

Задачи на совместную работу

1. Два оператора, работая вместе, могут набрать текст газеты объявлений за 8 ч. Если первый оператор будет работать 3 ч, а второй 12 ч, то они выполнят только 75% всей работы. За какое время может набрать весь текст каждый оператор, работая отдельно?

Решение.

Пусть первый оператор может выполнить данную работу за x часов, а второй за y часов. За один час первый оператор выполняет $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а второй $\frac{1}{y}$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{3}{x} + \frac{12}{y} = \frac{3}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{3}{y} = \frac{1}{8}; \end{cases} \quad y = 24, \quad x = 12.$$

Ответ: первый оператор за 12 ч, второй оператор за 24 ч.

2. На изготовление 231 детали ученик тратит на 11 часов больше, чем мастер на изготовление 462 таких же деталей. Известно, что ученик за час делает на 4 детали меньше, чем мастер. Сколько деталей в час делает ученик?

Решение.

Предположим, что ученик делает x деталей в час. Тогда мастер делает $x + 4$ детали в час.

На изготовление 231 детали ученик потратит $\frac{231}{x}$ ч, а мастер тратит $\frac{462}{x+4}$ ч на изготовление 462 деталей.

Составим уравнение по условию задачи:

$$\frac{231}{x} - \frac{462}{x+4} = 11.$$

Решим уравнение:

$$\frac{21}{x} - \frac{42}{x+4} = 1; \quad \frac{21x+84-42x}{x(x+4)} = 1; \quad 84-21x-x(x+4)=0; \quad x^2+25x-84=0.$$

Корни полученного квадратного уравнения: -28 и 3 . Отбрасывая отрицательный корень, находим, что ученик делает в час 3 детали.

Ответ: 3.

3. Чтобы накачать в бак 117 л воды, требуется на 5 минут больше времени, чем на то, чтобы выкачать из него 96 л воды. За одну минуту можно выкачать на 3 л воды больше, чем накачать. Сколько литров воды накачивается в бак за минуту?

Решение.

Пусть за минуту в бак накачивается x литров воды. Тогда за минуту выкачивается $x + 3$ л воды. По условию задачи составим уравнение:

$$\frac{117}{x} - \frac{96}{x+3} = 5,$$

откуда

$$\begin{cases} 21x + 351 = 5x(x + 3), \\ x(x + 3) \neq 0. \end{cases}$$

Получаем квадратное уравнение

$$5x^2 - 6x - 351 = 0,$$

имеющее корни: $x = 9$ и $x = -7,8$.

Отбрасывая отрицательный корень, находим, что за минуту в бак накачивается 9 л воды.

Ответ: 9.

4. Дима и Саша выполняют одинаковый тест. Дима отвечает за час на 12 вопросов теста, а Саша — на 22. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Дима закончил свой тест позже Саши на 75 минут. Сколько вопросов содержит тест?

Решение.

Пусть x — количество вопросов теста. Тогда получаем:

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{22} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{5x}{132} = \frac{5}{4},$$

откуда находим $x = 33$.

Ответ: 33

5. Две трубы наполняют бассейн за 8 часов 45 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 21 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

Решение.

По условию первая труба за одну минуту наполняет $\frac{1}{1260}$ часть бассейна, а две трубы вместе за одну минуту наполняют $\frac{1}{525}$ часть бассейна. Таким образом, одна вторая труба за минуту наполняет $\frac{1}{525} - \frac{1}{1260} = \frac{1260 - 525}{1260 \cdot 525} = \frac{1}{900}$ часть бассейна, то есть она наполнит весь бассейн за 15 часов.

Ответ: 15.

6. Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 130 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 136 литров?

Решение.

Пусть вторая труба пропускает x литров воды в минуту, тогда первая труба пропускает $x - 2$ литра в минуту. Вторая труба заполняет резервуар объёмом 130 литров за $\frac{130}{x}$ минут. Поскольку первая труба заполняет резервуар объёмом 136 литров за $\frac{136}{x-2}$ минут, что по условию задачи на 4 минуты больше, чем $\frac{130}{x}$, получаем уравнение:

$$\frac{136}{x-2} - \frac{130}{x} = 4$$

Решим уравнение:

$$\frac{136x - 130x + 260 - 4x^2 + 8x}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7x - 130}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+13)(x-10)}{x(x-2)} = 0,$$

$$x = 10 \text{ или } x = -6,5.$$

Отбрасывая постороннее решение $-6,5$, получаем, что вторая труба пропускает 10 литров в минуту.

Ответ: 10 литров в минуту.

7. Первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 60 деталей, на 3 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Решение.

Пусть x — число деталей, изготавливаемых первым рабочим за час, тогда $x - 10$ — число деталей, изготавливаемых вторым рабочим за час. Заказ, состоящий из 60 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй, составим уравнение:

$$\frac{60}{x-10} - \frac{60}{x} = 3 \Leftrightarrow \frac{60x - 60x + 600}{x(x-10)} = 3 \Leftrightarrow 3(x^2 - 10x) = 600 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 10x - 200 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10, \\ x = 20. \end{cases}$$

Корень -10 не подходит по условию задачи, следовательно, первый рабочий изготавливает 20 деталей в час. Значит, второй рабочий изготавливает 10 деталей в час.

Ответ: 10.

8. Три бригады изготовили вместе 266 деталей. Известно, что вторая бригада изготовила деталей в 4 раза больше, чем первая и на 5 деталей меньше, чем третья. На сколько деталей больше изготовила третья бригада, чем первая.

Решение.

Пусть x — число деталей, изготовленных второй бригадой, тогда первая бригада изготовила $\frac{x}{4}$ деталей, а третья — $x + 5$ деталей. Вместе три бригады изготовили 266 деталей, составим уравнение:

$$x + \frac{x}{4} + x + 5 = 266 \Leftrightarrow \frac{9x}{4} = 261 \Leftrightarrow x = 116.$$

Вторая бригада изготовила 116 деталей, следовательно, первая бригада изготовила $\frac{116}{4} = 29$ деталей, а третья — 121 деталь. Таким образом, третья бригада изготовила на $121 - 29 = 92$ детали больше.

Ответ: 92.

9. Игорь и Паша красят забор за 20 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 24 часа, а Володя и Игорь — за 30 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Решение.

Обозначим выполняемую мальчиками работу по покраске забора за 1. Пусть за $\frac{1}{v_1}$, $\frac{1}{v_2}$, $\frac{1}{v_3}$ часов Игорь, Паша и Володя, соответственно, покрасят забор, работая самостоятельно. Игорь и Паша красят забор за 20 часов:

$$\frac{1}{v_1 + v_2} = 20 \Leftrightarrow v_1 + v_2 = \frac{1}{20}$$

Паша и Володя красят этот же забор за 24 часа:

$$\frac{1}{v_3 + v_2} = 24 \Leftrightarrow v_3 + v_2 = \frac{1}{24},$$

а Володя и Игорь — за 30 часов:

$$\frac{1}{v_1 + v_3} = 30 \Leftrightarrow v_1 + v_3 = \frac{1}{30}.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = \frac{1}{20}, \\ v_3 + v_2 = \frac{1}{24}, \\ v_1 + v_3 = \frac{1}{30}. \end{cases}$$

Просуммируем левые и правые части данных трех уравнений, получим:

$$\begin{aligned} 2(v_1 + v_2 + v_3) &= \frac{1}{20} + \frac{1}{24} + \frac{1}{30} \Leftrightarrow 2(v_1 + v_2 + v_3) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{v_1 + v_2 + v_3} = 16. \end{aligned}$$

Ответ: 16.

Приведём другое решение.

За один час Игорь и Паша красят $\frac{1}{20}$ забора, Паша и Володя красят $\frac{1}{24}$ забора, а Володя и Игорь — за $\frac{1}{30}$ забора. Работая вместе, за один час два Игоря, Паши и Володи покрасили бы:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{24} + \frac{1}{30} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8} \text{ забора.}$$

Тем самым, они могли бы покрасить один забор за 8 часов. Поскольку каждый из мальчиков был учтен два раза, в реальности Игорь, Паша и Володя могут покрасить забор за 16 часов.

Примечание Дмитрия Гущина.

Заметим, что за 120 часов Игорь и Паша могут покрасить 6 заборов, Паша и Володя — 5 заборов, а Володя и Игорь — 4 забора. Работая вместе, за 120 часов они могли бы покрасить 15 заборов. Следовательно, один забор два Игоря, два Паши и два Володи могут покрасить за 8 часов. Поэтому, работая втроем, Игорь, Паша и Володя покрасят забор за 16 часов.

10. Три бригады вместе изготовили 114 карданных валов. Известно, что вторая бригада изготовила карданных валов в 3 раза больше, чем первая, и на 16 карданных валов меньше, чем третья. На сколько карданных валов больше изготовила третья бригада, чем первая?

Решение.

Пусть первая бригада изготовила x карданных валов. Тогда вторая бригада изготовила $3x$ карданных валов, а третья $3x + 16$ карданных валов. Из уравнения $7x + 16 = 114$ находим, что первая бригада изготовила 14 карданных валов, а третья 58 карданных валов. Таким образом, третья бригада изготовила на 44 карданных вала больше, чем первая.

Ответ: 44.

11. Три бригады изготовили вместе 114 деталей. Известно, что вторая бригада изготовила деталей в 3 раза больше, чем первая, и на 16 деталей меньше, чем третья. На сколько деталей больше изготовила третья бригада, чем первая.

Решение.

Пусть первая бригада изготовила x деталей. Тогда вторая бригада изготовила $3x$ деталей, а третья $3x + 16$ деталей. Значит, вместе они изготовили $7x + 16$ деталей. Из уравнения $7x + 16 = 114$ находим, что первая бригада изготовила 14 деталей, а третья 58 деталей. Таким образом, третья бригада изготовила на 44 детали больше, чем первая.

Ответ: 44.

12. Три бригады вместе изготовили 114 синхронизаторов передач. Известно, что вторая бригада изготовила синхронизаторов в 3 раза больше, чем первая, и на 16 синхронизаторов меньше, чем третья. На сколько синхронизаторов передач больше изготовила третья бригада, чем первая.

Решение.

Пусть первая бригада изготовила x синхронизаторов. Тогда вторая бригада изготовила $3x$ синхронизаторов, а третья $3x + 16$ синхронизаторов. Из уравнения $7x + 16 = 114$ находим, что первая бригада изготовила 14 синхронизаторов, а третья 58 синхронизаторов. Таким образом, третья бригада изготовила на 44 синхронизатора больше, чем первая.

Ответ: 44.

13. Игорь и Паша красят забор за 18 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 20 часов, а Володя и Игорь — за 30 часов. За сколько минут мальчики покрасят забор, работая втроём?

Решение.

За один час Игорь и Паша красят $\frac{1}{18}$ забора, Паша и Володя красят $\frac{1}{20}$ забора, а Володя и Игорь — за $\frac{1}{30}$ забора. Работая вместе, за один час два Игоря, Паши и Володи покрасили бы:

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{50}{360} = \frac{5}{36} \text{ забора.}$$

Тем самым, они могли бы покрасить один забор за 7,2 часа. Поскольку каждый из мальчиков был учтен два раза, в реальности Игорь, Паша и Володя могут покрасить забор за $14,4 \text{ часа} = 864 \text{ минуты}$.

Ответ: 864

14. Три бригады изготовили вместе 248 деталей. Известно, что вторая бригада изготовила деталей в 4 раза больше, чем первая и на 5 деталей меньше, чем третья. На сколько деталей больше изготовила третья бригада, чем первая.

Решение.

Пусть x — число деталей, изготовленных второй бригадой, тогда первая бригада изготовила $\frac{x}{4}$ деталей, а третья — $x + 5$ деталей. Вместе три бригады изготовили 248 деталей, составим уравнение:

$$x + \frac{x}{4} + x + 5 = 248 \Leftrightarrow \frac{9x}{4} = 243 \Leftrightarrow x = 108.$$

Вторая бригада изготовила 108 деталей, следовательно, первая бригада изготовила $\frac{108}{4} = 27$ деталей, а третья — 113 деталь. Таким образом, третья бригада изготовила на $113 - 27 = 86$ деталей больше.

Ответ: 86.

15. Первый рабочий за час делает на 9 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 112 деталей, на 4 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Решение.

Пусть x — число деталей, изготавливаемых первым рабочим за час, тогда $x - 9$ — число деталей, изготавливаемых вторым рабочим за час. Заказ, состоящий из 112 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй, составим уравнение:

$$\frac{112}{x-9} - \frac{112}{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{112x - 112x + 1008}{x(x-9)} = 4 \Leftrightarrow 4(x^2 - 9x) = 1008 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 9x - 252 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12, \\ x = 21. \end{cases}$$

Корень -12 не подходит по условию задачи, следовательно, первый рабочий изготавливает 21 деталь в час. Значит, второй рабочий изготавливает 12 деталей в час.

Ответ: 12.