

## Задачи на движение по воде

1. Из пункта  $A$  в пункт  $B$ , расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта  $B$  вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от  $A$  до  $B$  пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт  $B$ , если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?

**Решение.**

Пусть скорость течения реки (и плота)  $x$  км/ч. Тогда скорость катера против течения равна  $4x - x = 3x$  км/ч, а по течению  $4x + x = 5x$  км/ч. Следовательно, скорость катера против течения в 3 раза больше скорости плота, а по течению — в 5 раз больше скорости плота. Если плот до встречи проплыл  $S$  км, то катер — в 3 раза больше, т. е.  $3S$  км. После встречи катер пройдет  $3S$  км, а плот — в 5 раз меньше, т. е.  $\frac{3S}{5}$  км. Всего плот пройдет

$$S + \frac{3S}{5} = \frac{8S}{5}.$$

Отношение пройденного плотом пути ко всему пути равно  $\frac{\frac{8S}{5}}{4S} = \frac{2}{5}$ .

**Приведём другое решение.** Пусть скорость течения реки (и плота)  $x$  км/ч. Тогда скорость катера против течения равна  $4x - x = 3x$  км/ч, а по течению  $4x + x = 5x$  км/ч. Скорость сближения катера и плота равна  $x + 3x = 4x$  км/ч. Встреча произошла через  $\frac{AB}{4x}$  ч. За это время плот проплыл расстояние, равное

$$x \cdot \frac{AB}{4x} = \frac{AB}{4}, \text{ а катер — } \frac{3AB}{4}.$$

Обратный путь катер пройдет за  $\frac{\frac{3AB}{4}}{5x} = \frac{3AB}{20x}$  ч. Плот за это время проплывет расстояние, равное  $x \cdot \frac{3AB}{20x} = \frac{3AB}{20}$ , а всего он проплывет  $\frac{AB}{4} + \frac{3AB}{20} = \frac{2AB}{5}$ .

Ответ: плот пройдет  $\frac{2}{5}$  всего пути.

2. Расстояние между пристанями  $A$  и  $B$  равно 80 км. Из  $A$  в  $B$  по течению реки отправился плот, а через 2 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт  $B$ , тотчас повернула обратно и возвратилась в  $A$ . К этому времени плот прошел 22 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

**Решение.**

Обозначим искомую скорость (в км/ч) за  $v$ . Плот прошёл 22 км, значит, он плыл 11 часов, а яхта 9 часов. Таким образом, имеем:

$$\frac{80}{v+2} + \frac{80}{v-2} = 9; \quad 80v - 160 + 80v + 160 = 9v^2 - 36; \quad 9v^2 - 160v - 36 = 0,$$

откуда находим  $v = 18$ .

Ответ: 18 км/ч.

3. Моторная лодка прошла 36 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 5 часов. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде.

**Решение.**

Обозначим  $x$  км/ч искомую скорость. По течению реки лодка двигалась  $\frac{36}{x+3}$  ч.

Против течения лодка шла  $\frac{36}{x-3}$  ч. Получаем уравнение

$$\frac{36}{x-3} + \frac{36}{x+3} = 5.$$

Решим его:

$$\frac{72x}{(x-3)(x+3)} = 5; \quad \begin{cases} 5x^2 - 72x - 45 = 0, \\ x^2 - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения: 15 и  $-0,6$ . Следовательно, скорость лодки равна 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

4. Пристани  $A$  и  $B$  расположены на реке, скорость течения которой на этом участке равна 3 км/ч. Лодка проходит туда и обратно без остановок со средней скоростью 8 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

**Решение.**

Пусть  $x$  км/ч — собственная скорость лодки. Тогда скорость движения по течению равна  $x+3$  км/ч, а скорость движения против течения равна  $x-3$  км/ч. Обозначим  $S$  расстояние между пристанями. Время, затраченное на весь путь, равно

$$\frac{S}{x+3} + \frac{S}{x-3}.$$

По условию средняя скорость равна 8 км/ч, а весь путь равен  $2S$ . Следовательно,

$$\left(\frac{S}{x+3} + \frac{S}{x-3}\right) \cdot 8 = 2S.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{4}; \quad \frac{2x}{x^2-9} = \frac{1}{4}; \quad \begin{cases} x^2 - 8x - 9 = 0, \\ x^2 - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Получаем:  $x=9$  или  $x=-1$ . Корень  $-1$  не является решением задачи. Значит, скорость лодки равна 9 км/ч.

Ответ: 9 км/ч.

5. Туристы проплыли на лодке от лагеря некоторое расстояние вверх по течению реки, затем причалили к берегу и, погуляв 2 часа, вернулись обратно через 6 часов от начала путешествия. На какое расстояние от лагеря они отплыли, если скорость течения реки равна 3 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

**Решение.**

Пусть  $S$  км — расстояние, на которое от лагеря отплыли туристы. Зная, что скорость течения реки — 3 км/ч, а скорость лодки — 6 км/ч, найдём, что время, за которое они проплыли туда и обратно, составляет  $\frac{S}{6-3} + \frac{S}{6+3}$  ч. Учитывая, что они были на стоянке 2 часа и вернулись через 6 часов после отплытия можно составить уравнение:

$$\frac{S}{3} + \frac{S}{9} + 2 = 6.$$

Отсюда  $S=9$  км.

Ответ: 9 км.

6. Рыболов проплыл на лодке от пристани некоторое расстояние вверх по течению реки, затем бросил якорь, 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно через 5 часов от начала путешествия. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

**Решение.**

Пусть  $S$  км — расстояние, на которое отплыл рыболов. Зная, что скорость течения реки — 2 км/ч, а скорость лодки — 6 км/ч, найдём, что время, за которое он проплыл туда и обратно, составляет  $\frac{S}{6-2} + \frac{S}{6+2}$  ч. Учитывая, что он был на стоянке 2 часа и вернулся через 5 часов после отплытия можно составить уравнение:

$$\frac{S}{4} + \frac{S}{8} + 2 = 5.$$

Отсюда  $S = 8$  км.

Ответ: 8 км.

7. Катер прошёл от одной пристани до другой, расстояние между которыми по реке равно 48 км, сделал стоянку на 20 мин и вернулся обратно через  $5\frac{1}{3}$  ч после начала поездки. Найдите скорость течения реки, если известно, что скорость катера в стоячей воде равна 20 км/ч.

**Решение.**

Пусть скорость течения реки равна  $x$  км/ч. Тогда скорость катера по течению реки равна  $(20+x)$  км/ч, а против течения —  $(20-x)$  км/ч. Время движения катера по течению реки равно  $\frac{48}{20+x}$  ч, а против течения —  $\frac{48}{20-x}$  ч, по смыслу задачи  $0 < x < 20$ . Весь путь занял  $5\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 5$  ч. Составим и решим уравнение:

$$\frac{48}{20+x} + \frac{48}{20-x} = 5 \Leftrightarrow \frac{48(20-x) + 48(20+x)}{(20+x)(20-x)} = 5 \Leftrightarrow_{0 < x < 20} 48 \cdot 20 \cdot 2 = 5(400 - x^2) \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow_{0 < x < 20} x = 4.$$

Тем самым, скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 4 км/ч.

8. Моторная лодка прошла от одной пристани до другой, расстояние между которыми по реке равно 16 км, сделала стоянку на 40 мин и вернулась обратно через  $3\frac{2}{3}$  ч после начала поездки. Найдите скорость течения реки, если известно, что скорость моторной лодки в стоячей воде равна 12 км/ч.

**Решение.**

Пусть скорость течения реки равна  $x$  км/ч. Тогда скорость лодки по течению реки равна  $(12+x)$  км/ч, а против течения  $(12-x)$  км/ч. Время движения лодки от одной пристани до другой по течению реки равно  $\frac{16}{12+x}$  ч, а против течения  $\frac{16}{12-x}$  ч. Весь путь занял  $3\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 3$  ч. Составим уравнение:

$$\frac{16}{12+x} + \frac{16}{12-x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 4. \end{cases}$$

Корень  $-4$  не подходит нам по условию задачи. Скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 4 км/ч.

9. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 165 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 18 часов после отплытия из него.

**Решение.**

Пусть  $x$  км/ч — скорость теплохода в неподвижной воде, тогда  $x + 4$  км/ч — скорость теплохода по течению,  $x - 4$  км/ч — скорость теплохода против течения. По течению теплоход движется  $\frac{165}{x+4}$  часов, а против течения  $\frac{165}{x-4}$  часов, весь путь занял  $18 - 5 = 13$  часов, составим уравнение:

$$\frac{165}{x+4} + \frac{165}{x-4} = 13 \Leftrightarrow \frac{165(x-4) + 165(x+4)}{(x-4)(x+4)} = 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 330x = 13x^2 - 16 \cdot 13 \Leftrightarrow 13x^2 - 330x - 208 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{13}, \\ x = 26. \end{cases}$$

Корень  $-\frac{8}{13}$  не подходит по условию задачи, следовательно, скорость теплохода равна 26 км/ч.

Ответ: 26.

**10.** Баржа прошла по течению реки 40 км и, повернув обратно, прошла ещё 30 км, затратив на весь путь 5 часов. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

**Решение.**

Пусть  $x$  км/ч — собственная скорость баржи, тогда  $x - 5$  км/ч — скорость баржи против течения, а  $x + 5$  — скорость баржи по течению. По течения баржа двигалась  $\frac{40}{x+5}$  часов, а против течения  $\frac{30}{x-5}$  часов. Баржа затратила на весь путь 5 часов, составим уравнение:

$$\frac{40}{x+5} + \frac{30}{x-5} = 5 \Leftrightarrow \frac{40(x-5) + 30(x+5)}{(x-5)(x+5)} = 5 \Leftrightarrow 5(x^2 - 25) = 70x - 50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 15. \end{cases}$$

Корень  $-1$  не подходит по условию задачи, следовательно, скорость баржи равна 15 км/ч.

Ответ: 15

**11.** От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 70 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью, на 8 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно.

**Решение.**

Пусть  $x$  км/ч — скорость первого теплохода, тогда  $x + 8$  км/ч — скорость второго теплохода. Расстояние между пристанями 70 км, второй теплоход отправился в путь через час после выхода первого, причём в конечный пункт оба теплохода прибыли одновременно, составим уравнение:

$$\frac{70}{x} - \frac{70}{x+8} = 1 \Leftrightarrow \frac{70(x+8) - 70x}{x(x+8)} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 8x = 560 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 560 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -28, \\ x = 20. \end{cases}$$

Корень  $-28$  не подходит по условию задачи, следовательно, скорость первого теплохода равна 20 км/ч.

Ответ: 20.

**12.** Расстояние между пристанями А и В равно 99 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошёл 22 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

**Решение.**

Плот прошёл 22 км, значит, он плыл 11 часов, из которых лодка находилась в пути 10 часов. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна  $v$  км/ч, тогда

$$\frac{99}{v+2} + \frac{99}{v-2} = 10 \Leftrightarrow 99v - 198 + 99v + 198 = 10v^2 - 40 \Leftrightarrow v^2 - 19,8v - 4 = 0$$

откуда  $v = 20$ .

Ответ:  $v = 20$ .

**13.** Свежие фрукты содержат 86 % воды, а высушенные — 23 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 72 кг высушенных фруктов?

**Решение.**

Заметим, что сухая часть свежих фруктов составляет 14%, а высушенных — 77%. Значит, для приготовления 72 кг высушенных фруктов требуется  $\frac{77}{14} \cdot 72 = 396$  кг свежих.

Ответ: 396 кг.

**14.** Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 3 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 9 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 6 км/ч меньше скорости второго.

**Решение.**

Пусть скорость первого бегуна  $v$  км/ч, тогда скорость второго  $v + 6$  км/ч, а длина круга равна  $\frac{51(v+6)}{60}$ . Получаем уравнение:

$$\frac{51(v+6)}{60} - 3 = v \Leftrightarrow 51(v+6) - 180 = 60v \Leftrightarrow 9v = 126,$$

откуда  $v = 14$ .

Ответ: 14.

**15.** Расстояние между пристанями А и В равно 75 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошёл 44 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

**Решение.**

Плот прошёл 44 км, значит, он плыл 11 часов, из которых лодка находилась в пути 10 часов. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна  $v$  км/ч, тогда

$$\frac{75}{v+4} + \frac{75}{v-4} = 10 \Leftrightarrow 75v - 300 + 75v + 300 = 10v^2 - 160 \Leftrightarrow v^2 - 15v - 16 = 0,$$

откуда  $v = 16$ .

Ответ: 16.

**16.** Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 76 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 1 час, а в пункт отправления теплоход возвращается через 20 часов после отплытия из него.

**Решение.**

Пусть скорость теплохода равна  $v$  км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{76}{v-3} + \frac{76}{v+3} = 19 \Leftrightarrow 4v + 12 + 4v - 12 = v^2 - 9 \Leftrightarrow v^2 - 8v - 9 = 0,$$

откуда  $v = 9$ .

Ответ: 9.

**17.** От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 153 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 4 часа после этого следом за ним, со скоростью, на 16 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно.

**Решение.**

Пусть  $x$  км/ч — скорость первого теплохода, тогда  $x + 16$  км/ч — скорость второго теплохода. Расстояние между пристанями 153 км, второй теплоход отправился в путь через 4 часа после выхода первого, причём в конечный пункт оба теплохода прибыли одновременно, составим уравнение:

$$\frac{153}{x} - \frac{153}{x+16} = 4 \Leftrightarrow \frac{153(x+16) - 153x}{x(x+16)} = 4 \Leftrightarrow 4x^2 + 64x = 2448 \Leftrightarrow x^2 + 16x - 612 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -34, \\ x = 18. \end{cases}$$

Корень  $-34$  не подходит по условию задачи, следовательно, скорость первого теплохода равна 18 км/ч.

Ответ: 18.

**18.** Баржа прошла по течению реки 48 км и, повернув обратно, прошла ещё 36 км, затратив на весь путь 6 часов. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

**Решение.**

Пусть  $x$  км/ч — собственная скорость баржи, тогда  $x - 5$  км/ч — скорость баржи против течения, а  $x + 5$  — скорость баржи по течению. По течения баржа двигалась  $\frac{48}{x+5}$  часов, а против течения  $\frac{36}{x-5}$  часов. Баржа затратила на весь путь 6 часов, составим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{48}{x+5} + \frac{36}{x-5} = 6 &\Leftrightarrow \frac{48(x-5) + 36(x+5)}{(x-5)(x+5)} = 6 \Leftrightarrow 6(x^2 - 25) = 84x - 60 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 14x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 15. \end{cases} \end{aligned}$$

Корень  $-1$  не подходит по условию задачи, следовательно, скорость баржи равна 15 км/ч.

Ответ: 15

**19.** Расстояние между пристанями А и В равно 63 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 20 км. Найдите скорость моторной лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

**Решение.**

Обозначим искомую скорость (в км/ч) за  $v$ . Плот прошёл 20 км, значит, он плыл 5 часов, а моторная лодка 4 часа. Таким образом, имеем:

$$\frac{63}{v+4} + \frac{63}{v-4} = 4; \quad 63v - 252 + 63v + 252 = 4v^2 - 64; \quad 4v^2 - 126v - 64 = 0,$$

откуда находим  $v = 32$ .

Ответ: 32 км/ч.

**20.** Свежие фрукты содержат 88 % воды, а высушенные — 30 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 6 кг высушенных фруктов?

**Решение.**

Заметим, что сухая часть свежих фруктов составляет 12%, а высушенных — 70%. Значит, для приготовления 6 кг высушенных фруктов требуется  $\frac{70}{12} \cdot 6 = 35$  кг свежих.

Ответ: 35 кг.