грани SAB:

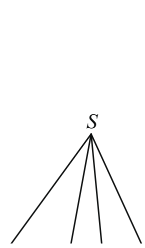
$$S_{SAB} = \frac{S_{\text{бок}}}{3} = \frac{45}{3} = 15.$$

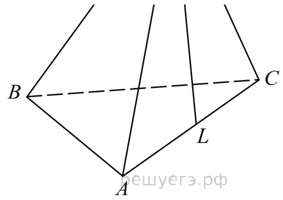
Отрезок SM является медианой правильного треугольника SAB, а значит, его высотой. Тогда

$$SM = \frac{2S_{SAB}}{AB} = \frac{2S_{SAB}}{BC} = \frac{2 \cdot 15}{3} = 10.$$

Ответ: 10.

12. 12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L — середина ребра AC, S — вершина. Известно, что $BC = 6$, а $SL = 5$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.





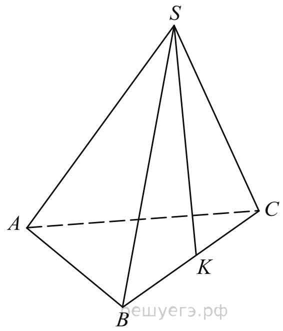
Решение.

Отрезок SL является медианой правильного треугольника SAC, а значит, и его высотой. Боковые грани пирамиды равны, поэтому

$$S_{\text{бок}} = 3S_{SAC} = 3\cdot\frac{1}{2}AC\cdot SL = \frac{3}{2}BC\cdot SL = \frac{3}{2}\cdot 6\cdot 5 = 45.$$

Ответ: 45.

13. 13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC, S – вершина. Известно, что $SK = 4$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 54. Найдите длину ребра AC.



Решение.

Найдем площадь грани SBC:

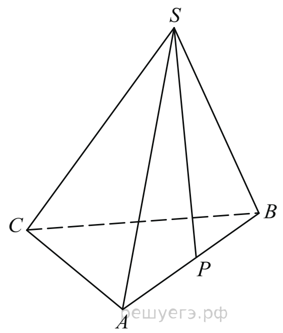
$$S_{SBC} = \frac{S_{\text{бок}}}{3} = \frac{54}{3} = 18.$$

Отрезок SK является медианой равнобедренного треугольника SBC, а значит, и его высотой. Тогда

$$AC = BC = \frac{2S_{SAB}}{SK} = \frac{2\cdot 18}{4} = 9.$$

Ответ: 9.

14. 14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ P – середина ребра AB , S – вершина. Известно, что BC=5, а SP=6. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



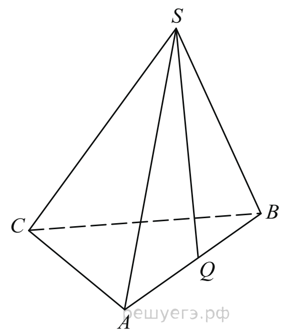
Решение.

Отрезок SP является медианой равнобедренного треугольника SAB, а значит, и его высотой. Тогда

$$S_{\text{бок}} = 3S_{SAB} = \frac{3}{2}AB\cdot SP = \frac{3}{2}\cdot 6\cdot 5 = 45.$$

Ответ: 45.

15. 15. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ Q – середина ребра AB, S – вершина. Известно, что BC=7, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 42. Найдите длину отрезка SQ.



Решение.

Найдем площадь грани SAB:

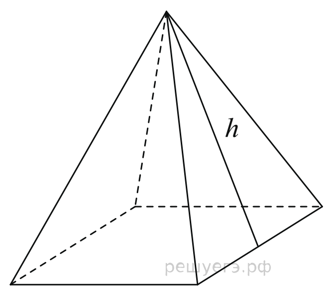
$$S_{SAB}=\frac{S_{\text{бок}}}{3}=\frac{42}{3}=14.$$

Отрезок SQ является медианой правильного треугольника SAB, а значит, и его высотой. Тогда

$$SQ=\frac{2S_{SAB}}{AB}=\frac{2S_{SAB}}{BC}=\frac{2\cdot 14}{7}=4.$$

Ответ: 4.

16. 16. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Решение.

Площадь пирамиды равна

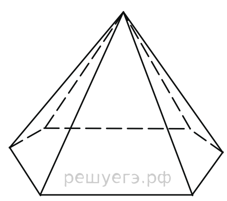
$$S=S_{\text{бок}}+S_{\text{осн}}=ph+a^2.$$

Полупериметр основания p = 20, апофему h найдем по теореме Пифагора: $h=\sqrt{13^2-5^2}=12$. Тогда площадь поверхности пирамиды

$$S=20\cdot 12+10^2=340.$$

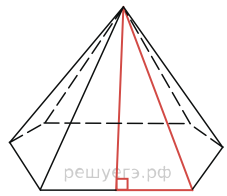
Ответ: 340.

17. 17. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Решение.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему. Апофему найдем по теореме Пифагора как катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого — боковое ребро, а другой катет — половина стороны основания: $h=\sqrt{13^2-5^2}=12$. Тогда площадь боковой поверхности

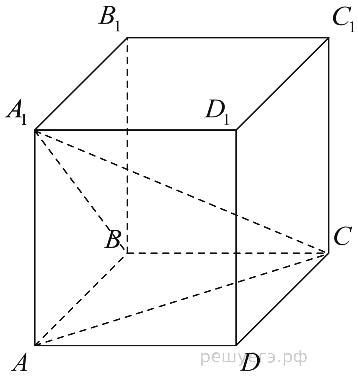


$$S=\frac{1}{2}Ph=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 6\cdot 12=360.$$

Ответ: 360.

18. 18.

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 9. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCA_1$.



Решение.

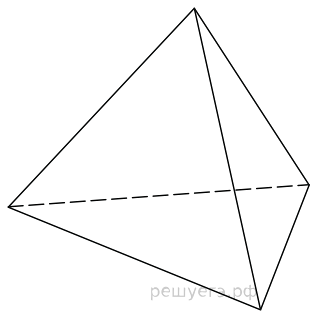
Объем параллелепипеда равен $V=Sh$, где S – площадь основания, h – высота. Объем пирамиды равен

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta}h,$$

где S_{Δ} – площадь основания пирамиды, по построению равная половине площади основания параллелепипеда. Тогда объем пирамиды в 6 раз меньше объема параллелепипеда.

Ответ: 1,5.

19. 19. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



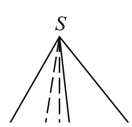
Решение.

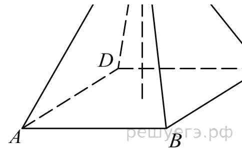
Объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому если все ребра увеличить в 2 раза, объём увеличится в 8 раз.

Это же следует из формулы для объёма правильного тетраэдра $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, где a — длина его ребра.

Ответ: 8.

20. 20. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.





Решение.
Объем пирамиды равен

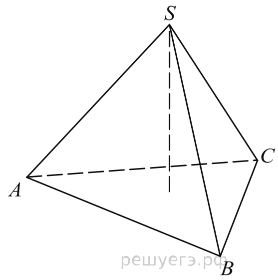
$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S — площадь основания, а h — высота пирамиды. Зная площадь основания, можно найти высоту:

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{48}{12} = 4.$$

Ответ: 4.

21. 21. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.



Решение.
Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S — площадь основания, а h — высота пирамиды. Найдём площадь равностороннего треугольника, лежащего в основании:

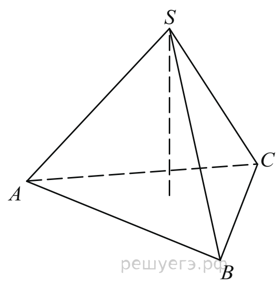
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

Тогда объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 0,25.

22. 22. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объем равен $\sqrt{3}$.



Решение.

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S — площадь основания, а h — высота пирамиды. Найдем площадь равностороннего треугольника, лежащего в основании:

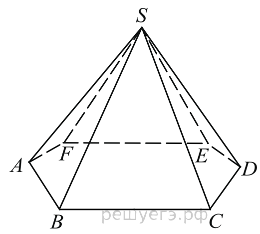
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3}.$$

Тогда высота пирамиды равна

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3.$$

Ответ: 3.

23. 23. Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?



Решение.

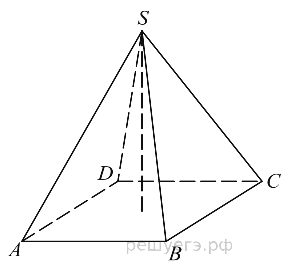
Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S — площадь основания, а h — высота пирамиды. При увеличении высоты в 4 раза объем пирамиды также увеличится в 4 раза.

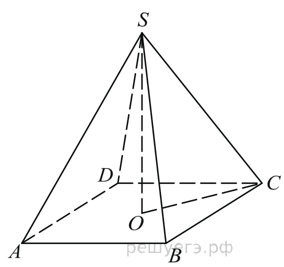
Ответ: 4.

24. 24. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.



Решение.

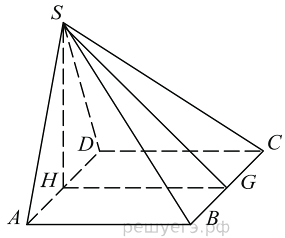
В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат. Пусть его центр — точка O, по теореме Пифагора находим $OC = \sqrt{SC^2 - SO^2} = 8$, тогда длина диагонали основания равна 16. Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей, поэтому она равна 128. Следовательно, для объема пирамиды имеем:



$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 128 \cdot 6 = 256.$$

Ответ: 256.

25. 25. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.



Решение.

Поскольку боковые грани *SAB*, *SDC* и *SBC* наклонены к основани. под углом 60°, углы *A* и *D* в треугольнике *ASD* и угол *G* в треугольнике *SGH* равны 60°.

Поэтому треугольник *ASD* — равносторонний, а его сторона связана с высотой формулой $AD=\frac{2}{\sqrt{3}}SH$, откуда $AD=4\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника *SHG* находим:

$$HG=SH\operatorname{ctg}\angle SGH=6\operatorname{ctg}60^\circ=2\sqrt{3}.$$

Поскольку *ABCD* — прямоугольник, его площадь равна произведения сторон:

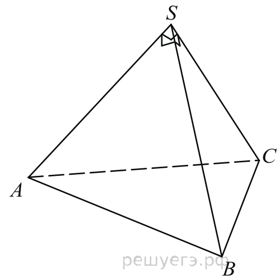
$$S_{ABCD}=AD\cdot AB=AD\cdot HG=4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=24.$$

Осталось найти объём пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SH=\frac{1}{3}\cdot 24\cdot 6=48.$$

Ответ: 48.

26. 26. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



Решение.

Удобно считать треугольник *ASB* основанием пирамиды, тогда отрезок *SC* будет являться её высотой. Заметим, что

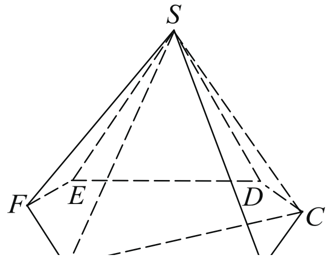
$$S_{ASB}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}.$$

Поскольку $SC=3$, далее имеем:

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}S_{ASB}\cdot SC=4,5.$$

Ответ: 4,5.

27. 27. Объем треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF*, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

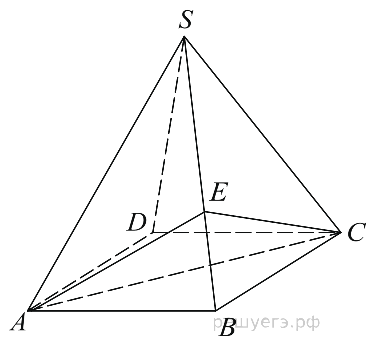


Решение.

Данные пирамиды имеют общую высоту, поэтому их объемы соотносятся как площади их оснований. Площадь правильного шестиугольника со стороной a равна $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Площадь же равнобедренного треугольника ACB с боковой стороной a и углах при основании 30° равна $S_\Delta=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Получаем, что площадь шестиугольника больше площади треугольника ACB в $\frac{S}{S_\Delta}=6$ раз и равна 6.

Ответ: 6.

28. 28. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12. Точка E — середина ребра SB. Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.

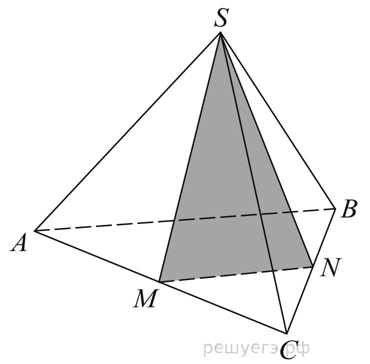


Решение.

Площадь основания пирамиды $EABC$ в 2 раза меньше площади основания пирамиды $SABCD$, и ее высота в 2 раза меньше высоты пирамиды $SABCD$ (т. к. точка E — середина ребра SB). Поскольку объем пирамиды равен $V=\frac{1}{3}Sh$, объем данной треугольной пирамиды в 4 раза меньше объема пирамиды $SABCD$. Тем самым, он равен 3.

Ответ: 3.

29. 29. От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



Решение.

Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}Sh$. Площадь основания отсеченной части меньше в 4 раза (так как высота и сторона треугольника в основании меньше исходных в 2 раза), поэтому и объем оставшейся части меньше в 4 раза. Тем самым, он равен 3.

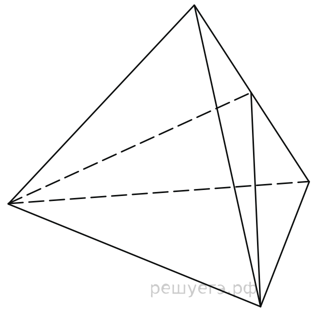
Ответ: 3.

30. 30. Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

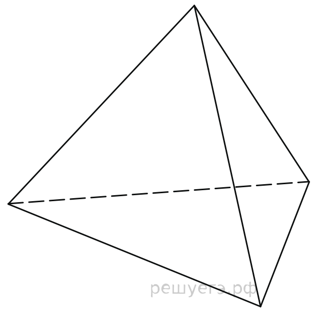
Решение.

При одинаковой площади основания большим объемом будет обладать та часть, высота которой больше, то есть нижняя. Объем данной пирамиды относится к объему исходной как 2/3, поэтому равен 10.

Ответ: 10.



31. 31. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



Решение.

Площадь поверхности тетраэдра равна сумме площадей его граней, которые равны $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Поэтому при увеличении ребер вдвое, площадь поверхности увеличится в 4 раза.

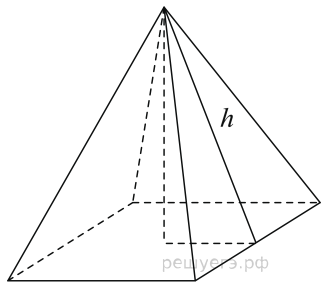
Ответ: 4.

32. 32. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и высота равна 4.

Решение.

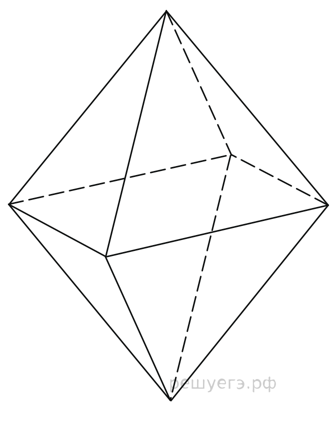
Площадь поверхности складывается из площади основания и площади четырех боковых граней: $S=S_{\text{осн}}+4S_{\Delta}$. Апофему найдем по теореме Пифагора: $h=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Тогда площадь поверхности пирамиды:

$$S=6\cdot 6+4\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=96.$$



Ответ: 96.

33. 33. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?

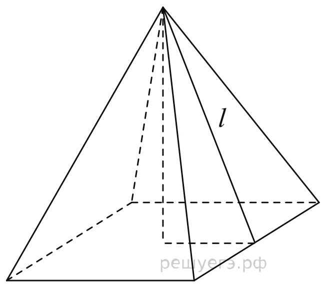


Решение.

При увеличении ребер в 3 раза площади треугольников, образующих грани октаэдра, увеличатся в 9 раз, поэтому суммарная площадь поверхности также увеличится в 9 раз.

Ответ: 9.

34. 34. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 и высота равна 4.



Решение.

Высоту треугольника, образующего грани пирамиды, найдем по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Тогда площадь боковой поверхности пирамиды:

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot \frac{1}{2} al = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60.$$

Ответ: 60.

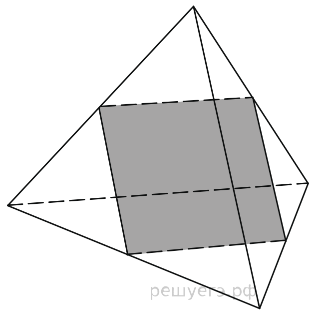
35. 35. Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 2 раза?

Решение.

Площади подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия. Поэтому, если все ребра увеличены в 2 раза, площадь поверхности увеличится в 4 раза.

Ответ: 4.

36. 36. Ребра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.

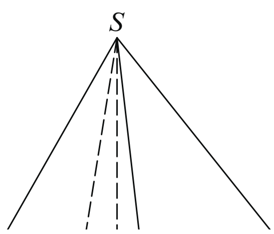


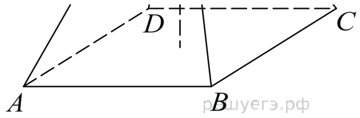
Решение.

В правильном тетраэдре скрещивающиеся ребра перпендикулярны. Каждая сторона сечения является средней линией соответствующей грани, которая, как известно, в 2 раза меньше параллельной ей стороны и равна поэтому 0,5. Значит сечением является квадрат со стороной 0,5. Тогда площадь сечения $S = a^2 = 0,25$.

Ответ: 0,25.

37. 37. Найдите объем пирамиды, высота которой равна 6, а основание – прямоугольник со сторонами 3 и 4.





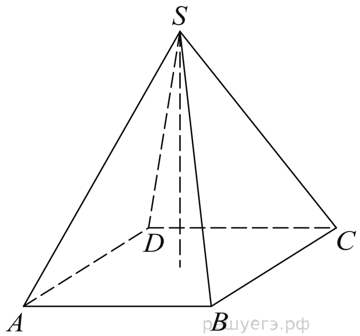
Решение.

Объем пирамиды с площадью основания S и высотой h равен

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}3\cdot4\cdot6=24.$$

Ответ: 24.

38. 38. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12, объем равен 200. Найдите боковое ребро этой пирамиды.



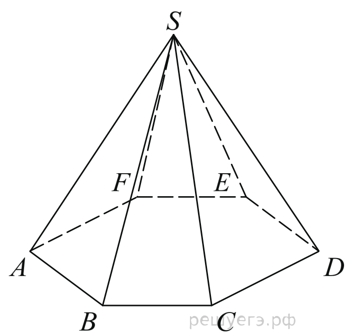
Решение.

Объем пирамиды с площадью основания S и высотой h равен $V=\frac{1}{3}Sh$, откуда площадь основания $S=\frac{3V}{h}=50$.Сторона основания тогда $a=\sqrt{S}=5\sqrt{2}$, а диагональ $d=a\sqrt{2}=10$. Боковое ребро найдем по теореме Пифагора:

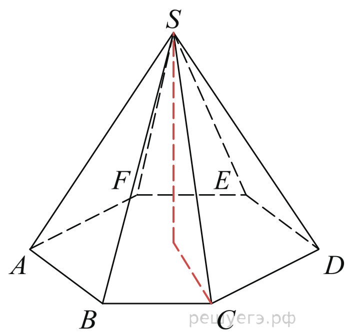
$$l=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+h^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13.$$

Ответ: 13.

39. 39. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объем пирамиды.



Решение.
В правильном шестиугольнике сторона равна радиусу описанной окружности, поэтому найдем высоту пирамиды по теореме Пифагора: $h=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$. Площадь основания



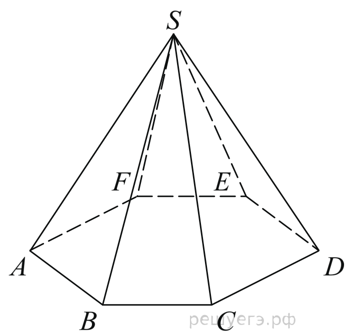
$$S=6\sqrt{3}\cdot\frac{a^2}{4}=6\sqrt{3}.$$

Тогда объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot6\sqrt{3}=12.$$

Ответ: 12.

40. 40. Объем правильной шестиугольной пирамиды 6. Сторона основания равна 1. Найдите боковое ребро.



Решение.

Площадь основания равна

$$S=6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Из формулы для объема пирамиды найдем высоту:

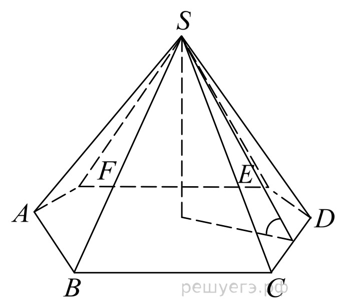
$$V=\frac{1}{3}Sh\Rightarrow h=\frac{3V}{S}=\frac{3\cdot6}{\frac{3}{2}\sqrt{3}}=4\sqrt{3}.$$

В правильном шестиугольнике сторона равна радиусу описанной окружности, поэтому найдем боковое ребро пирамиды по теореме Пифагора:

$$l=\sqrt{h^2+a^2}=\sqrt{48+1}=7.$$

Ответ: 7.

41. 41. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.



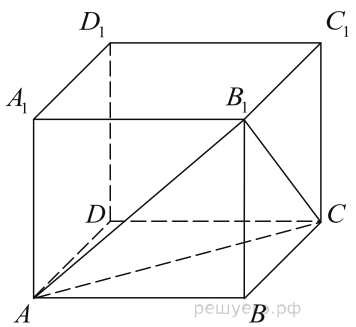
Решение.

Вершина правильной пирамиды проектируется в центр ее основания. В правильном шестиугольнике со стороной a расстояние от его центра до стороны равно радиусу вписанной окружности, который равен $\frac{\sqrt{3}}{2}a = 2\sqrt{3}$. Так как угол между боковой гранью и основанием равен 45°, высота пирамиды также равна $h = 2\sqrt{3}$. Тогда имеем:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{3} = 48.$$

Ответ: 48.

42. 42. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12. Найдите объем треугольной пирамиды B_1ABC.



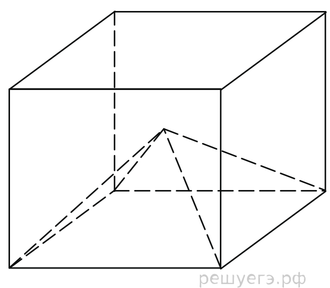
Решение.

Объем параллелепипеда равен $V_{\text{пар}} = S_{\text{пар}}H_{\text{пар}}$, а объем пирамиды равен $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}H_{\text{пир}}$. Высота пирамиды равна высоте параллелепипеда, а ее основание вдвое меньше, поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}H_{\text{пир}} = \frac{1}{3}\frac{S_{\text{пар}}}{2}H_{\text{пар}} = \frac{1}{6}S_{\text{пар}}H_{\text{пар}} = \frac{1}{6}\cdot 12 = 2.$$

Ответ: 2.

43. 43. Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.



Решение.

Объем пирамиды равен

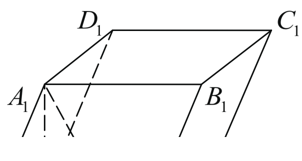
$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}a^2\frac{a}{2} = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{6}V_{\text{куба}} = 2.$$

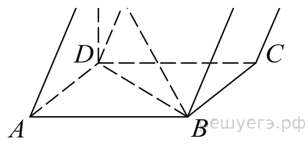
Ответ: 2.

Примечание.

Куб состоит из 6 таких пирамид, объем каждой из них равен 2.

44. 44. Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.





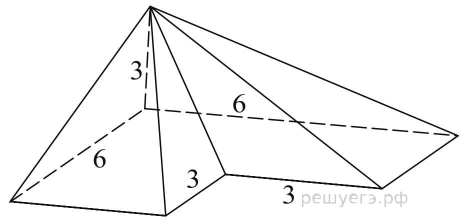
Решение.

Объем параллелепипеда равен $V = Sh$, где S – площадь основания, h – высота. Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3}S_\Delta h$, где S_Δ – площадь основания пирамиды, равная половине площади основания параллелепипеда. Тогда объем параллелепипеда в 6 раз больше объема пирамиды $ABDA_1$.

Ответ: 18.

45. 45.

Найдите объем пирамиды, изображенной на рисунке. Ее основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 3.



Решение.

Площадь лежащего в основании пирамиды многоугольника является разностью площадей квадратов со сторонами 6 и 3 (см. рис.):

$$S_{\text{осн}} = 6^2 - 3^2 = 27.$$

Поскольку высота пирамиды равна 3, имеем:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \frac{1}{3}\cdot 27\cdot 3 = 27.$$

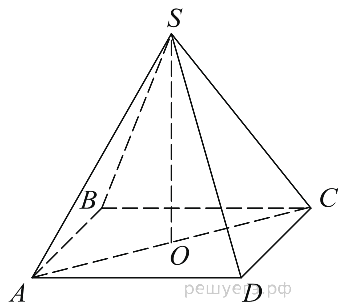
Ответ: 27.

46. 46. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SO = 4$, $AC = 6$. Найдите боковое ребро SC.

Решение.

Рассмотрим треугольник SOC. Он прямоугольный, т. к. SO — высота, она перпендикулярна основанию $ABCD$, а значит, и прямой AC. Тогда по теореме Пифагора

$$SC = \sqrt{SO^2 + \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{16+9} = 5.$$



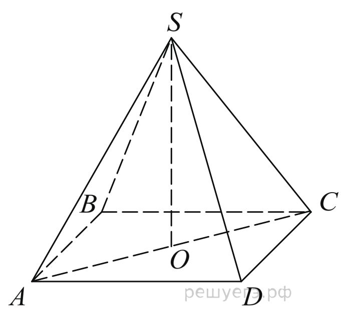
Ответ: 5.

47. 47. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SC = 5$, $AC = 6$. Найдите длину отрезка SO.

Решение.

Рассмотрим треугольник SOC. Он прямоугольный, т. к. SO — высота, она перпендикулярна основанию $ABCD$, а значит и прямой AC. Тогда по теореме Пифагора

$$SO = \sqrt{SC^2 - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{25-9} = 4.$$



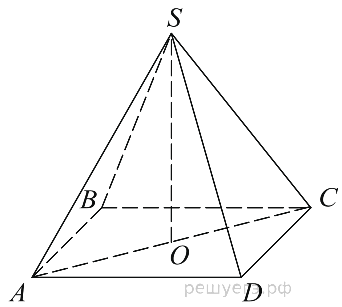
Ответ: 4.

48. 48. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SO = 4$, $SC = 5$. Найдите длину отрезка AC.

Решение.

Рассмотрим треугольник SOC. Он прямоугольный: т. к. SO — высота, она перпендикулярна основанию $ABCD$, а значит и прямой AC. Тогда по теореме Пифагора

$$AC = 2OC = 2\sqrt{SC^2 - SO^2} = 2\sqrt{25 - 16} = 6.$$



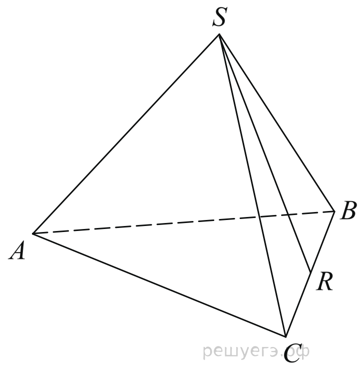
49. 49. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка R — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $AB = 1$, а $SR = 2$. Найдите площадь боковой поверхности.

Решение.

Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot SR = \frac{1}{2} \cdot 3AB \cdot SR = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

Ответ: 3.



50. 50. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка N — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $AB = 1$, а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка SN.

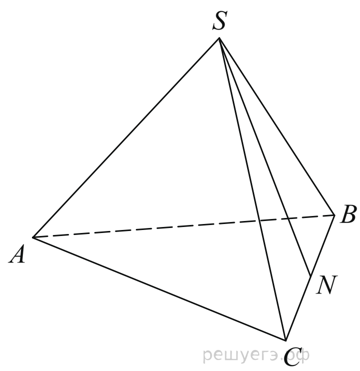
Решение.

Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему: $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot SN$.

Тогда

$$SN = \frac{2S_{\text{бок}}}{P_{ABC}} = \frac{2S_{\text{бок}}}{3AB} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2.$$

Ответ: 2.



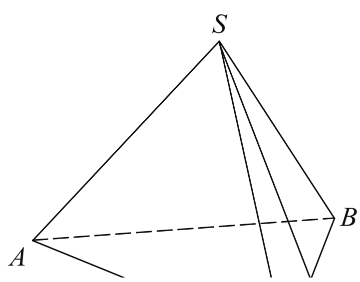
51. 51. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $SL = 2$, а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка AB.

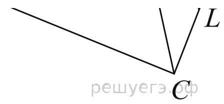
Решение.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению апофемы на полупериметр основания. Поэтому

$$SL \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = 3 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3AB}{2} = 3 \Leftrightarrow AB = 1.$$

Ответ: 1.



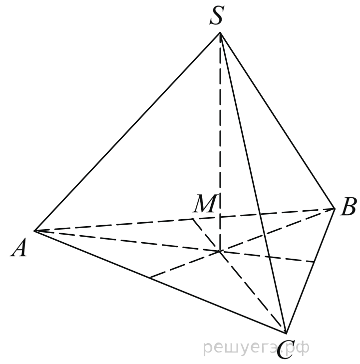


52. 52. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 3, объем пирамиды равен 1. Найдите длину отрезка MS.

Решение.

Основание пирамиды — равносторонний треугольник, поэтому, точка M является центром основания, а MS — высотой пирамиды $SABC$. Ее объем вычисляется по формуле $V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot MS$. Тогда

$$MS=\frac{3V_{SABC}}{S_{\text{осн}}}=\frac{3}{3}=1.$$



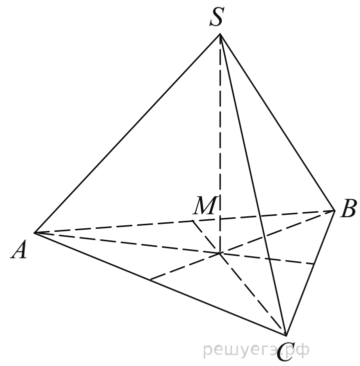
Ответ: 1.

53. 53. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 3, $MS=1$. Найдите объем пирамиды.

Решение.

Основание пирамиды — равносторонний треугольник, поэтому, M является центром основания, а MS — высотой пирамиды $SABC$. Тогда

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot MS=\frac{1}{3}\cdot 3=1.$$



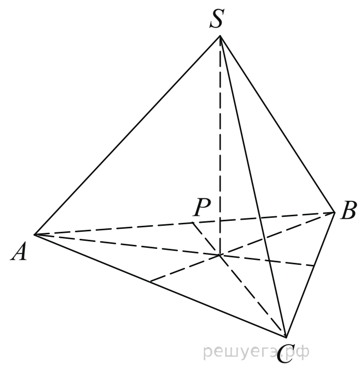
Ответ: 1.

54. 54. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке P. Объем пирамиды равен 1, $PS=1$. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение.

Основание пирамиды — равносторонний треугольник, поэтому, P является центром основания, а SP — высотой пирамиды $SABC$. Ее объем вычисляется по формуле $V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot PS$. Тогда

$$S_{\text{осн}}=\frac{3V_{SABC}}{PS}=3.$$

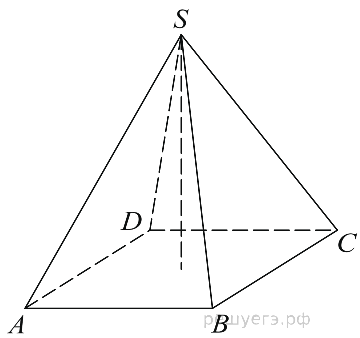


Ответ: 3.

55. 55. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SA равно 5, сторона основания равна $3\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.

Решение.

В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат, вершина пирамиды проецируется в его центр. Введем обозначения, как показано на рисунке. Диагонали квадрата перпендикулярны друг другу, треугольник AHB прямоугольный и равнобедренный. В нем



$$AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 3.$$

Тогда из прямоугольного треугольника SOA находим, что

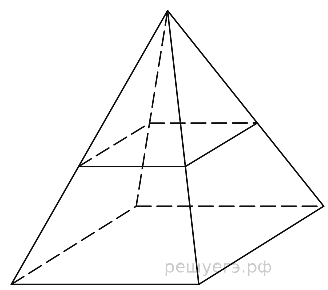
$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{25-9} = 4.$$

Откуда для объема пирамиды имеем:

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \frac{1}{3}AB^2 \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 4 = 24.$$

Ответ: 24.

56. 56. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

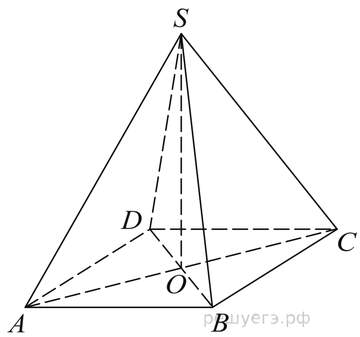


Решение.

Каждая из сторон сечения является средней линией боковой грани. Поэтому стороны сечения образуют квадрат со стороной 0,5, площадь которого равна 0,25.

Ответ: 0,25.

57. 57. Диагональ AC основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 6. Высота пирамиды SO равна 4. Найдите длину бокового ребра SB.



Решение.

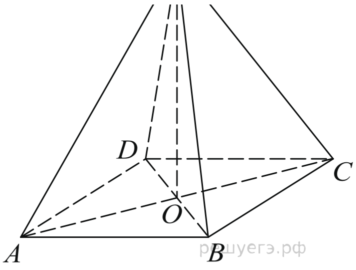
В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. Тогда по теореме Пифагора

$$SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

Ответ: 5.

58. 58.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O − центр основания, S − вершина, $SA = 13$, $BD = 10$. Найдите длину отрезка SO.



Решение.

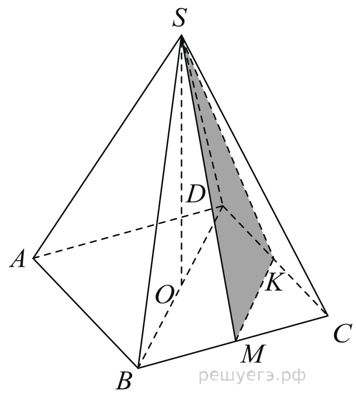
В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно, SO является высотой пирамиды. Тогда по теореме Пифагора

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{169 - 25} = 12.$$

Ответ: 12.

59. 59.

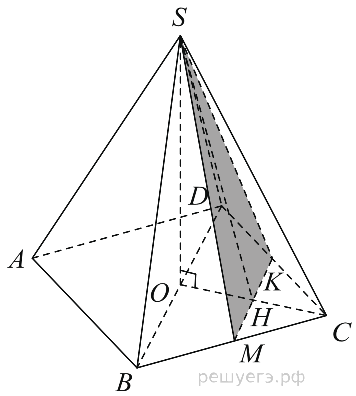
В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота SO равна 13, диагональ основания BD равна *8.* Точки *K* и *M*- середины рёбер CD и BC соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью SMK и плоскостью основания ABC.



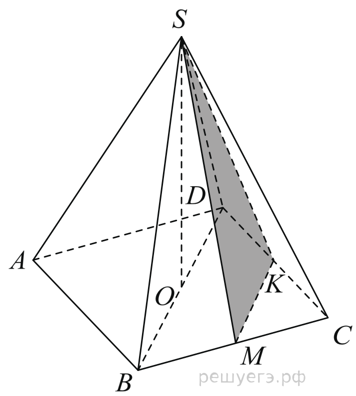
Решение.

Пусть $OC \cap KM = H$. Поскольку $OH = \text{пр}_{ABC}SH$ и $KM \perp OH$ по теореме о трех перпендикулярах $SH \perp KM$. Поскольку $OH \perp KM, SH \perp KM$ угол $\widehat{OHC}$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями SMK и ABC. Тогда $\operatorname{tg}\widehat{OHS} = \frac{SO}{OH} = \frac{SO}{\frac{1}{2}OC} = \frac{13}{2} = 6,5.$

Ответ: 6,5.

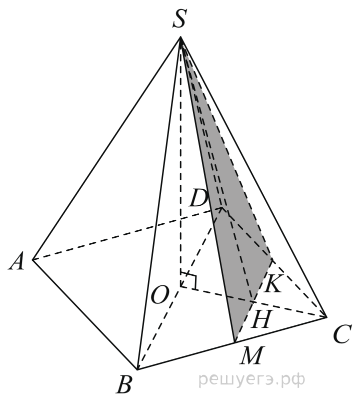


60. 60. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота SO равна 13, диагональ основания BD равна 8. Точки K и M — середины ребер CD и BC соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью SMK и плоскостью основания ABC.



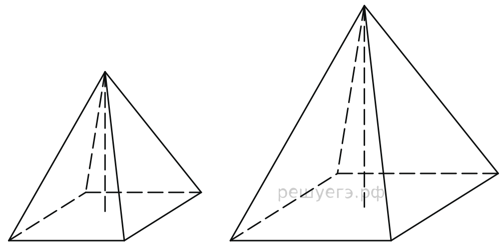
Решение.

Пусть $OC \cap KM = H$. Поскольку $OH = \text{пр}_{ABC} SH$ и $KM \perp OH$ по теореме о трех перпендикулярах $SH \perp KM$. Поскольку $OH \perp KM, SH \perp KM$ угол $\widehat{OHC}$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями SMK и ABC. Тогда $\operatorname{tg}\widehat{OHS} = \frac{SO}{OH} = \frac{SO}{\frac{1}{2}OC} = \frac{13}{2} = 6,5.$



Ответ: 6,5.

61. 61. Даны две правильные четырёхугольные пирамиды. Объём первой пирамиды равен 16. У второй пирамиды высота в 2 раза больше, а сторона основания в 1,5 раза больше, чем у первой. Найдите объём второй пирамиды.



Решение.

Объём пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}a^2h$. Следовательно, отношение объёмов пирамид:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2h_2}{S_1h_1} = \frac{(1,5a_1)^2 \cdot 2h_1}{a^2h_1} = 4,5.$$

Значит, объём второй пирамиды: 16 · 4,5 = 72.

Ответ: 72.

62. 62. В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 22, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $\sqrt{14}$. Найти сторону основания пирамиды.

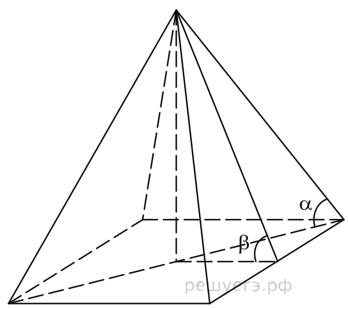
Решение.

Введём обозначения углов как показано на рисунке. Пусть R — длина половины диагонали. В силу связи основных углов в правильной пирамиде:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta/\sqrt{2} = \sqrt{7},$$

поэтому

$$a = \sqrt{2}R = \sqrt{2} \cdot l\cos\alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{22}{\sqrt{8}} = 11.$$

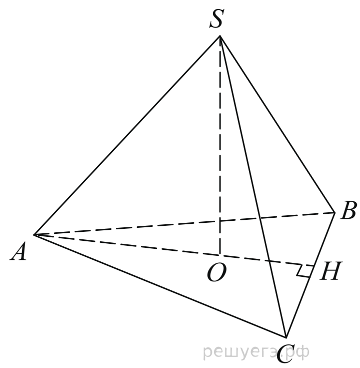


Ответ: 11.

63. 63. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 5, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $0,25\sqrt{11}$. Найти сторону основания пирамиды.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Выразим длину стороны AC через длину боковой стороны AS. Высота правильного треугольника выражается через его сторону: $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AC$. Точкой O высота AH делится в отношении 2:1, поэтому $AO=\frac{2}{3}AH=\frac{\sqrt{3}}{3}AC$, $OH=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AC$. Угол SHO равен углу между боковой гранью и плоскостью основания. Из прямоугольного треугольника SOH :



$$SO=OH\operatorname{tg}\angle SHO=\frac{1\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{11}}{4}AC=\frac{\sqrt{33}}{24}AC.$$

Из прямоугольного треугольника AOS по теореме Пифагора:

$$AS=\sqrt{AO^2+SO^2}=\sqrt{\frac{1}{3}AC^2+\frac{11}{192}AC^2}=AC\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{11}{192}}=\sqrt{\frac{64+11}{192}}=\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}AC.$$

Откуда $AC=\frac{8}{5}AS=8.$

Ответ: 8.