

Системы неравенств

1. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 7(3x+2) - 3(7x+2) > 2x, \\ (x-5)(x+8) < 0. \end{cases}$$

Решение.

Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 7(3x+2) - 3(7x+2) > 2x, \\ (x-5)(x+8) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x+14-21x-6 > 2x, \\ -8 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ -8 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -8 < x < 4.$$

Ответ: $(-8; 4)$.

2. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0, \\ 2-7x \leq 14-3x. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы:

$$\frac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(5-x)}{3+25-20x+4x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5-x}{2x^2-10x+14} \geq 0$$

Выражение $2x^2 - 10x + 14$ всегда больше нуля поэтому данное неравенство эквивалентно неравенству $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Решим второе неравенство:

$$2 - 7x \leq 14 - 3x \Leftrightarrow 4x \geq -12 \Leftrightarrow x \geq -3.$$

Пересекая решения обоих неравенств, получим, что решение системы отрезок $[-3; 5]$.

Ответ: $[-3; 5]$.

Примечание.

Можно сразу заметить, что в знаменателе первого выражения стоит квадрат числа плюс положительное число, значит, знаменатель всегда больше нуля.

3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{24-3x}{8+(5-2x)^2} \geq 0, \\ 22-9x \leq 43-2x. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы:

$$\frac{24-3x}{8+(5-2x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3(8-x)}{8+25-20x+4x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8-x}{4x^2-20x+33} \geq 0$$

Выражение $4x^2 - 20x + 33$ всегда больше нуля поэтому данное неравенство эквивалентно неравенству $8 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 8$.

Решим второе неравенство:

$$22 - 9x \leq 43 - 2x \Leftrightarrow 7x \geq -21 \Leftrightarrow x \geq -3.$$

Пересекая решения обоих неравенств, получим, что решение системы отрезок $[-3; 8]$.

Ответ: $[-3; 8]$.

4. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} (6x+2) - 6(x+2) > 2x, \\ (x-7)(x+6) < 0. \end{cases}$$

Решение.

Последовательно получаем:

$$\begin{cases} (6x+2) - 6(x+2) > 2x, \\ (x-7)(x+6) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+2-6x-12 > 2x, \\ -6 < x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5, \\ -6 < x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow -6 < x < -5.$$

Ответ: (-6;-5)