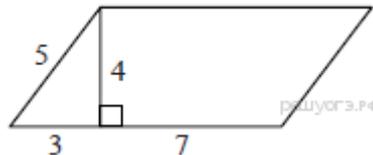


Параллелограмм

1. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению длины основания на высоту:

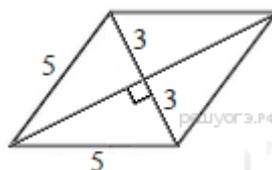
$$S = (3 + 7) \cdot 4 = 40.$$

Ответ: 40.

2. Сторона ромба равна 5, а диагональ равна 6. Найдите площадь ромба.

Решение.

Диагонали ромба пересекаются под углом 90° и точкой пересечения делятся пополам. Из прямоугольного треугольника, катетами которого являются половины диагоналей ромба, а гипотенузой — сторона ромба, по теореме Пифагора найдем половину неизвестной диагонали: $\sqrt{25 - 9} = 4$. Тогда вся неизвестная диагональ равна 8.



Площадь ромба равна половине произведения диагоналей:

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24.$$

Ответ: 24.

3. Периметр ромба равен 40, а один из углов равен 30° . Найдите площадь ромба.

Решение.

Периметр ромба равен сумме длин всех его сторон. Так как все стороны равны, сторона ромба равна 10. Площадь ромба равна произведению сторон на синус угла между ними. Таким образом,

$$S = 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

Ответ: 50.

4. Периметр ромба равен 24, а синус одного из углов равен $\frac{1}{3}$. Найдите площадь ромба.

Решение.

Периметр ромба равен сумме длин всех его сторон. Так как все стороны равны, сторона ромба равна 6. Площадь ромба равна произведению сторон на синус угла между ними, поэтому

$$S = 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 12.$$

Ответ: 12.

5. Одна из сторон параллелограмма равна 12, а опущенная на нее высота равна 10. Найдите площадь параллелограмма.

Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению высоты на основание. Таким образом,

$$S = 12 \cdot 10 = 120.$$

Ответ: 120.

6. Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а один из углов — 45° . Найдите площадь параллелограмма, делённую на $\sqrt{2}$.

Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению сторон на синус угла между ними:

$$12 \cdot 5 \cdot \sin 45^\circ = 30\sqrt{2}.$$

Ответ: 30.

В открытом банке иррациональный ответ.

7. Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а синус одного из углов равен $\frac{1}{3}$.
Найдите площадь параллелограмма.

Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению сторон на синус угла между ними, поэтому

$$12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = 20.$$

Ответ: 20.

8. Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а косинус одного из углов равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите площадь параллелограмма.

Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению сторон на синус угла между ними. Синус угла найдем из основного тригонометрического тождества:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = 20.$$

Ответ: 20.

9. Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а тангенс одного из углов равен $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
Найдите площадь параллелограмма.

Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению сторон на синус угла между ними. Найдем синус угла. В прямоугольном треугольнике тангенс определяется как отношение противолежащего катета к прилежащему. Имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Таким образом, $a = x\sqrt{2}, b = 4x$, где x — число.

По теореме Пифагора гипотенуза этого прямоугольного треугольника равна:

$$c = \sqrt{2x^2 + 16x^2} = 3x\sqrt{2}.$$

В прямоугольном треугольнике синус определяется как отношение противолежащего катета к гипотенузе. Имеем:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{x\sqrt{2}}{3x\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = 20.$$

Ответ: 20.

10. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10, острый угол, прилежащий к нему, равен 60° , а гипотенуза равна 20. Найдите площадь треугольника, делённую на $\sqrt{3}$.

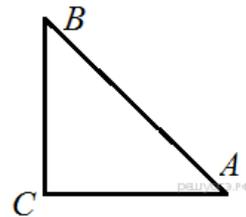
Решение.

Найдем второй катет треугольника из определения тангенса:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AC}{10} \Leftrightarrow AC = 10\sqrt{3}.$$

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов:

$$\frac{10\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 50\sqrt{3}.$$



Ответ: 50.

Примечание:

Второй катет можно было найти при помощи теоремы Пифагора.

В открытом банке иррациональный ответ.

11. В ромбе сторона равна 10, одна из диагоналей — $5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, а угол, лежащий напротив этой диагонали, равен 30° . Найдите площадь ромба.

Решение.

Площадь ромба равна произведению сторон на синус угла между ними:

$$S = 10 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 50.$$

Ответ: 50.

Примечание:

Можно найти вторую диагональ по теореме косинусов и вычислить площадь ромба как половина произведения диагоналей.

12. Радиус круга равен 3, а длина ограничивающей его окружности равна 6π . Найдите площадь круга. В ответ запишите площадь, делённую на π .

Решение.

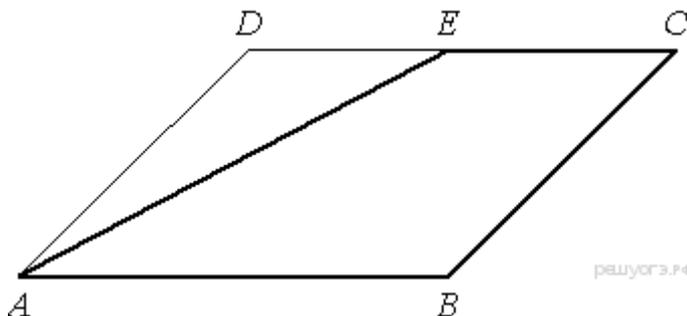
Площадь круга равна $S = \pi \cdot r^2$, имеем:

$$S = \pi \cdot 3^2 = 9\pi.$$

Ответ: 9.

В открытом банке ответ с числом π .

13. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 56. Точка E — середина стороны CD . Найдите площадь трапеции $AECB$.

**Решение.**

Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника, поэтому $S_{ACD} = 28$. Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника, поэтому $S_{ADE} = \frac{1}{2}S_{ACD} = 14$. Следовательно,

$$S_{ABCE} = S_{ABCD} - S_{ADE} = 56 - 14 = 42.$$

Ответ: 42.

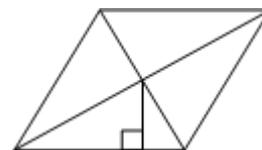
14. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 6.

**Решение.**

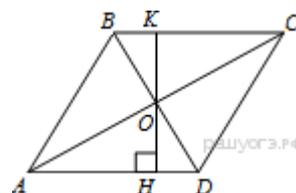
Площадь ромба можно найти как половину произведения его диагоналей: $S = \frac{1}{2}14 \cdot 6 = 42$.

Ответ: 42.

15. Сторона ромба равна 9, а расстояние от центра ромба до неё равно 1. Найдите площадь ромба.

**Решение.**

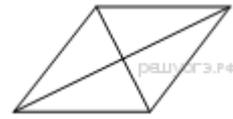
Проведём построение и введём обозначения как показано на рисунке. Учитывая, что $HK \perp AD$ и $AD \parallel BC$, получаем $HK \perp BC$. Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам. Рассмотрим треугольники BOK и HOD , они прямоугольные, $BO = OD$, $\angle BOK = \angle HOD$, следовательно, треугольники BOK и HOD равны, откуда $HO = OK$, то есть высота $HK = 2OH = 2$. Найдём площадь ромба как произведение стороны на высоту:



$$S = ah = 9 \cdot 2 = 18.$$

Ответ: 18.

16. Сторона ромба равна 50, а диагональ равна 80. Найдите площадь ромба.



Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам. Пусть $AC = 80$. Рассмотрим треугольник ABO , он прямоугольный, из теоремы Пифагора найдём BO :

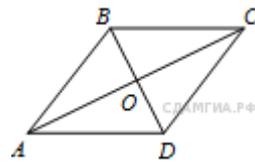
$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = \sqrt{10^2(5^2 - 4^2)} = 10 \cdot \sqrt{9} = 30.$$

Найдём площадь ромба как половину произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}AC \cdot 2BO = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 30 \cdot 2 = 2400.$$

Ответ: 2400.

17. Периметр ромба равен 116, а один из углов равен 30° . Найдите площадь ромба.



Решение.

Проведём высоту в ромбе и введём обозначения как показано на рисунке. Все стороны ромба равны, поэтому $AB = \frac{P}{4} = \frac{116}{4} = 29$. Найдём BH из прямоугольного треугольника ABH :



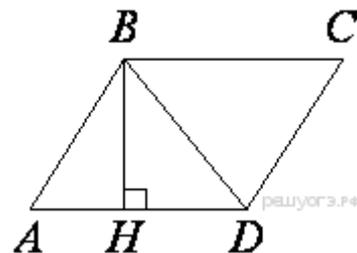
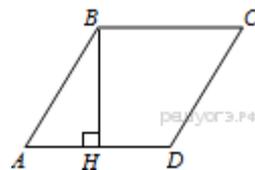
$$BH = AB \cdot \sin 30^\circ = 29 \cdot \frac{1}{2} = 14,5.$$

Найдём площадь ромба как произведение стороны на высоту:

$$S = AD \cdot BH = 29 \cdot 14,5 = 420,5.$$

Ответ: 420,5.

18. Высота BH параллелограмма $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки $AH = 1$ и $HD = 28$. Диагональ параллелограмма BD равна 53. Найдите площадь параллелограмма.



Решение.

Из прямоугольного треугольника BHD по теореме Пифагора найдём BH :

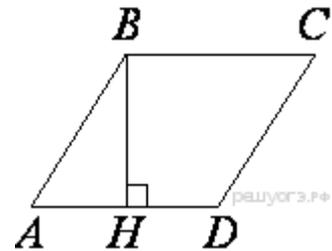
$$BH = \sqrt{BD^2 - HD^2} = \sqrt{53^2 - 28^2} = 45.$$

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту:

$$S = BH \cdot AD = BH \cdot (AH + HD) = 45 \cdot 29 = 1305.$$

Ответ: 1305.

19. Высота BH ромба $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки $AH = 5$ и $HD = 8$. Найдите площадь ромба.



Решение.

Из прямоугольного треугольника ABH найдём BH :

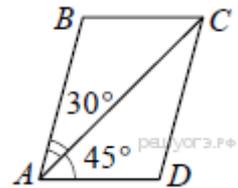
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{(AH + HD)^2 - AH^2} = \sqrt{169 - 25} = 12.$$

Площадь ромба можно найти как произведение основания на высоту:

$$S = AD \cdot BH = 13 \cdot 12 = 156.$$

Ответ: 156.

20. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 30° и 45° . Найдите больший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Угол BAD равен $30 + 45 = 75^\circ$, значит $\angle ABC = 180 - 75 = 105^\circ$.

Ответ: 105.

21. Площадь ромба равна 54, а периметр равен 36. Найдите высоту ромба.



Решение.

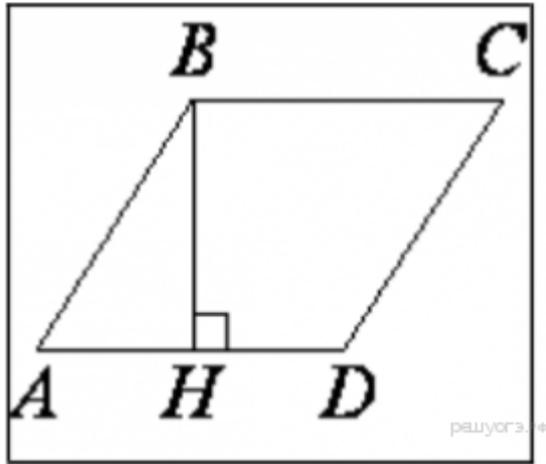
Пусть сторона ромба равна a , тогда

$$P = 4a \Leftrightarrow a = \frac{P}{4} = 9.$$

$$S = ah \Leftrightarrow h = \frac{S}{a} = \frac{54}{9} = 6.$$

Ответ: 6.

22. Высота BH ромба $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки $AH = 21$ и $HD = 14$. Найдите площадь ромба.



Решение.

Из прямоугольного треугольника ABH найдём BH :

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{(AH + HD)^2 - AH^2} = \sqrt{1225 - 441} = 28.$$

Площадь ромба можно найти как произведение основания на высоту:

$$S = AD \cdot BH = 35 \cdot 28 = 980.$$

Ответ: 980.