

Системы уравнений

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + y = 5, \\ \frac{x+2}{5} + \frac{y}{2} = -1. \end{cases}$$

Решение.

Подставим $y = 5 - 3x$ во второе уравнение системы, получим уравнение относительно x : $\frac{x+2}{5} + \frac{5-3x}{2} = -1$. Отсюда $x = 3$. Подставим $x = 3$ в уравнение $y = 5 - 3x$, получим: $y = -4$.

Ответ: (3; -4).

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x - y = -5, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 17. \end{cases}$$

Решение.

Подставим $y = x + 5$ во второе уравнение системы, получим уравнение относительно x : $x^2 - 2x(x+5) - (x+5)^2 = 17$. Отсюда $x = -7$ и $x = -3$. Подставим $x = -7$ и $x = -3$ в уравнение $y = x + 5$, получим: $y = -2$ и $y = 2$ соответственно.

Ответ: (-7; -2), (-3; 2).

3. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + 3x + y^2 = 2, \\ x^2 + 3x - y^2 = -6. \end{cases}$$

Решение.

Сложим два уравнения системы:

$$2x^2 + 6x = -4; \quad x^2 + 3x + 2 = 0; \quad (x+1)(x+2) = 0,$$

откуда получаем $x = -2$ или $x = -1$.

Вычтем из первого уравнения системы второе: $2y^2 = 8; \quad y^2 = 4$,

Таким образом, решения системы $(-2; -2)$, $(-2; 2)$, $(-1; -2)$, $(-1; 2)$.

Ответ: $(-2; -2)$, $(-2; 2)$, $(-1; -2)$, $(-1; 2)$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x^2 - 4x + 8 = y. \end{cases}$$

Решение.

Решение:

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x^2 - 4x + 8 = y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 - 4x + 8 = 3x - 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 2, \\ (x-2)(x-5) = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 4. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 5, \\ y = 13. \end{cases}$$

Ответ: (2; 4); (5; 13)

5. Решите систему
$$\begin{cases} (2x+3)^2 = 5y, \\ (3x+2)^2 = 5y \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} (2x+3)^2 = 5y, \\ (3x+2)^2 = 5y, \end{cases}; \begin{cases} (2x+3)^2 - (3x+2)^2 = 0, \\ (3x+2)^2 = 5y, \end{cases}; \begin{cases} (2x+3+3x+2)(2x+3-3x-2) = 0, \\ (3x+2)^2 = 5y, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = -1, \\ 5y = (3x+2)^2, \end{cases}; \begin{cases} x = -1, \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1, \\ 5y = (3x+2)^2, \end{cases}; \begin{cases} x = 1, \\ y = 5. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 5); (-1; \frac{1}{5})$.

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} (x-4)(y-6) = 0, \\ \frac{y-4}{x+y-8} = 2. \end{cases}$$

Решение.

Выразим одну переменную через другую из второго уравнения и подставим полученное выражение в первое уравнение

$$\begin{cases} (x-4)(y-6) = 0, \\ \frac{y-4}{x+y-8} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(y-6) = 0, \\ y-4 = 2x+2y-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(-2x+12-6) = 0, \\ y = -2x+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 3, \\ y = 6. \end{cases}$$

Заметим, что пара корней $(4; 4)$, не является корнями уравнения, потому что при $x = 4, y = 4$ знаменатель второго уравнения обращается в ноль.

Ответ: $(3; 6)$.

7. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ 6x^2 - y = 2. \end{cases}$$

Решение.

Выразим переменную y из одного уравнения и подставим во второе:

$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ 6x^2 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x^2 - 2 = 5, \\ y = 6x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 = 7, \\ y = 6x^2 - 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1, \\ y = 4. \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 4); (1; 4)$.

8. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases}$$

Решение.

Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x = 3x - 2, \\ 3x - 2 = y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 = 0, \\ y = 3x - 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; 0\right); (1; 1)$.

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 = 7y + 2, \\ x^2 + 2 = 7y + y^2. \end{cases}$

Решение.

Последовательно получаем:

$$\begin{cases} x^2 = 7y + 2, \\ x^2 + 2 = 7y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7y + 2, \\ 7y + 2 + 2 = 7y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7y + 2, \\ y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4, \\ y = 2. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 2); (4; 2)$.

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 37, \\ xy = 6. \end{cases}$

Решение.

Выразим переменную y из второго уравнения и подставим в первое:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 37, \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{36}{x^2} = 37, \\ y = \frac{6}{x}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы. Пусть $x^2 = t, t \geq 0$:

$$t + \frac{36}{t} = 37 \Leftrightarrow t^2 - 37t + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = 36. \end{cases}$$

Тогда $x = -1, x = 1, x = -6, x = 6$.

Система имеет четыре пары решений:

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = -6, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1, \\ y = 6, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -6, \\ y = -1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 6, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-1; -6); (1; 6); (-6; -1); (6; 1)$.

11. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 + y = 6, \\ 4x^2 - y = 1. \end{cases}$

Решение.

Сложив два уравнения системы, получаем $7x^2 = 7$, откуда $x = -1$ или $x = 1$.

При $x = -1$ получаем $y = 3$.

При $x = 1$ получаем $y = 3$.

Решения системы уравнений: $(-1; 3)$ и $(1; 3)$.

Ответ: $(-1; 3); (1; 3)$.

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11, \\ 4x^2 + 6y^2 = 11x. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11, \\ 22 = 11x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 + 8 = 11, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1, \\ x = 2, \end{cases}$$

откуда получаем решения системы уравнений : $(2; -1)$ и $(2; 1)$.

Ответ: $(2; -1); (2; 1)$.

13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения системы получаем $y = \frac{3}{x}$. Первое уравнение системы принимает вид

$$x^2 + \frac{9}{x^2} = 10; x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Пусть $t = x^2$. Тогда получаем уравнение $t^2 - 10t + 9 = 0$, решениями которого являются $t = 1$ и $t = 9$.

Уравнение $x^2 = 1$ имеет корни $x = -1$ и $x = 1$.

Уравнение $x^2 = 9$ имеет корни $x = -3$ и $x = 3$.

Значит, решение исходной системы: $(-1; -3)$, $(1; 3)$, $(-3; -1)$ и $(3; 1)$.

Ответ: $(-1; -3), (1; 3), (-3; -1); (3; 1)$.

14. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{24 - 3x}{8 + (5 - 2x)^2} \geq 0, \\ 22 - 9x \leq 43 - 2x. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем систему неравенств:

$$\begin{cases} 24 - 3x \geq 0, \\ -7x \leq 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8, \\ x \geq -3. \end{cases}$$

Ответ: $[-3; 8]$.

15. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4(9x + 3) - 9(4x + 3) > 3x, \\ (x - 2)(x + 9) < 0. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем систему неравенств:

$$\begin{cases} 36x + 12 - 36x - 27 > 3x, \\ -9 < x < 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5, \\ -9 < x < 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-9; -5)$.

16. Решите уравнение $x^6 = (6x - 8)^3$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$x^6 = (6x - 8)^3 \Leftrightarrow x^2 = 6x - 8 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) = 0,$$

откуда $x = 2$ или $x = 4$.

Ответ: 2; 4.

17. Сократите дробь $\frac{(2x)^4 \cdot x^{-10}}{x^{-9} \cdot 5x^3}$.

Решение.

Преобразуем выражение:

$$\frac{16x^{4-10}}{x^{-9} \cdot 5x^3} = 3,2.$$

Ответ: 3,2.

18. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x+y)^2 = 2y, \\ (x+y)^2 = 2x. \end{cases}$

Решение.

Вычтем из первого уравнения второе и получим соотношение: $2y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = x$

Подставив полученное выражение в первое уравнение системы, получаем

$$(x+x)^2 = 2x \Leftrightarrow (2x)^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 0,5. \end{cases}$$

Таким образом, искомым решением являются точки: $(0;0)$ и $(0,5;0,5)$

Ответ: $(0;0)$, $(0,5;0,5)$