

Неравенства

1. Решите неравенство $\frac{x^2}{3} \geq \frac{3x+3}{4}$.

Решение.

Перенесём две части неравенства в одну часть и избавимся от знаменателя: $4x^2 - 9x - 9 \geq 0$, приравняем левую часть к нулю и найдём корни. Отсюда $x = 3$ и $x = -0,75$. Расставив корни на координатной прямой, определим знаки неравенства, получаем: $x \geq 3$ и $x \leq -0,75$.

Ответ: $(-\infty; -0,75] \cup [3; +\infty)$.

2. Решите неравенство $\frac{x^2}{3} < \frac{3x+3}{4}$.

Решение.

Перенесём две части неравенства в одну часть и избавимся от знаменателя: $4x^2 - 9x - 9 < 0$, приравняем левую часть к нулю и найдём корни. Отсюда $x = 3$ и $x = -0,75$. Расставив корни на координатной прямой, определим знаки неравенства, получаем: $-0,75 < x < 3$.

Ответ: $(-0,75; 3)$.

3. Решите неравенство $(\sqrt{3} - 1,5)(3 - 2x) > 0$.

Решение.

- 1) Определим знак разности $\sqrt{3} - 1,5$. Так как $1,5 = \sqrt{2,25}$ и $\sqrt{3} > \sqrt{2,25}$, то $\sqrt{3} - 1,5 > 0$.
- 2) Получаем неравенство $3 - 2x > 0$. Отсюда $x < 1,5$.

Ответ: $(-\infty; 1,5)$. Другая возможная форма ответа: $x < 1,5$.

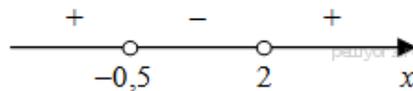
4. Решите неравенство $(x - 3)(2x + 3) < -7$.

Решение.

Раскроем скобки, приведём подобные слагаемые, разложим на множители:

$$(x - 3)(2x + 3) < -7 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2(x + 0,5)(x - 2) < 0.$$

Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак (см. рисунок). Таким образом, получаем ответ:



$$-0,5 < x < 2.$$

Ответ: $(-0,5; 2)$.

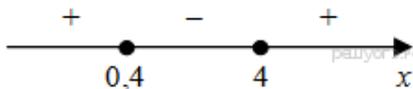
5. Решите неравенство $\frac{11x-4}{5} \geq \frac{x^2}{2}$.

Решение.

Умножим на 10, приведём подобные слагаемые и разложим на множители:

$$\frac{11x-4}{5} \geq \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 5x^2 - 22x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow 5(x - 0,4)(x - 4) \leq 0.$$

Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак (см. рисунок). Таким образом, получаем ответ:



$$0,4 \leq x \leq 4.$$

Ответ: $[0,4; 4]$.

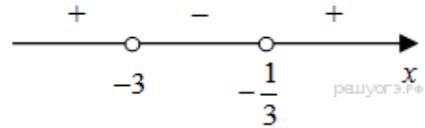
6. Решите неравенство $(3x - 2)(x + 4) > -11$.

Решение.

Раскроем скобки, приведём подобные слагаемые, разложим на множители:

$$(3x-2)(x+4) > -11 \Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 3 > 0 \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot (x+3) > 0.$$

Произведение двух сомножителей будет больше нуля, если сомножители имеют одинаковый знак (см. рисунок). Таким образом, получаем ответ:



$$\begin{cases} x > -\frac{1}{3}, \\ x < -3. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$.

7. Решите неравенство $\frac{x^2}{2} > \frac{11x-4}{5}$.

Решение.

Умножим на 10 и решим неравенство:

$$\frac{x^2}{2} > \frac{11x-4}{5} \Leftrightarrow 5x^2 - 22x + 8 > 0 \Leftrightarrow 5(x-0,4)(x-4) > 0.$$

Произведение двух сомножителей будет больше нуля, если сомножители имеют одинаковый знак.



Таким образом, получится:

$$\begin{cases} x < 0,4, \\ x > 4. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0,4) \cup (4; +\infty)$.

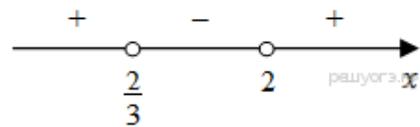
8. Решите неравенство $(x-1)(3x-5) < 1$.

Решение.

Раскроем скобки, приведём подобные слагаемые, разложим на множители:

$$(x-1)(3x-5) < 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 < 0 \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-2) < 0.$$

Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак (см. рисунок). Таким образом, получаем ответ:



$$\frac{2}{3} < x < 2.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$.

9. Решите неравенство $x^2(-x^2-64) \leq 64(-x^2-64)$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$x^2(-x^2-64) \leq 64(-x^2-64) \Leftrightarrow (x^2-64)(x^2+64) \geq 0 \Leftrightarrow x^2-64 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -8, \\ x \geq 8. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -8]; [8; +\infty)$.

10. Решите неравенство $\frac{-14}{x^2+2x-15} \leq 0$.

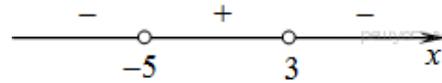
Решение.

Решим неравенство методом интервалов, для этого, сначала разложим на множители выражение $x^2 + 2x - 15$:

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$$

Теперь расставим точки на прямой и определим знаки выражения на каждом полученном промежутке (см рис.).

Таким образом, ответ $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$.



Ответ: $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$.

Примечание.

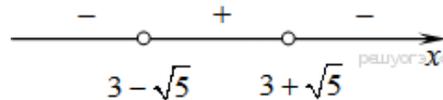
Обратите внимание, что при определении знаков выражения используется исходное выражение, а именно, $\frac{-14}{x^2 + 2x - 15}$.

11. Решите неравенство $\frac{-10}{(x-3)^2 - 5} \geq 0$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов, для этого, сначала, найдём корни уравнения $(x-3)^2 - 5 = 0$:

$$(x-3)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{5}, \\ x = 3 + \sqrt{5}. \end{cases}$$



Теперь расставим точки на прямой и определим знаки *исходного* выражения на каждом полученном промежутке (см рис.).

Таким образом, ответ $(3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5})$.

Ответ: $(3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5})$.

Примечание.

Обратите внимание, что при определении знаков выражения используется исходное выражение, а именно, $\frac{-10}{(x-3)^2 - 5}$.

12. Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7) \Leftrightarrow (x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0 \Leftrightarrow (x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0$$

Произведение двух множителей меньше нуля тогда и только тогда, когда множители имеют разный знак, поэтому:

$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0 \Leftrightarrow 7 < x < 7 + \sqrt{11}.$$

Ответ: $(7; 7 + \sqrt{11})$.

Примечание.

Обратите внимание на то, что просто сократить на $x-7$ нельзя, поскольку не известен знак этого выражения.

13. Решите неравенство $(4x-6)^2 \geq (6x-4)^2$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$(4x-6)^2 \geq (6x-4)^2 \Leftrightarrow (4x-6)^2 - (6x-4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (4x-6-(6x-4))(4x-6+(6x-4)) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-2x-2)(10x-10) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \cdot 10(x+1)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) \leq 0.$$

Произведение двух множителей меньше нуля тогда и только тогда, когда знаки множителей различны, следовательно:

$$(x+1)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Ответ: $[-1; 1]$.

14. Решите неравенство $2x^2 - 3x > 0$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) > 0.$$

Произведение двух множителей больше нуля тогда и только тогда, когда множители имеют одинаковые знаки:

$$x(2x - 3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x > 1,5. \end{cases}$$

Таким образом, ответ $(-\infty; 0) \cup (1,5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1,5; +\infty)$.

15. Решите неравенство $(x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-3)(x-3-\sqrt{5}) < 0, \text{ откуда } 3 < x < 3+\sqrt{5}.$$

Ответ: $(3; 3+\sqrt{5})$.

16. Решите неравенство $(5x-9)^2 \geq (9x-5)^2$

Решение.

Решим неравенство:

$$(5x-9)^2 \geq (9x-5)^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 90x + 81 \geq 81x^2 - 90x + 25 \Leftrightarrow 25x^2 - 81x^2 + 81 - 25 \geq 0 \Leftrightarrow -56x^2 + 56 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0$$

Данному неравенству соответствует решение $[-1; 1]$

Ответ: $[-1; 1]$