Касательная, хорда, секущая, радиус

1. Радиус круга равен 1. Найдите его площадь, *деленную на* π.

Решение.

Площадь круга равна:

$$S = \pi r^2 = \pi.$$

Ответ: 1.

В открытом банке ответ с числом π.

2. Найдите площадь кругового сектора, если радиус круга равен 3, а угол сектора равен 120°. В ответе укажите площадь, *деленную на* π.

Решение.

Площадь сектора равна:

$$\frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 9}{360} \cdot 120 = 3\pi.$$

Ответ: 3.

В открытом банке ответ с числом π.

3. Найдите площадь кругового сектора, если длина ограничивающей его дуги равна 6π, а угол сектора равен 120°. В ответе укажите площадь, *деленную на* π.

Решение.

Найдем радиус сектора из формулы длины дуги:

$$L = \frac{\pi r}{180} \cdot \alpha \Leftrightarrow r = \frac{L \cdot 180}{\alpha \cdot \pi} = 9.$$

.

Площадь сектора равна:

$$\frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 81}{360} \cdot 120 = 27\pi.$$

Ответ: 27.

В открытом банке ответ с числом π.

4. Найдите площадь кругового сектора, если длина ограничивающей его дуги равна 6π, угол сектора равен 120°, а радиус круга равен 9. В ответ укажите число, *деленную на* π.

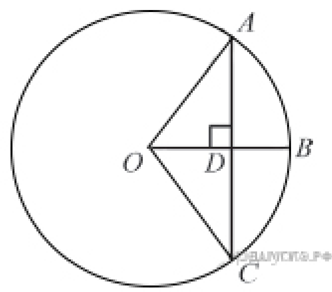
Решение.

Площадь сектора равна $S = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha$, имеем:

$$S = \frac{\pi \cdot 81}{360} \cdot 120 = 27\pi.$$

Ответ: 27.

5. Радиус OB окружности с центром в точке O пересекает хорду AC в точке D и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды AC, если $BD = 1$ см, а радиус окружности равен 5 см.

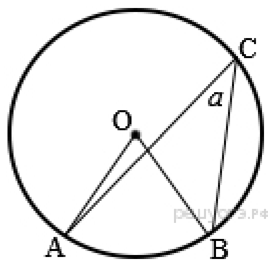


Решение.

Найдем отрезок DO: $DO = OB - BD = 5 - 1 = 4$. Так как OB перпендикулярен AC, треугольник AOD — прямоугольный. По теореме Пифагора имеем: $AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Треугольник AOC — равнобедренный так как $AO = OC = r$, тогда $AD = DC$. Таким образом, $AC = AD \cdot 2 = 6$.

Ответ: 6.

6. Найдите величину (в градусах) вписанного угла α, опирающегося на хорду AB, равную радиусу окружности.

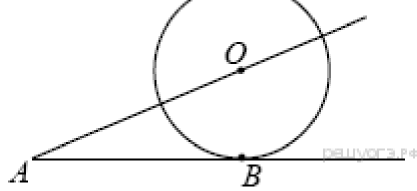


Решение.

Проведем радиусы OA и OB. Так как по условию задачи хорда AB равна радиусу, то треугольник AOB — равносторонний, следовательно, все его углы равны 60°. Угол AOB — центральный и равен 60° Угол ACB — вписанный и опирается на ту же дугу, что и угол AOB. Таким образом, $\angle ACB = \frac{1}{2}AOB = 30^\circ$.

Ответ: 30.

7. К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO. Найдите радиус окружности, если $AB = 12$ см, $AO = 13$ см.



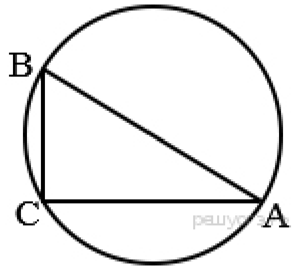
Решение.

Соединим отрезком точки O и B; полученный отрезок — радиус, проведённый в точку касания, поэтому OB перпендикулярен AB. Задача сводится к нахождению катета OB прямоугольного треугольника AOB: по теореме Пифагора равен 5 см.

Ответ: 5.

8.

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 30$, $BC = 5\sqrt{13}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



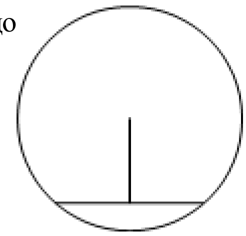
Решение.

Вписанный прямой угол опирается на диаметр окружности, поэтому радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы. По теореме Пифагора имеем:

$$AB=\sqrt{30^2+(5\sqrt{13})^2}=\sqrt{900+325}=\sqrt{1225}=35.$$

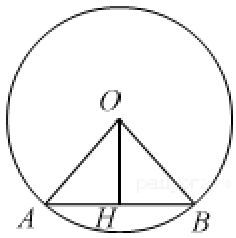
Ответ: 17,5.

9. Длина хорды окружности равна 72, а расстояние от центра окружности до этой хорды равно 27. Найдите диаметр окружности.



Решение.

Проведём построение и введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольники AOH и HOB, они прямоугольные, OH — общая, AO и OB равны как радиусы окружности, следовательно, эти треугольники равны, откуда $AH=HB=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{72}{2}=36.$ По теореме Пифагора найдём радиус окружности:



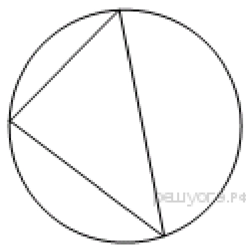
$$R=AO=\sqrt{AH^2+OH^2}=\sqrt{36^2+27^2}=\sqrt{9^2(4^2+3^2)}=9\sqrt{25}=45.$$

Диаметр равен двум радиусам, следовательно, $D=2R=2\cdot 45=90.$

10. Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как 3:4:11. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 14.

Решение.

Пусть первая дуга имеет градусную меру $3x$, тогда вторая дуга имеет градусную меру $4x$, а третья — $11x$. Три дуги в сумме составляют окружность, поэтому получаем:



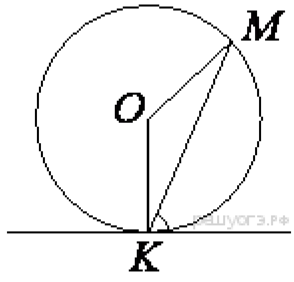
$$3x+4x+11x=360^\circ \Leftrightarrow x=\frac{360^\circ}{18}=20^\circ.$$

Поэтому меньшая дуга окружности равна $3\cdot 20^\circ=60^\circ.$ Угол треугольника, опирающийся на эту дугу является вписанным, поэтому он равен половине дуги: $\dfrac{60^\circ}{2}=30^\circ.$ Меньший угол треугольника лежит против меньшей стороны. Найдём радиус описанной окружности:

$$R=\frac{14}{2\sin 30^\circ}=\frac{14}{2\cdot\frac{1}{2}}=14.$$

Ответ: 14.

11. Прямая касается окружности в точке K. Точка O — центр окружности. Хорда KM образует с касательной угол, равный 83°. Найдите величину угла OMK. Ответ дайте в градусах.



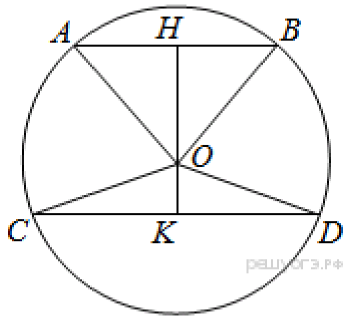
Решение.

Угол, образованный хордой и касательной равен половине дуги, которую он заключает, поэтому величина дуги MK равна $2 \cdot 83° = 166°$. Угол MOK — центральный, поэтому он равен величине дуги, на которую опирается. Значит, угол MOK равен 166°. В треугольнике OMK стороны OK и OM равны как радиусы окружности, поэтому треугольник OMK — равнобедренный, следовательно, углы при основании равны. Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому $\angle OKM = \angle OMK = (180° - \angle KOM)/2 = (180° - 166°)/2 = 7°$.

Ответ: 7.

12. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если $AB = 20$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 24 и 10.

Решение.



Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольники AOH и BOH, они прямоугольные, стороны AO и OB равны как радиусы окружностей, OH — общая, следовательно, треугольники AOH и HOB равны. Откуда $AH = BH = \frac{AB}{2} = 10$. Аналогично, равны треугольники COK и KOD, откуда $CK = KD$. Рассмотрим треугольник BOH, найдём OB по теореме Пифагора:

$$OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26.$$

Рассмотрим треугольник OKD, он прямоугольный, из теоремы Пифагора найдём KD:

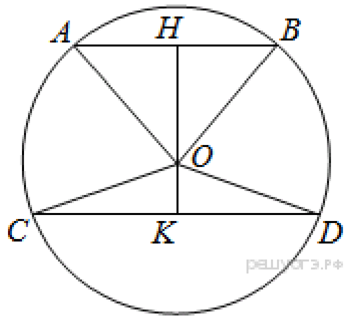
$$KD = \sqrt{OD^2 - OK^2} = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24.$$

Таким образом, $CD = 2KD = 2 \cdot 24 = 48$.

Ответ: 48.

13. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 18$, $CD = 24$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 12.

Решение.



Проведём построения и введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольники AOH и BOH, они прямоугольные, стороны AO и OB равны как радиусы окружностей, OH — общая, следовательно, треугольники AOH и HOB равны. Откуда $AH = BH = \frac{AB}{2} = 9$. Аналогично, равны треугольники COK и KOD, откуда $CK = KD = \frac{CD}{2} = 12$. Рассмотрим треугольник BOH, найдём OB по теореме Пифагора:

$$OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

Рассмотрим треугольник OKD, он прямоугольный, из теоремы Пифагора найдём OK:

$$OK = \sqrt{OD^2 - KD^2} = \sqrt{OB^2 - KD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

Таким образом, расстояние от центра окружности до хорды CD равно 9.

Ответ: 9.

14. На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 66°$. Длина меньшей дуги AB равна 99. Найдите длину большей дуги.

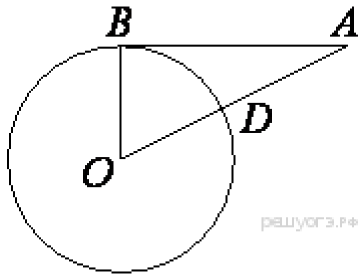
Решение.

Пусть длина большей дуги AB равна x. Длина дуги прямо пропорциональна её градусной мере, поэтому имеет место отношение:

$$\frac{66^\circ}{360^\circ - 66^\circ} = \frac{99}{x} \Leftrightarrow x = \frac{99 \cdot 294}{66} = 441.$$

Ответ: 441.

15. Отрезок $AB = 40$ касается окружности радиуса 75 с центром O в точке B. Окружность пересекает отрезок AO в точке D. Найдите AD.



Решение.

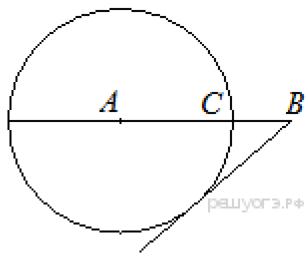
Радиус окружности перпендикулярен касательной в точке касания. Из прямоугольного треугольника AOB по теореме Пифагора найдём AO:

$$AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{40^2 + 75^2} = \sqrt{5^2(8^2 + 15^2)} = 5 \cdot 17 = 85.$$

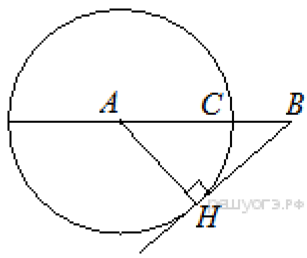
Найдём AD: $AD = AO - OD = 85 - 75 = 10.$

Ответ: 10.

16. На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 75$ и $BC = 10$. Построена окружность с центром A, проходящая через C. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки B к этой окружности.



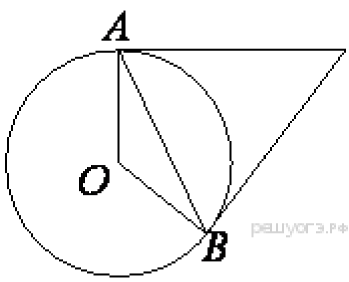
Решение.
Проведём радиус AH в точку касания. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора найдём BH:



$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(AC + CB)^2 - AH^2} = \sqrt{85^2 - 75^2} = \sqrt{5^2(17^2 - 15^2)} = 40.$$

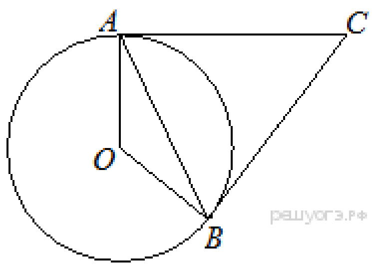
Ответ: 40.

17. Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом 72°. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.



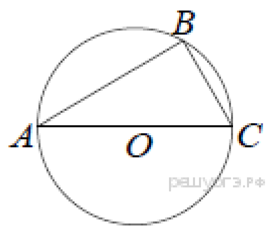
Решение.

Введём обозначение как показано на рисунке. Касательные, проведённые к окружности из одной точки равны, поэтому $AC = BC$, следовательно, треугольник ABC — равнобедренный. Откуда $\angle CAB = \angle CBA = \dfrac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 54^\circ$. Угол между касательной и хордой равен половине дуги, которую он заключает, значит, дуга AB равна 108°. Угол AOB — центральный, поэтому он равен дуге, на которую опирается, следовательно, равен 108°. Рассмотрим треугольник AOB, он равнобедренный, следовательно, $\angle OAB = \angle ABO = \dfrac{(180^\circ - 108^\circ)}{2} = 36^\circ$.



Ответ: 36.

18. Сторона AC треугольника ABC проходит через центр описанной около него окружности. Найдите $\angle C$, если $\angle A = 44$□. Ответ дайте в градусах.

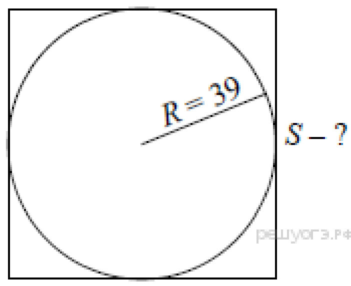


Решение.

Угол ABC − прямой, так как он вписанный и опирается на диаметр. Следовательно треугольник ABC − прямоугольный, а $\angle C = 90 - 44 = 46$.

Ответ: 46.

19. Окружность вписана в квадрат. Найдите площадь квадрата.



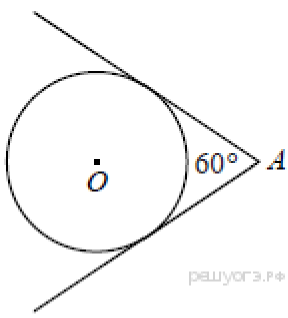
Решение.

Сторона квадрата равна диаметру вписанной в него окружности, значит площадь данного квадрата равна:

$$S = (39 + 39)^2 = 78^2 = 6084.$$

Ответ: 6084.

20. Из точки A проведены две касательные к окружности с центром в точке O. Найдите радиус окружности, если угол между касательными равен $60°$, а расстояние от точки A до точки O равно 8.



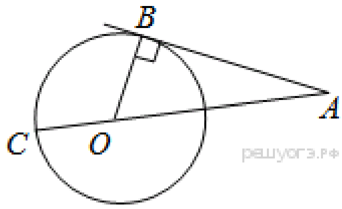
Решение.

Опустим радиусы на каждую касательную. Соединим точки А и О. Получившиеся треугольники - прямоугольные, так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. По гипотенузе и катету эти треугольники равны, таким образом, мы получили, что угол, лежащий напротив катета равен 30°. Катет, лежащий напротив угла в 30°. равен половине гипотенузы, тогда радиус равен 4.

Ответ: 4.

21. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 7,5, а $AB = 2$.

Решение.



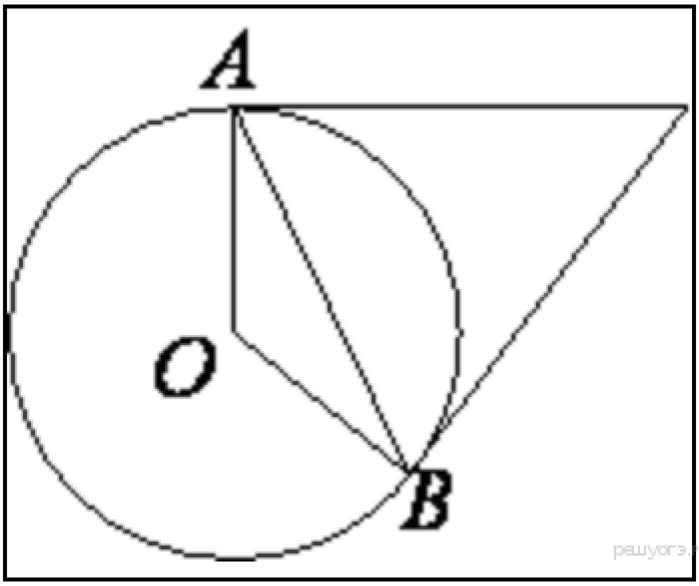
Пусть O — центр окружности. Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. Поэтому треугольник OBA — прямоугольный. Найдём OA по теореме Пифагора:

$$OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{15}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{289}{16}} = \frac{17}{4} = 4{,}25.$$

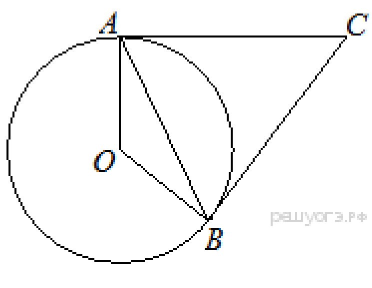
Следовательно, длина стороны AC равна $AC = CO + OA = 3{,}75 + 4{,}25 = 8$.

Ответ: 8.

22. Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом 76°. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.



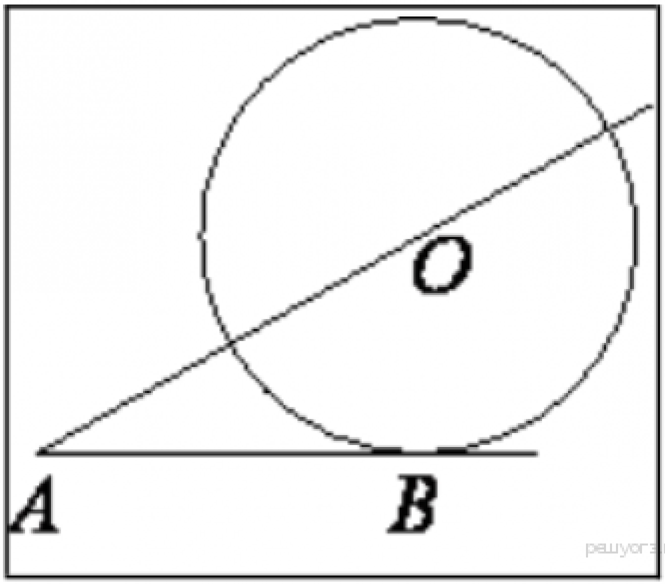
Решение.



Введём обозначение как показано на рисунке. Касательные, проведённые к окружности из одной точки равны, поэтому $AC = BC$, следовательно, треугольник ABC — равнобедренный. Откуда $\angle CAB = \angle CBA = \dfrac{180^{\circ} - \angle ACB}{2} = 52^{\circ}$. Угол между касательной и хордой равен половине дуги, которую он заключает, значит, дуга AB равна 104°. Угол AOB — центральный, поэтому он равен дуге, на которую опирается, следовательно, равен 104°. Рассмотрим треугольник AOB, он равнобедренный, следовательно, $\angle OAB = \angle ABO = \dfrac{(180^{\circ} - 104^{\circ})}{2} = 38^{\circ}$.

Ответ: 38.

23. К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO. Найдите радиус окружности, если $AB = 40$, $AO = 85$.

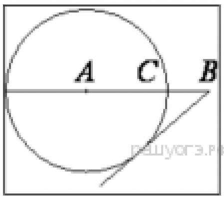


Решение.

Соединим отрезком точки O и B; полученный отрезок — радиус, проведённый в точку касания, поэтому OB перпендикулярен AB. Задача сводится к нахождению катета OB прямоугольного треугольника AOB: по теореме Пифагора равен 75 см.

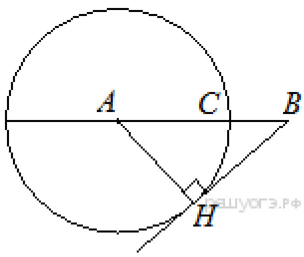
Ответ: 75.

24. На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 60$ и $BC = 27$. Построена окружность с центром A, проходящая через C. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки B к этой окружности.



Решение.

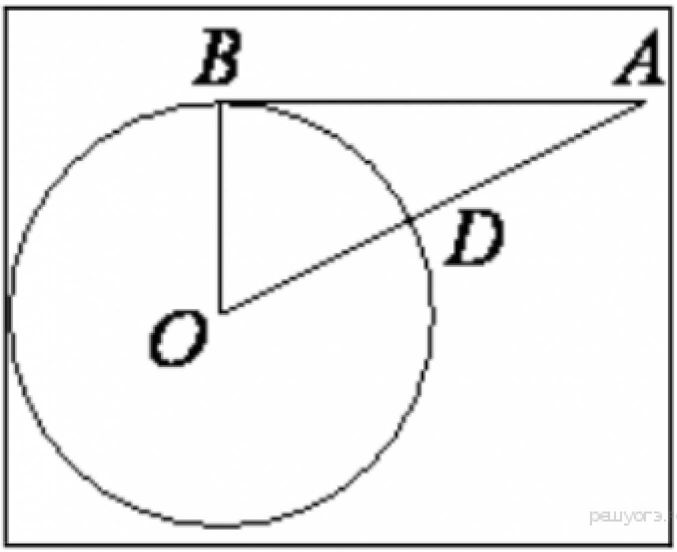
Проведём радиус AH в точку касания. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора найдём BH :



$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(AC + CB)^2 - AH^2} = \sqrt{87^2 - 60^2} = 63.$$

Ответ: 63.

25. Отрезок $AB = 32$ касается окружности радиуса 24 с центром O в точке B. Окружность пересекает отрезок AO в точке D. Найдите AD.



Решение.

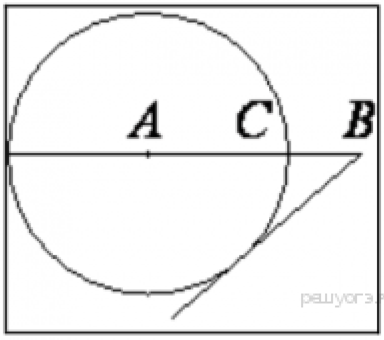
Радиус окружности перпендикулярен касательной в точке касания. Из прямоугольного треугольника AOB по теореме Пифагора найдём AO:

$$AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40.$$

Найдём AD: $AD = AO - OD = 40 - 24 = 16.$

Ответ: 16.

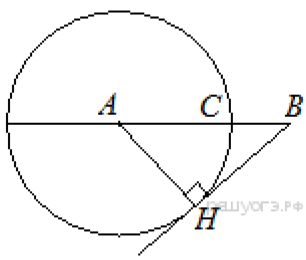
26. На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 6$ и $BC = 4$. Построена окружность с центром A, проходящая через C. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки B к этой окружности.



Решение.

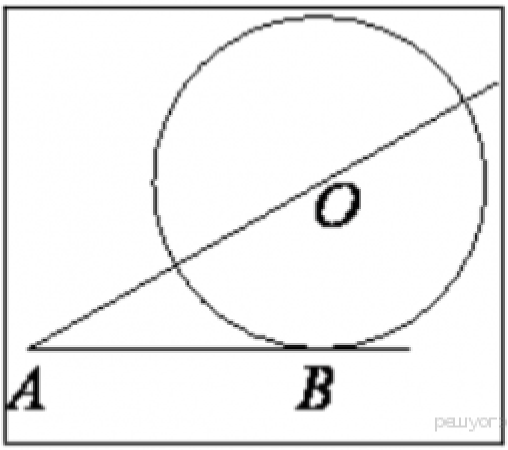
Проведём радиус AH в точку касания. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора найдём BH:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(AC + CB)^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$



Ответ: 8.

27. К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO. Найдите радиус окружности, если $AB = 21$, $AO = 75$.

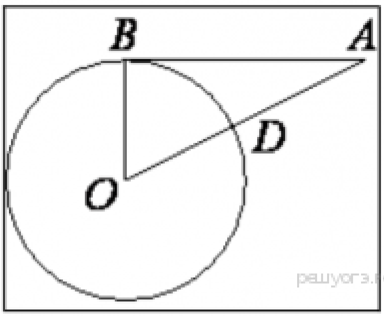


Решение.

Соединим отрезком точки O и B; полученный отрезок — радиус, проведённый в точку касания, поэтому OB перпендикулярен AB. Задача сводится к нахождению катета OB прямоугольного треугольника AOB: по теореме Пифагора равен $\sqrt{75^2-21^2}=72$ см.

Ответ: 72.

28. Отрезок $AB=72$ касается окружности радиуса 54 с центром O в точке B. Окружность пересекает отрезок AO в точке D. Найдите AD.



Решение.

Радиус окружности перпендикулярен касательной в точке касания. Из прямоугольного треугольника AOB по теореме Пифагора найдём AO:

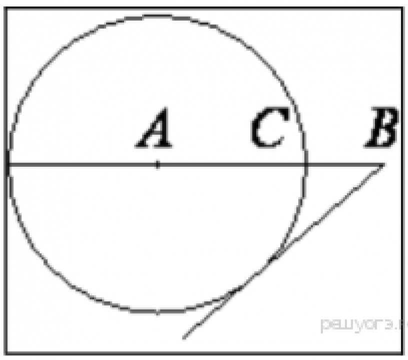
$$AO=\sqrt{AB^2+OB^2}=\sqrt{72^2+54^2}=90.$$

Найдём AD: $AD=AO-OD=90-54=36.$

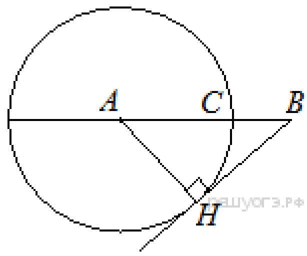
Ответ: 36.

29.

На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC=60$ и $BC=15$. Построена окружность с центром A, проходящая через C. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки B к этой окружности.



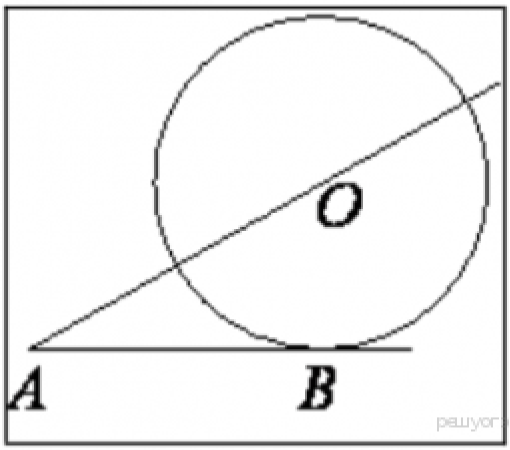
Решение.
Проведём радиус AH в точку касания. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора найдём BH :



$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(AC + CB)^2 - AH^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45.$$

Ответ: 45.

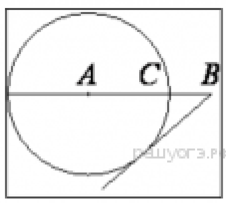
30. К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO. Найдите радиус окружности, если $AB = 32$, $AO = 40$



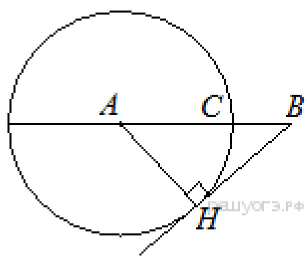
Решение.
Соединим отрезком точки O и B; полученный отрезок — радиус, проведённый в точку касания, поэтому OB перпендикулярен AB. Задача сводится к нахождению катета OB прямоугольного треугольника AOB: по теореме Пифагора равен $\sqrt{40^2 - 32^2} = 24$ см.

Ответ: 24.

31. На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 10$ и $BC = 16$. Построена окружность с центром A, проходящая через C. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки B к этой окружности.



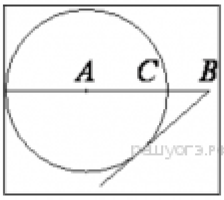
Решение.
Проведём радиус AH в точку касания. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора найдём BH :



$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(AC + CB)^2 - AH^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24.$$

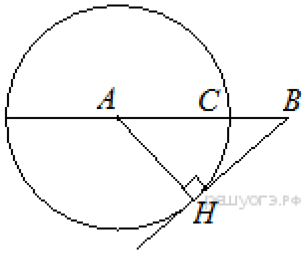
Ответ: 24.

32. На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 56$ и $BC = 9$. Построена окружность с центром A, проходящая через C. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки B к этой окружности.



Решение.

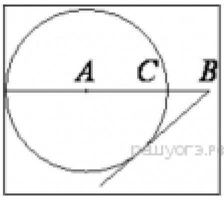
Проведём радиус AH в точку касания. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора найдём BH:



$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(AC + CB)^2 - AH^2} = \sqrt{65^2 - 56^2} = 33.$$

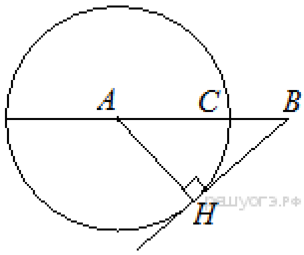
Ответ: 33.

33. На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 60$ и $BC = 1$. Построена окружность с центром A, проходящая через C. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки B к этой окружности.



Решение.

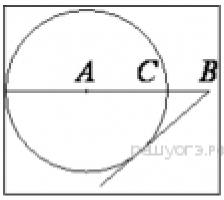
Проведём радиус AH в точку касания. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора найдём BH:



$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(AC + CB)^2 - AH^2} = \sqrt{61^2 - 60^2} = 11.$$

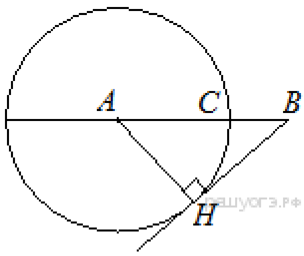
Ответ: 11.

34. На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 48$ и $BC = 2$. Построена окружность с центром A, проходящая через C. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки B к этой окружности.



Решение.

Проведём радиус AH в точку касания. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора найдём BH:



$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(AC + CB)^2 - AH^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = 14.$$

Ответ: 14.