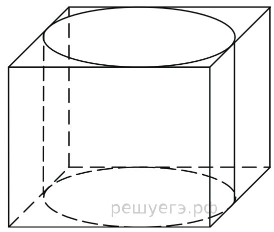
# Комбинации тел

**1. 1.** Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



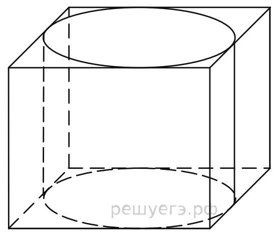
**Решение.**

Высота параллелепипеда равна высоте вписанного в него цилиндра. Основанием параллелепипеда является квадрат, сторона которого в два раза больше радиуса вписанной в него окружности. Поэтому площадь основания равна 4, а объем параллелепипеда равен

$$V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}}H = 4 \cdot 1 = 4.$$

Ответ: 4.

**2. 2.** Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.



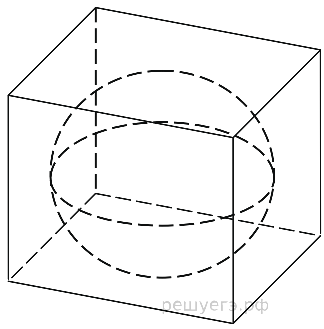
**Решение.**

Высота параллелепипеда равна высоте вписанного в него цилиндра. Основанием параллелепипеда является квадрат, сторона которого в два раза больше радиуса вписанной в него окружности. Поэтому сторона основания равна 8, а площадь основания равна 64. Тогда высота цилиндра равна

$$H = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{16}{64} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

**3. 3.** В куб вписан шар радиуса 1. Найдите объем куба.



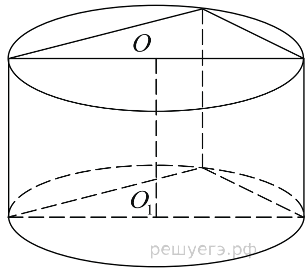
**Решение.**

Ребро куба равно диаметру вписанного в него шара, а объем куба равен кубу его ребра. Отсюда имеем:

$$V_{\text{к}} = 2^3 = 8.$$

Ответ: 8.

**4. 4.** В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $\frac{5}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



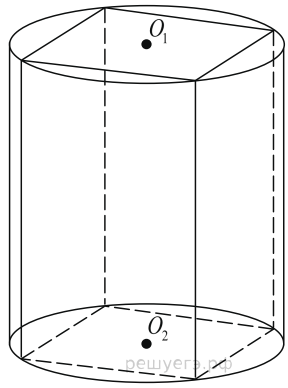

**Решение.**

По теореме Пифагора длина гипотенузы треугольника в основании $\sqrt{6^2+8^2}=10$. Поскольку гипотенуза является диаметром основания описанного цилиндра, его объем

$$V=H\frac{\pi d^2}{4}=\frac{5}{\pi}\cdot\frac{100\pi}{4}=125.$$

Ответ: 125.

**5. 5.** В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 2. Боковые ребра равны $\frac{2}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



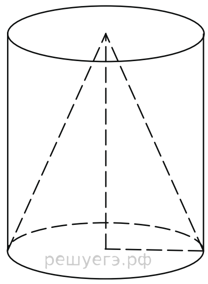

**Решение.**

Диагональ квадрата, лежащего в основании призмы, $d=a\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ является диаметром описанного вокруг призмы цилиндра. Тогда объем цилиндра:

$$V=\frac{\pi d^2}{4}H=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2}{4}=4.$$

Ответ: 4.

**6. 6.** Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 25. Найдите объём цилиндра.

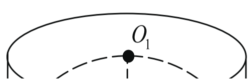


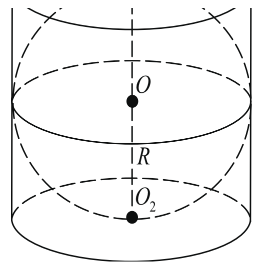

**Решение.**

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, а объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту. Поскольку они имеют общее основание и высоту, объем цилиндра в три раза больше объема конуса.

Ответ: 75.

**7. 7.** Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 18. Найдите площадь поверхности шара.






**Решение.**

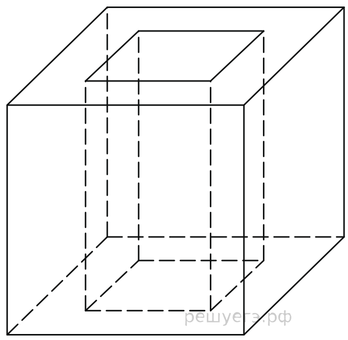
Радиусы шара и основания цилиндра равны. Площадь поверхности цилиндра, с радиусом основания $r$ и высотой $2r$ равна

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2.$$

Площадь поверхности шара радиуса $r$ равна $S = 4\pi r^2$, то есть в 1,5 раза меньше площади поверхности цилиндра. Следовательно, площадь поверхности шара равна 12.

Ответ: 12.

**8. 8.** Из единичного куба вырезана правильная четырехугольная призма со стороной основания 0,5 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.



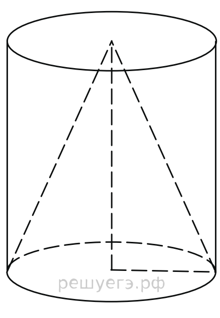

**Решение.**

Площадь поверхности получившегося многогранника равна сумме площадей поверхностей куба с ребром 1 и четырех граней параллелепипеда с ребрами 1, 0,5, 0,5, уменьшенной на две площади основания вырезанной призмы:

$$S = 6 + 4 \cdot 0,5 \cdot 1 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 7,5.$$

Ответ: 7,5.

**9. 9.** Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150.



**Решение.**

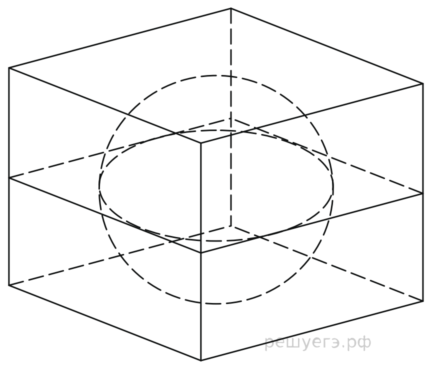
Объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где $S$ — площадь основания, а $h$ — высота конуса. Объем цилиндра равен $V = Sh$ и поэтому он в 3 раза больше объема конуса. Тем самым, объем конуса равен 50.

Ответ: 50.

**10. 10.** Объём куба, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.




**Решение.**

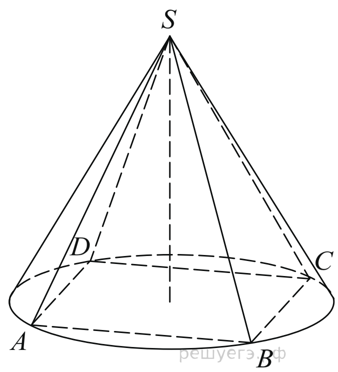
Прямоугольный параллелепипед, описанный вокруг сферы, является кубом. Тогда длина его ребра

$$a = V^{\frac{1}{3}} = 6.$$

Радиус сферы равен половине длины ребра $r = 3$.

Ответ: 3.

**11. 11.** Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объем, деленный на $\pi$.



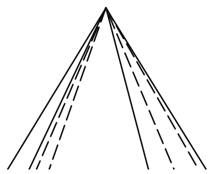

**Решение.**

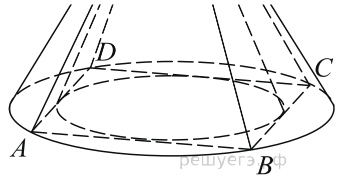
Радиус основания конуса $r$ равен половине диагонали квадрата $ABCD$: $r = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = 2\sqrt{2}$. Тогда для объема конуса, деленного на $\pi$ имеем:

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3}\frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3}\frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3}r^2 h = \frac{1}{3}8 \cdot 6 = 16.$$

Ответ: 16.

**12. 12.** Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?



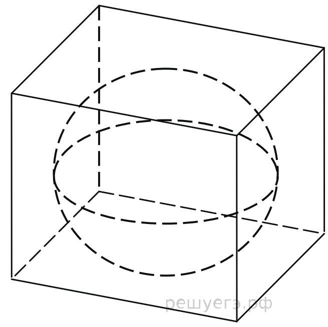



**Решение.**

Объемы данных конусов соотносятся как площади их оснований, и, следовательно, как квадраты их диаметров. Диаметр вписанного конуса равен стороне квадрата, диаметр описанного — диагонали квадрата, длина которой равна $\sqrt{2}$ длины стороны. Поэтому объем описанного конуса в 2 раза больше объема вписанного.

Ответ: 2.

**13. 13.** В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на $\pi$.



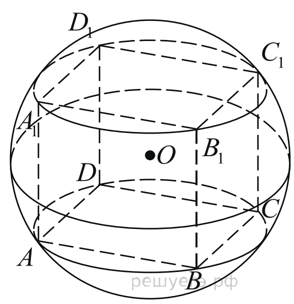

**Решение.**

Радиус вписанного в куб шара равен половине длины ребра куба: $r = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}$. Тогда объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2}\pi.$$

Ответ: 4,5.

**14. 14.** Около куба с ребром $\sqrt{3}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на $\pi$.



**Решение.**

Пусть длина ребра куба равна $a$, а его диагональ равна $d$. Радиус описанного шара $R$ равен половине диагонали куба:

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{3} = \frac{3}{2}.$$

Поэтому объем шара равен

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2}\pi.$$

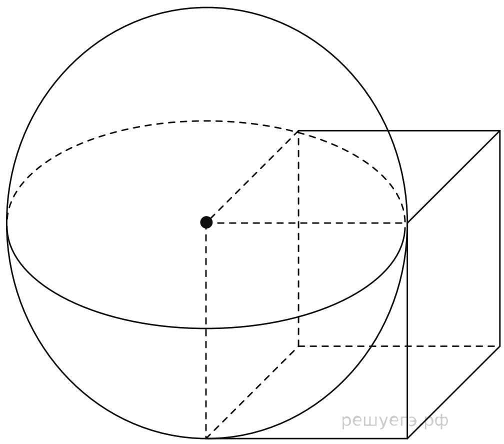
Тогда

$$\frac{V}{\pi} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

**15. 15.**

Вершина $A$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1,6 является центром сферы, проходящей через точку $A_1$. Найдите площадь $S$ части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину $S/\pi$.



**Решение.**

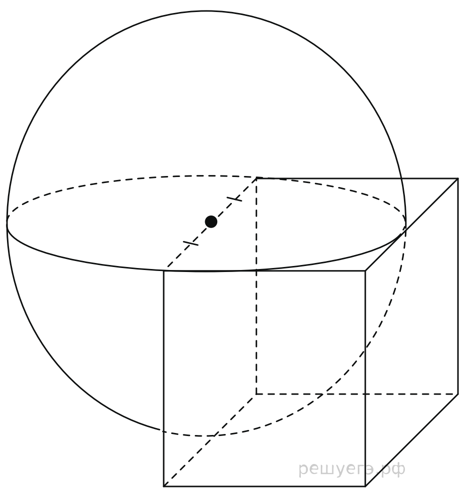
Так как ребро куба равно радиусу сферы, в кубе содержится 1/8 часть сферы и, соответственно, 1/8 ее поверхности, равная

$$\frac{1}{8}S = \frac{1}{8}\cdot 4\pi R^2 = \frac{\pi}{2}\cdot 1,6^2 = 1,28\pi.$$

Ответ: 1,28.

**16. 16.**

Середина ребра куба со стороной 1,9 является центром шара радиуса 0,95. Найдите площадь $S$ части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите $S/\pi$.



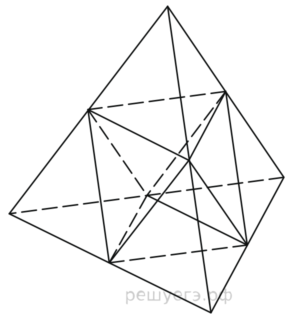
**Решение.**

Так как середина ребер куба является центром сферы, диаметр которой равен ребру куба, в кубе содержится 1/4 сферы и, соответственно, 1/4 ее поверхности. Имеем:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{4}4\pi R^2 = \pi 0,95^2 = 0,9025\pi.$$

Ответ: 0,9025.

**17. 17.** Объём тетраэдра равен 19. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.



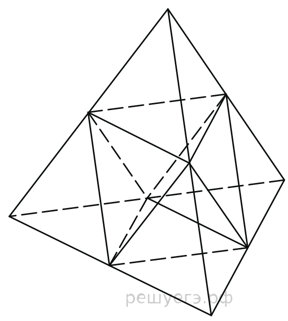

**Решение.**

Объем данного многогранника равен разности объемов исходного тетраэдра $V_0$ и четырех тетраэдров, одни из вершин которых совпадают с вершинами исходного:

$$V = V_0 - 4 \cdot \frac{1}{8}V_0 = \frac{1}{2}V_0 = 9,5.$$

Ответ: 9,5.

**18. 18.** Площадь поверхности тетраэдра равна 12. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

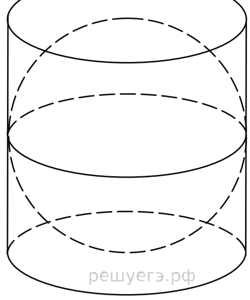



**Решение.**

Искомая поверхность состоит из четырёх пар равных треугольников, каждый из которых имеет площадь равную с четверти площади грани исходного тетраэдра. Поэтому искомая площадь равна половине площади поверхности тетраэдра и равна 6.

Ответ: 6.

**19. 19.** Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 33. Найдите объем шара.



**Решение.**

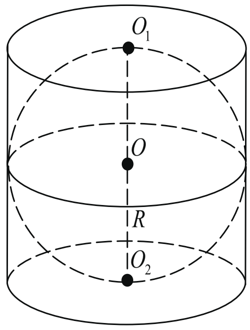
$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}}h = \pi R^2 2R = 2\pi R^3 = 33,$$
$$V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Выразим из формулы для объёма цилиндра $R^3$ и подставим в формулу для объёма шара

$$V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{33}{2\pi} = 22$$

Ответ: 22.

**20. 20.** Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 24. Найдите объем цилиндра.



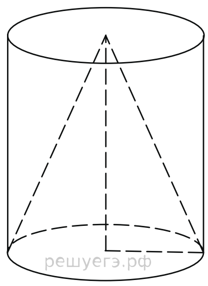

**Решение.**

Объем цилиндра равен произведению площади основания ны высоту. Площадь основания цилиндра равна площади большого круга вписанного шара, а высота цилиндра равна диаметру вписанного шара. Поэтому

$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}}h = \pi R^2 2R = 2\pi R^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{3}{2}V_{\text{шар}} = \frac{3}{2}\cdot 24 = 36.$$

Ответ: 36.

**21. 21.** Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 5.




**Решение.**

Поскольку

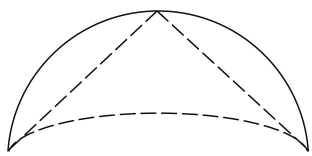
$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = 5$$

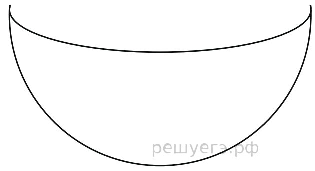
а конус и цилиндр имеют общую высоту и основание, имеем:

$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}}h = 3V_{\text{кон}} = 15.$$

Ответ: 15.

**22. 22.** Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем шара равен 28. Найдите объем конуса.





**Решение.**

Запишем формулу для объёма шара:

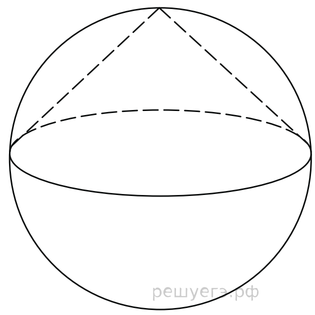
$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 28.$$

Объём конуса в 4 раза меньше:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{1}{4} \cdot V_{\text{шара}} = \frac{28}{4} = 7.$$

Ответ: 7.

**23. 23.** Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 6. Найдите объем шара.



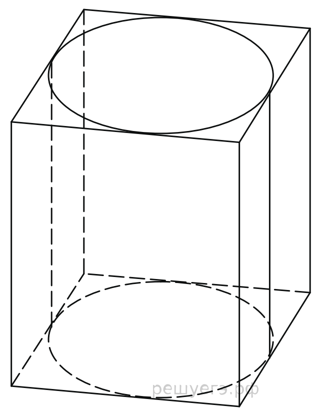
**Решение.**

Из формул для объема конуса и шара получаем:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \frac{1}{3}\pi R^2 R = 6, V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 24.$$

Ответ: 24.

**24. 24.** Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра.



**Решение.**

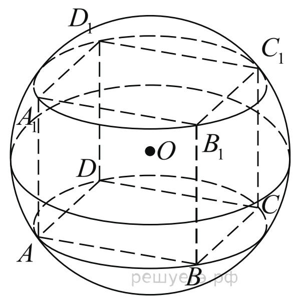
Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на боковое ребро. Боковое ребро равно высоте цилиндра. В основании призмы лежит квадрат, его сторона равна диаметру вписанного круга. Поэтому

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}}H = 4 \cdot 4 \cdot H = 16H.$$

Поскольку по условию площадь боковой поверхности равна 48, искомая высота равна 3.

Ответ: 3.

**25. 25.** Куб вписан в шар радиуса $\sqrt{3}$. Найдите объем куба.

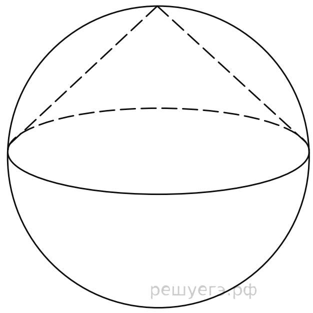



**Решение.**

Диаметр шара, описанного вокруг куба, совпадает с его диагональю и вдвое больше радиуса. Поэтому диагональ куба равна $2\sqrt{3}$. Если ребро куба равно $a$, то диагональ куба дается формулой $d = a\sqrt{3}$. Следовательно, ребро куба равно 2, а его объем равен 8.

Ответ: 8.

**26. 26.** Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $7\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.




**Решение.**

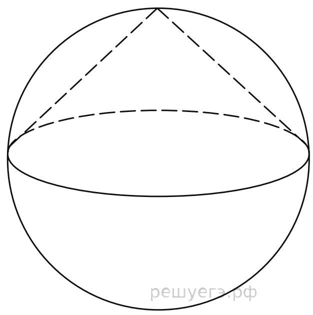
Высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$l^2 = r^2 + r^2 \Leftrightarrow l = r\sqrt{2}.$$

Поскольку по условию образующая равна $7\sqrt{2}$, радиус сферы равен 7.

Ответ:7.

**27. 27.** Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.




**Решение.**

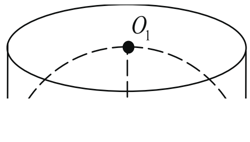
Высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем:

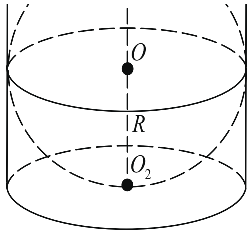
$$l^2 = r^2 + r^2 \Leftrightarrow l = r\sqrt{2}.$$

Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$, поэтому образующая равна $28\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 56$.

Ответ:56.

**28. 28.** Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 111. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.






**Решение.**

Высота цилиндра равна диаметру шара, а радиус основания цилиндра равен радиусу шара (см. рис.).

Площадь основания цилиндра:

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2.$$

Площадь боковой поверхности цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot h = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

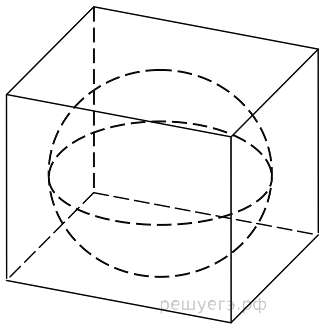
Площадь полной поверхности цилиндра:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2.$$

Поскольку площадь поверхности шара дается формулой $S_{\text{ш}} = 4\pi R^2$, имеем: $S_{\text{полн}} = 1,5S_{\text{ш}} = 166,5.$

Ответ: 166,5.

**29. 29.** Шар, объём которого равен 6π, вписан в куб. Найдите объём куба.



**Решение.**

Ребро куба равно двум радиусам вписанного в куб шара, поэтому объем куба, выраженный через радиус вписанного в него шара, даётся формулой $V_{\text{к}} = (2R)^3 = 8R^3$. Объём шара вычисляется по формуле $V_{\text{ш}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, откуда имеем:

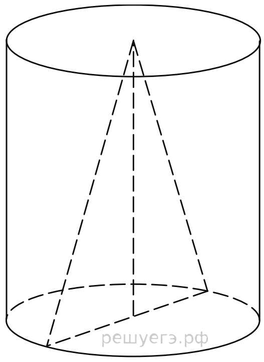
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 6\pi \Leftrightarrow R^3 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 8R^3 = 36.$$

Тем самым, объём куба равен 36.

Ответ: 36.

**30. 30.** Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

**Решение.**



Заметим, что конус и цилиндр имеют общую высоту и равные радиусы основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{\text{цил}} = 2\pi rh$, откуда, учитывая, что $h = r$, получаем: $2\pi r^2 = 3\sqrt{2}$ или

$$\pi r^2 = 1,5\sqrt{2}.$$

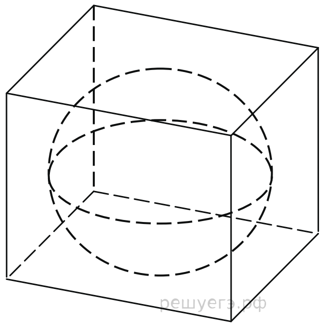
Образующая конуса $l$, его высота $h$ и радиус основания $r$ связаны соотношением $l^2 = h^2 + r^2$, откуда, учитывая, что $h = r$, получаем: $l^2 = 2r^2$ или $l = r\sqrt{2}$.

Площадь боковой поверхности конуса равна $S_{\text{кон}} = \pi rl$, следовательно:

$$S_{\text{кон}} = \pi rl = \pi r \cdot r\sqrt{2} = \pi r^2 \cdot \sqrt{2} = 1,5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3.$$

Ответ: 3.

**31. 31.** Куб описан около сферы радиуса 6. Найдите объём куба.



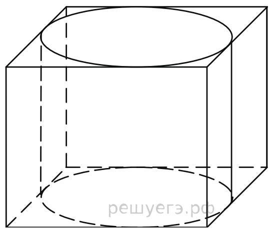
**Решение.**

Ребро куба равно диаметру вписанной в него сферы, а объем куба равен кубу его ребра. Отсюда имеем:

$$V_{\text{к}} = 12^3 = 1728.$$

Ответ: 1728.

**32. 32.** Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

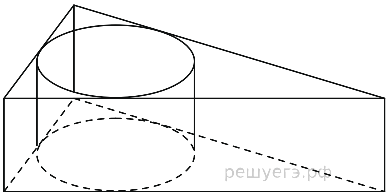


**Решение.**

Высота призмы равна высоте цилиндра, а сторона ее основания равна диаметру цилиндра. Боковые грани призмы — прямоугольники со сторонами 1 и 2. Поэтому площадь боковой поверхности $4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$.

Ответ: 8.

**33. 33.** Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



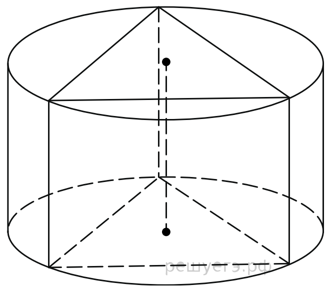
**Решение.**

Сторона правильного треугольника $a$ выражается через радиус $r$ вписанной в него окружности как $a = 2\sqrt{3}r$. Тогда площадь боковой поверхности призмы выражается формулой

$$S = P_{\text{осн}}H = 3aH = 6\sqrt{3}rH = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 6 = 36.$$

Ответ: 36.

**34. 34.** Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 2.



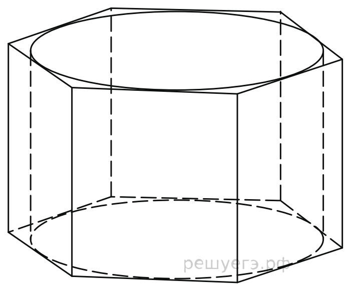
**Решение.**

Сторона правильного треугольника выражается через радиус описанной окружности как $a = \sqrt{3}r = 2\sqrt{3}\sqrt{3} = 6.$. Площадь боковой поверхности призмы тогда равна

$$S_{\text{бок}} = Ph = 3ah = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36.$$

Ответ: 36.

**35. 35.** Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



**Решение.**

Сторона правильного шестиугольника $a$ выражается через радиус $r$ вписанной в него окружности формулой $a = \frac{2}{\sqrt{3}}r.$ Тогда площадь боковой поверхности призмы выражается формулой

$$S = P_{\text{осн}}H = 6aH = \frac{12}{\sqrt{3}}rH = 12 \cdot 2 = 24.$$

Ответ: 24.