

Алгебраические выражения

1. Сократите дробь $\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}}$.

Решение.

Используем свойства степеней:

$$\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}} = \frac{(9 \cdot 2)^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}} = \frac{3^{2n+6} \cdot 2^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}} = 3^{2n+6-(2n+5)} \cdot 2^{n+3-(n-2)} = 3 \cdot 2^5 = 96.$$

Ответ: 96.

2. Разложите на множители: $x^2y + 1 - x^2 - y$.

Решение.

Имеем:

$$x^2y + 1 - x^2 - y = x^2(y-1) - (y-1) = (y-1)(x^2-1) = (y-1)(x-1)(x+1).$$

Ответ: $(y-1)(x-1)(x+1)$.

3. Сократите дробь $\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x}$.

Решение.

Корни квадратного трехчлена

$$5x^2 - 3x - 2: x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{5}.$$

Имеем:

$$\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x} = \frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)} = \frac{x-1}{x}.$$

Замечание. Учащийся может разложить трехчлен на множители каким-либо иным способом. Например:

$$5x^2 - 3x - 2 = (3x^2 - 3x) + (2x^2 - 2) = 3x(x-1) + 2(x^2 - 1) = (x-1)(5x+2).$$

Ответ: $\frac{x-1}{x}$.

4. Упростите выражение $\frac{\sqrt{\sqrt{10}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}$.

Решение.

Имеем:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{10}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{10-4}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

5. Один из корней уравнения $5x^2 - 2x + 3p = 0$ равен 1. Найдите второй корень.

Решение.

Представим уравнение в виде: $x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}p = 0$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{2}{5}$, откуда второй корень $x_2 = \frac{2}{5} - x_1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5} = -0,6$.

Ответ: -0,6.

6. Упростите выражение: $\frac{5^{n+1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 5^n}$.

Решение.

Имеем:

$$\frac{5^{n+1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 5^n} = \frac{25 \cdot 5^{n-1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 5^n} = \frac{5^{n-1}(25 - 1)}{2 \cdot 5^n} = \frac{24}{10} = 2,4.$$

Ответ: 2,4.

7. Упростите выражение: $\frac{10 \cdot 2^n}{2^{n+1} + 2^{n-1}}$.

Решение.

Имеем:

$$\frac{10 \cdot 2^n}{2^{n+1} + 2^{n-1}} = \frac{10 \cdot 2^n}{4 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1}} = \frac{10 \cdot 2^n}{(4 + 1) \cdot 2^{n-1}} = \frac{10 \cdot 2}{5} = 4.$$

Ответ: 4.

8. Упростите выражение: $\frac{6}{a-1} - \frac{10}{(a-1)^2} : \frac{10}{a^2-1} - \frac{2a+2}{a-1}$.

Решение.

$$1) \frac{10}{(a-1)^2} : \frac{10}{a^2-1} = \frac{10(a^2-1)}{(a-1)^2 \cdot 10} = \frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)^2} = \frac{a+1}{a-1}.$$

$$2) \frac{6}{a-1} - \frac{a+1}{a-1} - \frac{2a+2}{a-1} = \frac{6-a-1-2a-2}{a-1} = \frac{3-3a}{a-1} = -3.$$

Ответ: -3.

9. Упростите выражение: $\frac{m}{m^2-2m+1} - \frac{m+2}{m^2+m-2}$.

Решение.

Корни квадратного трёхчлена $m^2 + m - 2$: $m_1 = -2$, $m_2 = 1$.

Значит, $m^2 + m - 2 = (m+2)(m-1)$.

$$\begin{aligned} \frac{m}{m^2-2m+1} - \frac{m+2}{m^2+m-2} &= \frac{m}{(m-1)^2} - \frac{m+2}{(m+2)(m-1)} = \frac{m}{(m-1)^2} - \frac{1}{m-1} = \\ &= \frac{m - (m-1)}{(m-1)^2} = \frac{1}{(m-1)^2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{(m-1)^2}$.

10. Найдите значение выражения: $\frac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^5}$ при $x = 5$.

Решение.

Имеем:

$$\frac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^5} = \frac{27}{2} x^{3-9+10-5} = \frac{27}{2} x^{-1} = \frac{27}{2x}.$$

При $x = 5$ получаем: $\frac{27}{2x} = \frac{27}{10} = 2,7$.

Ответ: 2,7.

11. Сократите дробь: $\frac{(2a^2)^3 \cdot (3b)^2}{(6a^3b)^2}$.

Решение.

Имеем:

$$\frac{(2a^2)^3 \cdot (3b)^2}{(6a^3b)^2} = \frac{8a^6 \cdot 9b^2}{36a^6b^2} = \frac{72}{36} = 2.$$

Ответ: 2.

12. Какое из чисел больше: $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ или $3 + \sqrt{7}$?

Решение.

Найдем квадраты чисел:

$$(\sqrt{6} + \sqrt{10})^2 = 16 + 2\sqrt{60} = 16 + \sqrt{240};$$

$$(3 + \sqrt{7})^2 = 16 + 6\sqrt{7} = 16 + \sqrt{252}.$$

Так как $\sqrt{252} > \sqrt{240}$, то $(3 + \sqrt{7})^2 > (\sqrt{6} + \sqrt{10})^2$.

Учитывая, что $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ и $3 + \sqrt{7}$ — положительные числа, получаем, что

$$3 + \sqrt{7} > \sqrt{6} + \sqrt{10}.$$

Ответ: $3 + \sqrt{7}$.

13. Сократите дробь $\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})}$, если $p(b) = (b + \frac{3}{b})(3b + \frac{1}{b})$.

Решение.

Имеем:

$$\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})} = \frac{(b + \frac{3}{b})(3b + \frac{1}{b})}{(\frac{1}{b} + 3b)(\frac{3}{b} + b)} = 1.$$

Ответ: 1.

14. Упростите выражение $\frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 2x} - \frac{2x - 7}{x} - \frac{x + 8}{x - 2}$.

Решение.

$$\frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 2x} - \frac{2x - 7}{x} - \frac{x + 8}{x - 2} = \frac{3x^2 + 4x - 2x^2 + 4x + 7x - 14 - x^2 - 8x}{x(x - 2)} = \frac{7x - 14}{x(x - 2)} = \frac{7}{x}.$$

Ответ: $\frac{7}{x}$.

15. Сократите дробь $\frac{2^{n+2} \cdot 21^{n+3}}{6^{n+1} \cdot 7^{n+2}}$.

Решение.

$$\frac{2^{n+2} \cdot 21^{n+3}}{6^{n+1} \cdot 7^{n+2}} = \frac{2^{n+2} \cdot 3^{n+3} \cdot 7^{n+3}}{2^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot 7^{n+2}} = 2^{n+2-(n+1)} \cdot 3^{n+3-(n+1)} \cdot 7^{n+3-(n+2)} = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126.$$

Ответ: 126.

16. Сократите дробь $\frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{(x - 3)(x + 2)}$.

Решение.

Последовательно разделим многочлен на одночлены в столбик:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 - 9x - 18 \\
 \underline{-x^3 - 3x^2} \\
 5x^2 - 9x \\
 \underline{-5x^2 - 15x} \\
 6x - 18 \\
 \underline{-6x - 18} \\
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 x - 3 \\
 \hline
 x^2 + 5x + 6
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^2 + 5x + 6 \\
 \underline{-x^2 + 2x} \\
 3x + 6 \\
 \underline{-3x + 6} \\
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 x + 2 \\
 \hline
 x + 3
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

reshu.ru

Ответ: $x + 3$.

Приведём другое решение.

Разложим числитель на множители, используя метод группировки:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{(x-3)(x+2)} = \frac{x^2(x+2) - 9(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x+2)(x^2 - 9)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x+2)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = x+3.$$

17. Сократите дробь $\frac{ab - 2b - 6 + 3a}{a^2 - 4}$.

Решение.

Имеем:

$$\frac{ab - 2b - 6 + 3a}{a^2 - 4} = \frac{b(a-2) + 3(a-2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{(a-2)(b+3)}{(a-2)(a+2)} = \frac{b+3}{a+2}.$$

Ответ: $\frac{b+3}{a+2}$.

18. Найдите значение выражения $\frac{7a}{6c} - \frac{49a^2 + 36c^2}{42ac} + \frac{6c - 49a}{7a}$ при $a = 71$, $c = 87$. В ответе запишите найденное значение.

Решение.

Приведём дроби к общему знаменателю:

$$\frac{7a}{6c} - \frac{49a^2 + 36c^2}{42ac} + \frac{6c - 49a}{7a} = \frac{7a \cdot 7a - 49a^2 - 36c^2 + 6c \cdot 6c - 49a \cdot 6c}{42ac} = -\frac{49a \cdot 6c}{42ac} = -7.$$

Таким образом, выражение не зависит от значений переменных, поэтому оно равно -7 .

Ответ: -7 .

19. Найдите значение выражения $39a - 15b + 25$, если $\frac{3a - 6b + 4}{6a - 3b + 4} = 7$.

Решение.

Преобразуем равенство $\frac{3a - 6b + 4}{6a - 3b + 4} = 7$ так, чтобы оно содержало выражение $39a - 15b + 25$:

$$\frac{3a - 6b + 4}{6a - 3b + 4} = 7 \Leftrightarrow 3a - 6b + 4 = 42a - 21b + 28 \Leftrightarrow 39a - 15b + 24 = 0 \Leftrightarrow 39a - 15b + 25 = 1.$$

Ответ: 1.

20. Найдите значение выражения $\frac{p(a)}{p(6-a)}$, если $p(a) = \frac{a(6-a)}{a-3}$.

Решение.

Найдём значение выражения:

$$\frac{p(a)}{p(6-a)} = \frac{a(6-a)}{a-3} \cdot \frac{6-a-3}{(6-a)(6-(6-a))} = \frac{a(6-a)}{a-3} \cdot \frac{-a+3}{(6-a)a} = -1.$$

Ответ: -1.

21. Найдите значение выражения $\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})}$, если $p(b) = \left(b + \frac{5}{b}\right) \left(5b + \frac{1}{b}\right)$.

Решение.

Найдём значение выражения $p\left(\frac{1}{b}\right)$:

$$p\left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{b} + 5b\right) \left(\frac{5}{b} + b\right) = p(b).$$

Поэтому $\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})} = 1$.

Ответ: 1.

22. Найдите значение выражения $(a^3 - 16a) \cdot \left(\frac{1}{a+4} - \frac{1}{a-4}\right)$ при $a = -45$.

Решение.

При $a \neq 4$ и $a \neq -4$ исходное выражение принимает вид:

$$(a^3 - 16a) \cdot \left(\frac{1}{a+4} - \frac{1}{a-4}\right) = a(a-4)(a+4) \cdot \frac{-8}{(a-4)(a+4)} = -8a.$$

При $a = -45$ значение этого выражения равно 360.

Ответ: 360.

23. Сократите дробь $\frac{100^n}{5^{2n-1} \cdot 4^{n-2}}$.

Решение.

Преобразуем выражение:

$$\frac{2^{2n} \cdot 5^{2n}}{2^{2n-4} \cdot 5^{2n-1}} = 2^4 \cdot 5 = 80.$$

Ответ: 80.

24. Сократите дробь $\frac{(2x)^2 \cdot x^{-9}}{x^{-15} \cdot 5x^8}$

Решение.

Упростим выражение:

$$\frac{(2x)^2 \cdot x^{-9}}{x^{-15} \cdot 5x^8} = \frac{4 \cdot x^{-7}}{5 \cdot x^{-7}} = 0,8$$

Ответ: 0,8

25. Найдите значение выражения $\frac{p(a)}{p(10-a)}$, если $p(a) = \frac{a(10-a)}{a-5}$.

Решение.

Найдём значение выражения:

$$\frac{p(a)}{p(10-a)} = \frac{a(10-a)}{a-5} \cdot \frac{10-a-5}{(10-a)(10-(10-a))} = \frac{a(10-a)}{a-5} \cdot \frac{-a+5}{(10-a)a} = -1.$$

Ответ: -1 .