Гиперболы

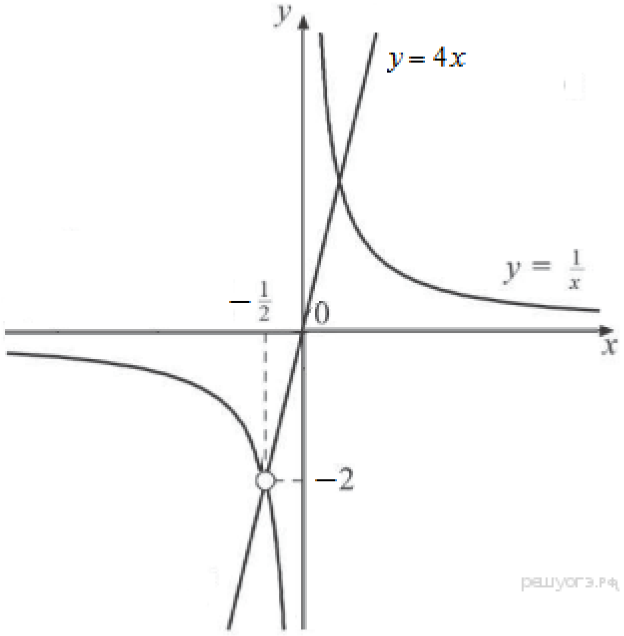
1. Постройте график функции $y = \dfrac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

При $x \neq -0,5$ имеем:

$$y = \frac{2x+1}{2x^2+x} = \frac{2x+1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x}.$$

Поэтому график заданной функции представляет собой гиперболу, с выколотой точкой (-0,5; -2). Прямая $y = kx$ будет иметь с графиком одну общую точку, если пройдёт через выколотую точку. Тогда $k = \dfrac{-2}{-0,5} = 4$, и уравнение прямой примет вид: $y = 4x$.



2. Постройте график функции $y = \dfrac{x+2}{x^2+2x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком одну общую точку.

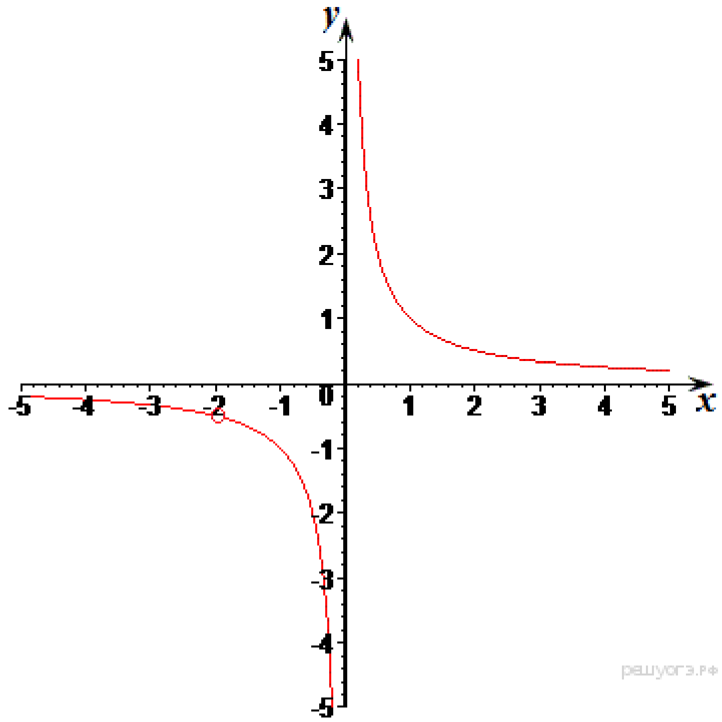
Решение.

Упростим выражение для функции:

$$y = \frac{x+2}{x^2+2x} = \frac{x+2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} \text{ (при } x \neq -2).$$

Таким образом, получили, что график нашей функции сводится к графику функции $y = \frac{1}{x}$ с выколотой точкой $(-2;\ -0,5)$.

Построим график функции (см. рисунок).



Заметим, что прямая $y = kx$ проходит через начало координат и будет иметь с графиком функции ровно одну общую точку только тогда, когда будет проходить через выколотую точку $(-2;\ -0,5)$. Подставим координаты этой точки в уравнение прямой и найдём коэффициент k.

$$-0,5 = -2k \Leftrightarrow k = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

3. Постройте график функции $y = \frac{x-2}{2x-x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

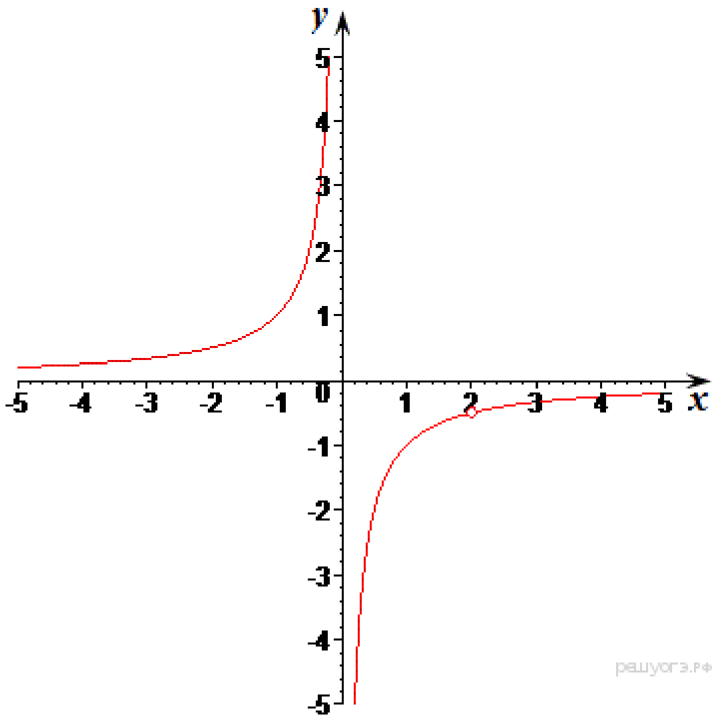
Решение.

Упростим выражение для функции:

$$y = \frac{x-2}{2x-x^2} = -\frac{x-2}{x(x-2)} = -\frac{1}{x} \text{ (при } x \neq 2).$$

Таким образом, получили, что график нашей функции сводится к графику функции $y = -\frac{1}{x}$ с выколотой точкой $(2;\ -0,5)$.

Построим график функции (см. рисунок).



Заметим, что прямая $y = kx$ проходит через начало координат и будет иметь с графиком функции ровно одну общую точку только тогда, когда будет проходить через выколотую точку $(2;\ -0,5)$. Подставим координаты этой точки в уравнение прямой и найдём коэффициент k.

$$-0,5 = 2k \Leftrightarrow k = -0,25.$$

Ответ: −0,25.

4. Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

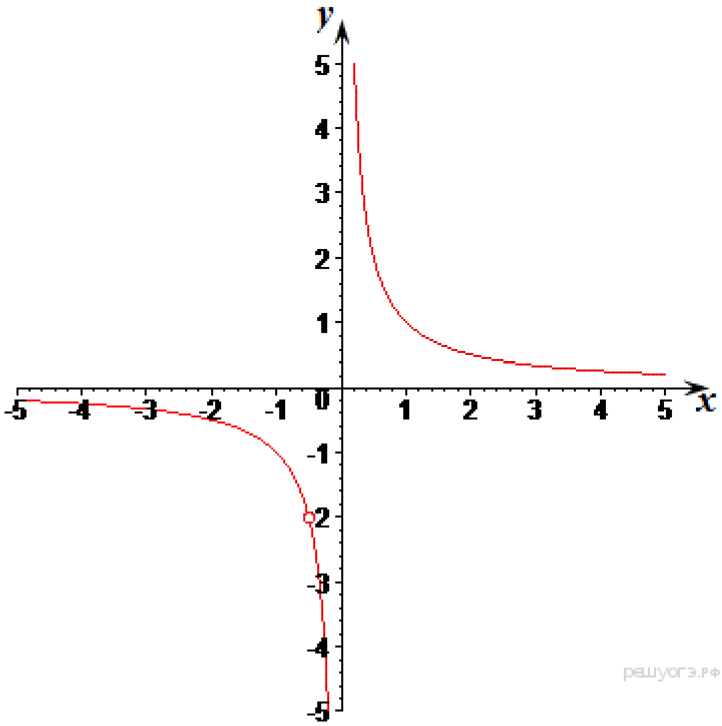
Решение.

Упростим выражение для функции:

$$y=\frac{2x+1}{2x^2+x}=\frac{2x+1}{x(2x+1)}=\frac{1}{x}\ (\text{при}\, x\neq-0,5).$$

Таким образом, получили, что график нашей функции сводится к графику функции $y=\frac{1}{x}$ с выколотой точкой $(-0,5;\ -2)$.

Построим график функции (см. рисунок).



Заметим, что прямая $y=kx$ проходит через начало координат и будет иметь с графиком функции ровно одну общую точку только тогда, когда будет проходить через выколотую точку $(-0,5;\ -2)$. Подставим координаты этой точки в уравнение прямой и найдём коэффициент k.

$$-2=-0,5k\Leftrightarrow k=4.$$

Ответ: 4.

5. Постройте график функции $y=\frac{1-2x}{2x^2-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

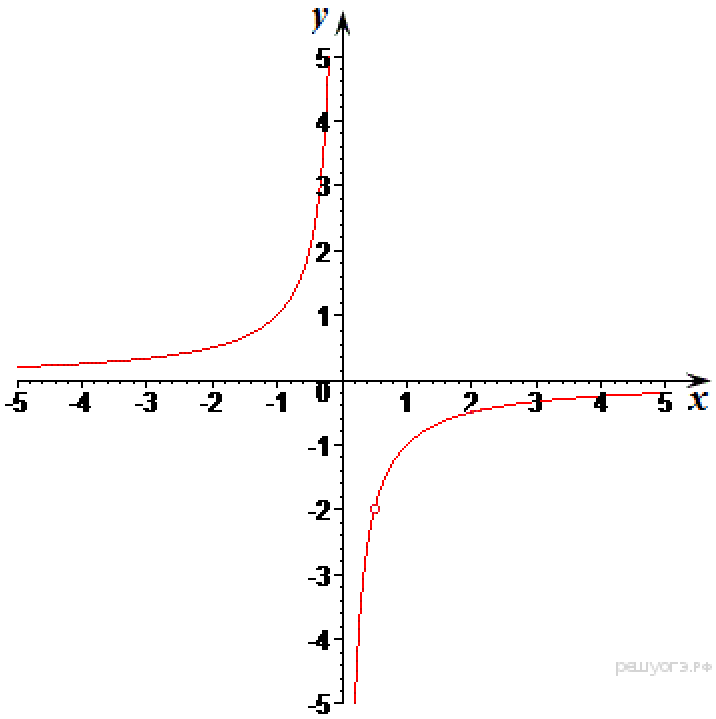
Решение.

Упростим выражение для функции:

$$y=\frac{1-2x}{2x^2-x}=-\frac{1-2x}{x(1-2x)}=-\frac{1}{x}\text{ (при }x\neq 0,5).$$

Таким образом, получили, что график нашей функции сводится к графику функции $y=-\frac{1}{x}$ с выколотой точкой $(0,5;\ -2)$.

Построим график функции (см. рисунок).



Заметим, что прямая $y=kx$ проходит через начало координат и будет иметь с графиком функции ровно одну общую точку только тогда, когда будет проходить через выколотую точку $(0,5;\ -2)$. Подставим координаты этой точки в уравнение прямой и найдём коэффициент k.

$$-2=0,5k\Leftrightarrow k=-4.$$

Ответ: −4.

6. Постройте график функции $y=\frac{3x+5}{3x^2+5x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

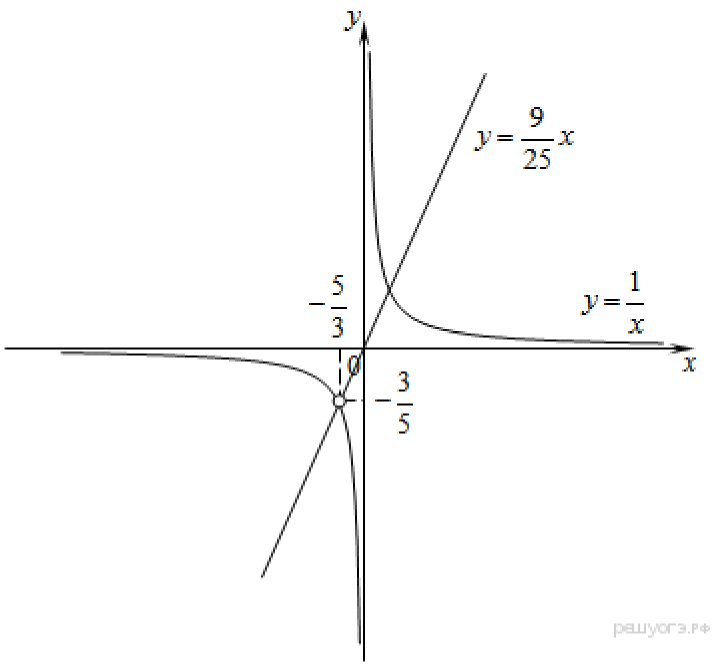
Решение.

Упростим выражение:

$$y=\frac{3x+5}{3x^2+5x}=\frac{3x+5}{x(3x+5)}=\frac{1}{x}.$$

График исходной функции сводится к графику функции $y=\frac{1}{x}$ с выколотой точкой $\left(-\frac{5}{3};\ -\frac{3}{5}\right)$.

Этот график изображён на рисунке:



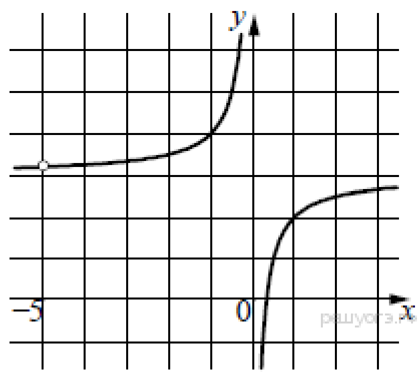
Прямая $y=kx$ будет иметь с графиком одну общую точку, если пройдёт через выколотую точку. Тогда $k=-\frac{3}{5}:\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{9}{25}$, и уравнение прямой примет вид: $y=\frac{9}{25}x$.

Ответ: $\frac{9}{25}$.

7. Постройте график функции $y=3-\frac{x+5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

Преобразуем выражение: $3-\frac{x+5}{x^2+5x}=3-\frac{1}{x}$ при условии, что $x\neq -5$. Построим график. Прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $m=3$ и $m=\frac{16}{5}$.



Ответ: 3; $\frac{16}{5}$.

8. Постройте график функции $y=\frac{7x-6}{7x^2-6x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

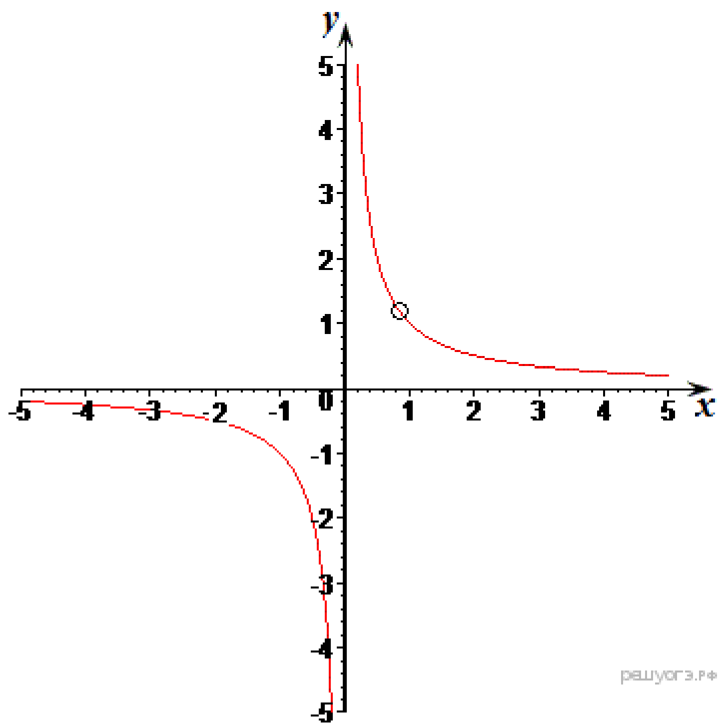
Решение.

Упростим выражение для функции:

$$y=\frac{7x-6}{7x^2-6x}=\frac{7x-6}{x(7x-6)}=\frac{1}{x}\ (\text{при}\, x\neq\frac{6}{7}).$$

Таким образом, получили, что график нашей функции сводится к графику функции $y=\frac{1}{x}$ с выколотой точкой $(\frac{6}{7};\ \frac{7}{6})$.

Построим график функции (см. рисунок).



Заметим, что прямая $y=kx$ проходит через начало координат и будет иметь с графиком функции ровно одну общую точку только тогда, когда будет проходить через выколотую точку $(\frac{6}{7};\frac{7}{6})$. Подставим координаты этой точки в уравнение прямой и найдём коэффициент k.

$$\frac{7}{6}=\frac{6}{7}k\Leftrightarrow k=\frac{49}{36}.$$

Ответ: $\frac{49}{36}$.