

Уравнения

1. Один из корней уравнения $3x^2 + 5x + 2m = 0$ равен -1 . Найдите второй корень.

Решение.

Подставим известный корень в уравнение: $3 - 5 + 2m = 0$. Получим уравнение относительно m .
Решим его: $2m = 2$; $m = 1$. Подставим m в уравнение: $3x^2 + 5x + 2 = 0$, откуда

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

2. Решите уравнение: $x^3 - 3x^2 - 8x + 24 = 0$.

Решение.

Раскладывая на множители левую часть уравнения, получаем $(x - 3)(x^2 - 8) = 0$. Таким образом, корни уравнения $x = -2\sqrt{2}$, $x = 2\sqrt{2}$, $x = 3$.

Ответ: $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 3 .

3. Решите уравнение: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Решение.

Сделаем замену $y = x^2$. Получаем уравнение $y^2 - 5y + 4 = 0$.

Корни: $y = 1$, $y = 4$.

Если $y = 1$, то $x = -1$ или $x = 1$.

Если $y = 4$, то $x = -2$ или $x = 2$.

Ответ: -2 ; -1 , 1 , 2 .

4. Решите уравнение: $x^3 = x^2 - 7x + 7$

Решение.

Перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители:

$$x^3 - x^2 + 7x - 7 = 0; \quad x^2(x - 1) + 7(x - 1) = 0; \quad (x - 1)(x^2 + 7) = 0.$$

$x^2 + 7 > 0$ при всех значениях x , поэтому $x - 1 = 0$. Значит, $x = 1$.

Ответ: 1 .

5. Решите уравнение: $(2x - 3)^2 = (1 - 2x)^2$.

Решение.

Перенесем все члены влево и применим формулу разности квадратов:

$$(2x - 3)^2 - (1 - 2x)^2 = 0; \quad -2(4x - 4) = 0; \quad x = 1.$$

Другой способ. Раскроем скобки, пользуясь формулой квадрата разности:

$$4x^2 - 12x + 9 = 1 - 4x + 4x^2; \quad 8x = 8; \quad x = 1.$$

Ответ: 1 .

6. Решите уравнение $(x^2 - 25)^2 + (x^2 + 3x - 10)^2 = 0$.

Решение.

Квадрат любого числа неотрицателен. Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, только если они оба равны нулю. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 25 = 0, \\ x^2 + 3x - 10 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = -5$ или $x = 5$.

Из второго уравнения $x = -5$ или $x = 2$.

Системе удовлетворяет единственное значение $x = -5$.

Ответ: -5 .

7. Решите уравнение $x^3 + 4x^2 = 9x + 36$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 = 9x + 36 &\Leftrightarrow x^2(x+4) - 9(x+4) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+4)(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = -3, \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $-4; -3; 3$.

8. Решите уравнение $(x-2)^2(x-3) = 12(x-2)$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\begin{aligned} (x-2)^2(x-3) = 12(x-2) &\Leftrightarrow (x-2)^2(x-3) - 12(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)((x-2)(x-3) - 12) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 2, \\ x = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $-1; 2; 6$.

9. Решите уравнение $(x-3)(x-4)(x-5) = (x-2)(x-4)(x-5)$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} (x-3)(x-4)(x-5) = (x-2)(x-4)(x-5) &\Leftrightarrow (x-3)(x-4)(x-5) - (x-2)(x-4)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-4)(x-5)(x-3-x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ x = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $4; 5$.

10. Решите уравнение $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 4. \end{cases}$$

Поскольку подкоренное выражение не может быть меньше нуля, область допустимых значений исходного уравнения ограничивается неравенством $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$, значит, решением уравнения является только $x = -2$.

Ответ: -2 .

11. Решите уравнение $(x+5)^3 = 25(x+5)$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$(x+5)^3 = 25(x+5) \Leftrightarrow (x+5)^3 - 25(x+5) = 0 \Leftrightarrow (x+5)((x+5)^2 - 25) \Leftrightarrow (x+5)(x^2 + 10x + 25 - 25) = 0 \Leftrightarrow \\ (x+5)(x^2 + 10x) = 0 \Leftrightarrow (x+5) \cdot x(x+10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10, \\ x = -5, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: -10; -5; 0.

12. Решите уравнение $-3x^2 - 14x - 7 = (x-1)^2$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$-3x^2 - 14x - 7 = (x-1)^2 \Leftrightarrow -3x^2 - 14x - 7 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = -2. \end{cases}$$

Ответ: -1; -2.

13. Решите уравнение $x(x^2 + 2x + 1) = 6(x+1)$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$x(x^2 + 2x + 1) = 6(x+1) \Leftrightarrow x(x+1)^2 - 6(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x(x+1) - 6) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = -3, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: -3; -1; 2.

14. Решите уравнение $\frac{4}{x-9} + \frac{9}{x-4} = 2$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{4}{x-9} + \frac{9}{x-4} = 2 \Leftrightarrow \frac{4(x-4) + 9(x-9)}{(x-9)(x-4)} = 2 \Leftrightarrow 2(x^2 - 13x + 36) = 13x - 97 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 39x + 169 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{39-13}{4}, \\ x = \frac{39+13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6,5, \\ x = 13. \end{cases}$$

Ответ: 6,5; 13.

15. Решите уравнение $10x^2 - 12x + 1 = -10x^2$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$10x^2 - 12x + 1 = -10x^2 \Leftrightarrow 20x^2 - 12x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,1, \\ x = 0,5. \end{cases}$$

Ответ: 0,1; 0,5.

16. Решите уравнение $\frac{3}{2}x^2 - 2x - 2 = 0$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{3}{2}x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{2}{3}; 2$.

17. Решите уравнение $\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} - 6 = 0$.

Решение.

Пусть $\frac{1}{x-2} = t$, тогда уравнение примет вид

$$t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2, \\ t = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} = -2, \\ \frac{1}{x-2} = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, 5, \\ x = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $1, 5; \frac{7}{3}$.

18. Решите уравнение $8x^2 + 4x + 38 = 3x^2 + 5x + 86$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$8x^2 + 4x + 38 = 3x^2 + 5x + 86 \Leftrightarrow 5x^2 - x - 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = 3, 2. \end{cases}$$

Ответ: $-3; 3, 2$.

19. Решите уравнение $x^6 = (6x - 5)^3$.

Решение.

Извлечём кубический корень:

$$x^6 = (6x - 5)^3 \Leftrightarrow x^2 = 6x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 5. \end{cases}$$

Ответ: $1; 5$.

20. Решите уравнение $(x+2)^4 - 4(x+2)^2 - 5 = 0$.

Решение.

Пусть $(x+2)^2 = t$, $t \geq 0$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1, \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = -\sqrt{5}, \\ x+2 = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{5}, \\ x = -2 + \sqrt{5}. \end{cases}$$

Ответ: $-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}$.

21. Решите уравнение $x^4 = (x-20)^2$.

Решение.

Квадраты чисел равны, если сами числа равны или противоположны:

$$x^4 = (x-20)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x-20, \\ x^2 = 20-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 20 = 0, \\ x^2 + x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ x = 4. \end{cases}$$

Ответ: $-5; 4$.

22. Решите уравнение $\frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 9} = 1$.

Решение.

Данное уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 9} = 1, \\ x^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 7x + 3 = x^2 - 9, \\ (x-3)(x+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7x + 12 = 0, \\ x \neq -3, \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -4, \\ x = -3, \end{cases} \\ x \neq -3, \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4.$$

Ответ: -4.

23. Решите уравнение $(x-4)(x-5)(x-6) = (x-2)(x-5)(x-6)$.

Решение.

Исходное уравнение приводится к виду:

$$-2(x-5)(x-6) = 0,$$

откуда $x = 5$ или $x = 6$.

Ответ: 5; 6.

24. Решите уравнение $(x-2)(x-3)(x-4) = (x-3)(x-4)(x-5)$

Решение.

Решим уравнение:

$$\begin{aligned} (x-2)(x-3)(x-4) &= (x-3)(x-4)(x-5) \Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x-4) - (x-3)(x-4)(x-5) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-4)(x-2-x+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x-3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = 4 \end{aligned}$$

Ответ: 3;4