

Кусочно-непрерывные функции

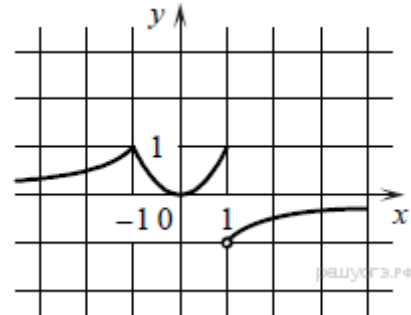
1. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

График функции изображён на рисунке.

Прямая $y = c$ будет иметь с графиком единственную общую точку при $-1 < c \leq 0$.

Ответ: $(-1; 0]$.



2. Постройте график функции $y = \frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2}$ и найдите все значения k , при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

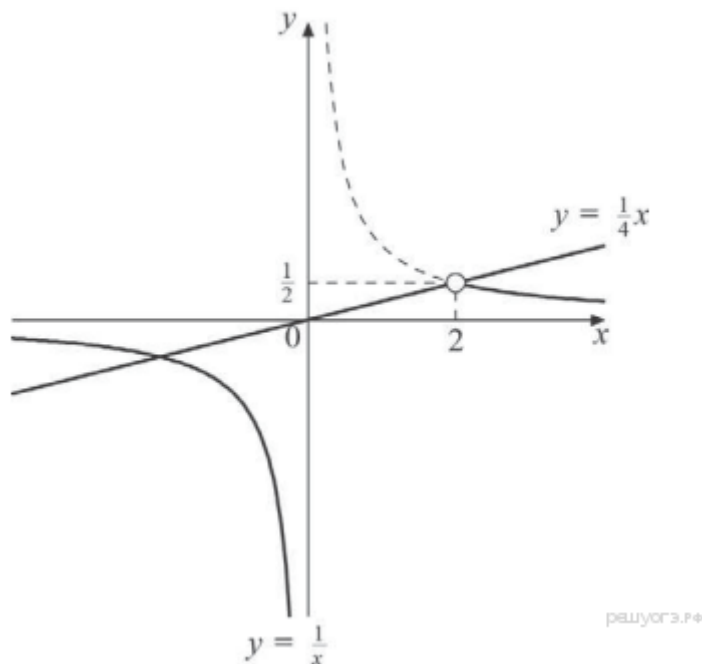
Решение.

Найдем область определения функции:

$$x^2 - 2x > 0; \quad x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$$

Поскольку $\frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2} = \frac{x-2}{x^2-2x} = \frac{1}{x}$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y = \frac{1}{x}$.

График изображён на рисунке.



Прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $k \in [\frac{1}{4}; +\infty)$.

Ответ: $k \in [\frac{1}{4}; +\infty)$.

3. Постройте график функции $y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3}$ и найдите все значения a , при которых прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек.

Решение.

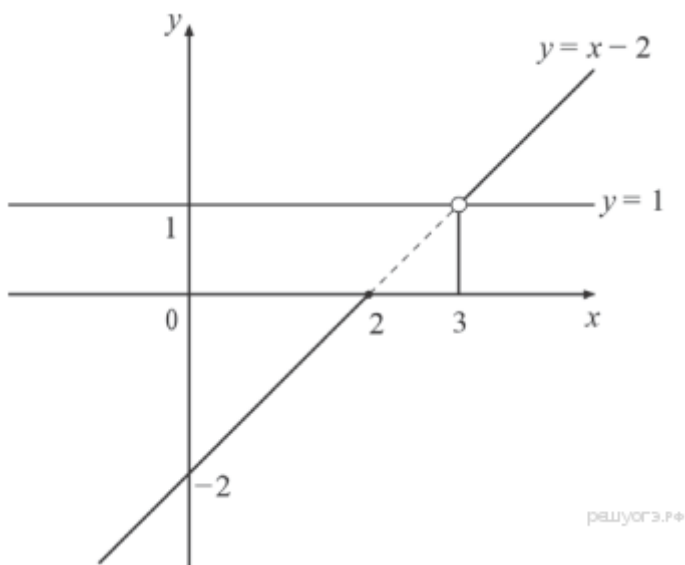
Найдём область определения функции:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0; \quad x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$$

$$\text{и } x - 3 \neq 0.$$

Значит, функция определена при $x \in (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.

Поскольку $\frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = x - 2$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y = x - 2$. График изображён на рисунке.



Прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек при $a \in (0; 1]$.

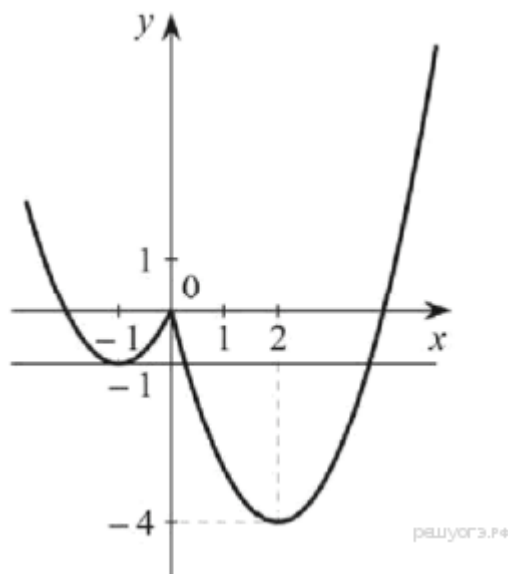
Ответ: $a \in (0; 1]$.

4. Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| - x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком три общие точки.

Решение.

Имеем:

$$y = x^2 - 3|x| - x; \quad y = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geq 0, \\ x^2 + 2x, & x < 0. \end{cases}$$



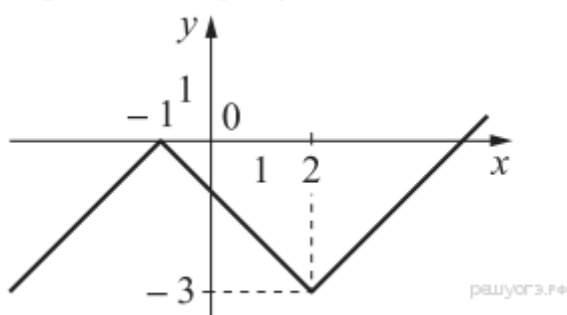
Для построения искомого графика построим график функции $y = x^2 - 4x$ на промежутке $[0; +\infty)$ и график функции $y = x^2 + 2x$ на промежутке $(-\infty; 0)$. Графиком функции $y = x^2 - 4x$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(2; -4)$, точки пересечения с осями координат: $(0; 0)$, $(4; 0)$. Графиком функции $y = x^2 + 2x$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(-1; -1)$, точки пересечения с осями координат: $(0; 0)$, $(-2; 0)$. График данной функции изображен на рисунке. Прямая $y = c$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $c = 0$ и при $c = -1$.

Ответ: график функции изображён на рисунке; прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки при $c = 0$ и при $c = -1$.

5. Постройте график функции $y = |x - 2| - |x + 1| + x - 2$ и найдите значения m , при которых прямая $y = m$ имеет с ним ровно две общие точки.

Решение.

Раскрывая модули, получаем, что график функции совпадает с прямой $y = x + 1$ при $x < -1$, совпадает с прямой $y = -x - 1$ при $-1 \leq x \leq 2$ и совпадает с прямой $y = x - 5$ при $x > 2$. График изображен на рисунке.



Прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки при $m = -3$ и $m = 0$.

Ответ: $m = -3$, $m = 0$.

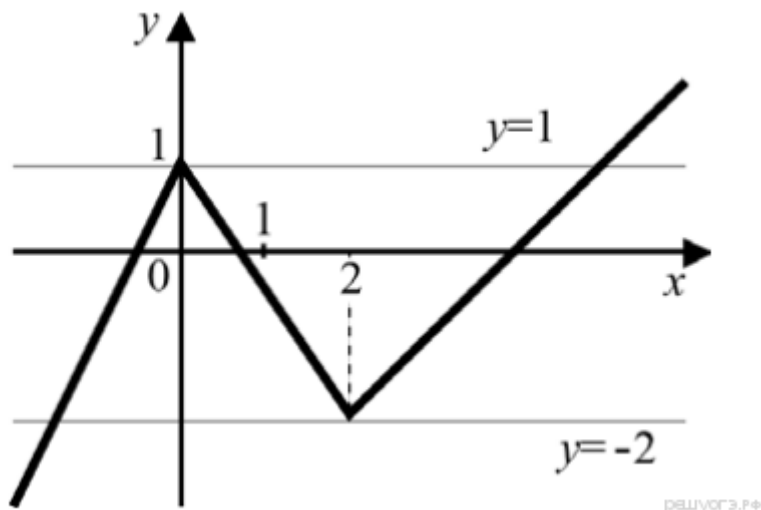
6. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x < 0, \\ -1,5x + 1, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ x - 4, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

График функции состоит из двух лучей и отрезка.



На рисунке видно, что график имеет ровно две общих точки с горизонтальными прямыми $y = -2$ и $y = 1$.

Ответ: 1; -2.

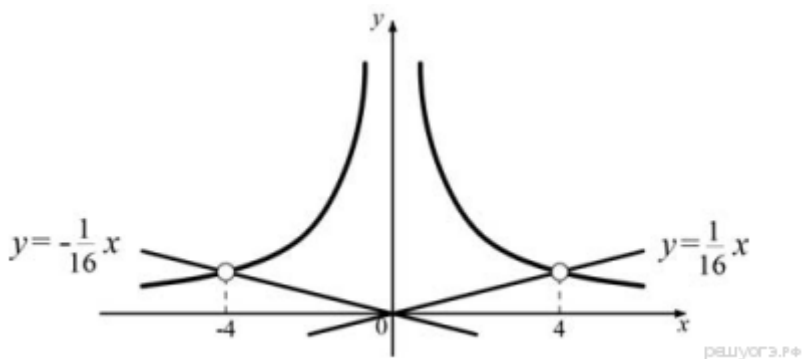
7. Постройте график функции $y = \frac{|x| - 4}{x^2 - 4|x|}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не будет иметь с построенным графиком ни одной общей точки.

Решение.

Преобразуем выражение: $\frac{|x| - 4}{x^2 - 4|x|} = \frac{|x| - 4}{|x|(|x| - 4)} = \frac{1}{|x|}$ при $|x| \neq 4$.

Значит, $y = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{если } x \neq \pm 4, \\ \text{не определена} & \text{при } x = -4 \text{ или } x = 4. \end{cases}$

Построим ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$ при $x > 0$ и удалим точку $(4; \frac{1}{4})$. Затем построим вторую часть графика симметрично первой относительно оси ординат.



На рисунке видно, что прямая $y = kx$ не имеет с построенным графиком общих точек, если она горизонтальна, либо проходит через одну из удаленных точек $(4; \frac{1}{4})$ или $(-4; \frac{1}{4})$. Этим случаям соответствуют значения $k = 0$, $k = -\frac{1}{16}$ и $k = \frac{1}{16}$.

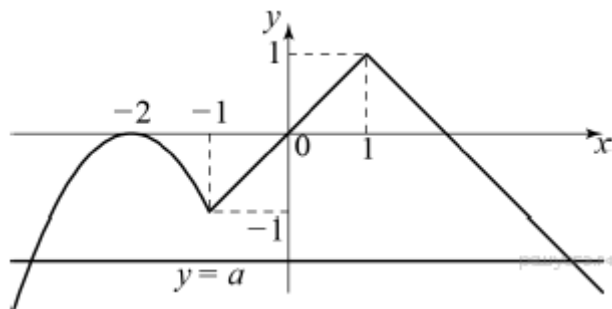
Ответ: 0, $-\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16}$.

8. Постройте график функции $\begin{cases} -x^2 - 4x - 4, & \text{если } x < -1, \\ 1 - |x - 1|, & \text{если } x \geq -1. \end{cases}$ и определите, при каких значениях

параметра a он имеет ровно две общие точки с прямой $y = a$.

Решение.

Построим график функции $y = -x^2 - 4x - 4$ на промежутке $(-\infty; -1)$, график функции $y = x$ на промежутке $[-1; 1]$ и график функции $y = 2 - x$ на промежутке $(1; +\infty)$.



Прямая $y = a$ имеет с построенным графиком ровно две общие точки при $a < -1$ и при $0 < a < 1$.

Ответ: $a < -1, 0 < a < 1$.

9. Постройте график функции

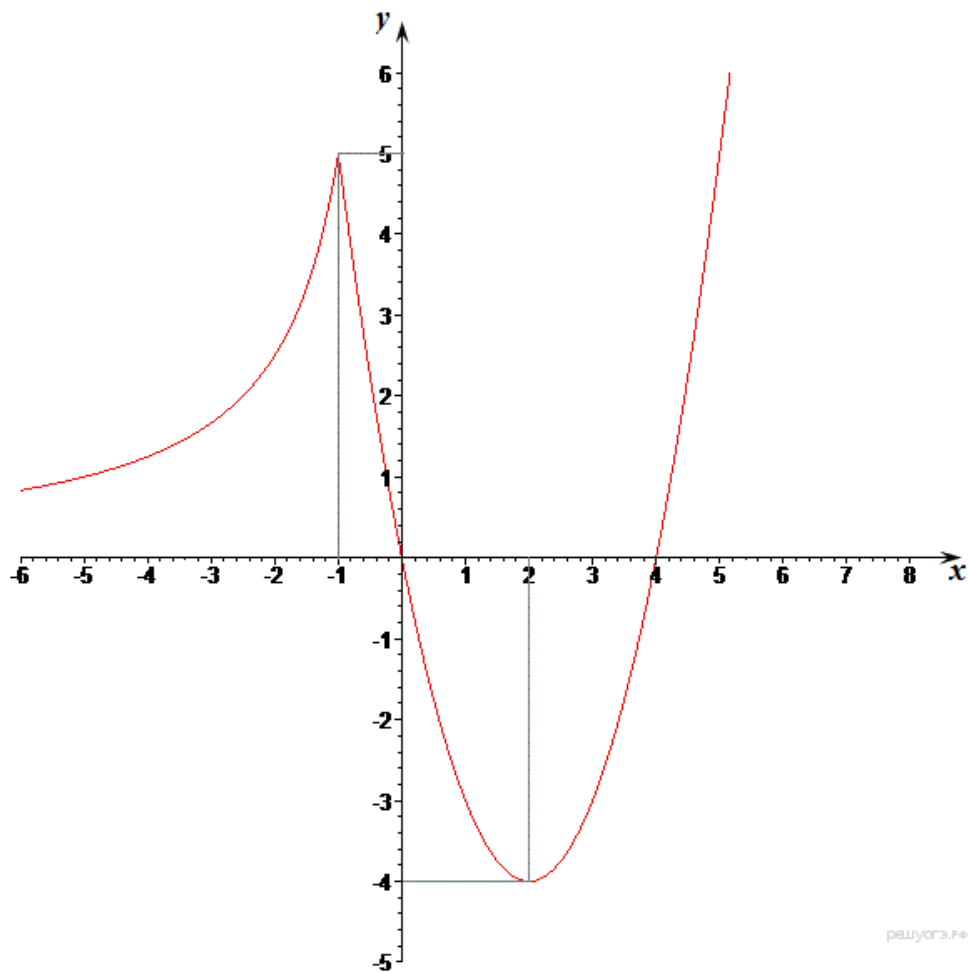
$$y = \begin{cases} -\frac{5}{x}, & x \leq -1, \\ x^2 - 4x, & x > -1. \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ будет пересекать построенный график в трёх точках.

Решение.

Построим график функции (см. рисунок).

$$y = \begin{cases} -\frac{5}{x}, & x \leq -1, \\ x^2 - 4x, & x > -1. \end{cases}$$



Из графика видно, что прямая $y = c$ будет иметь с графиком ровно три точки пересечения при c принадлежащем множеству: $(0; 5)$.

Ответ: $(0; 5)$.

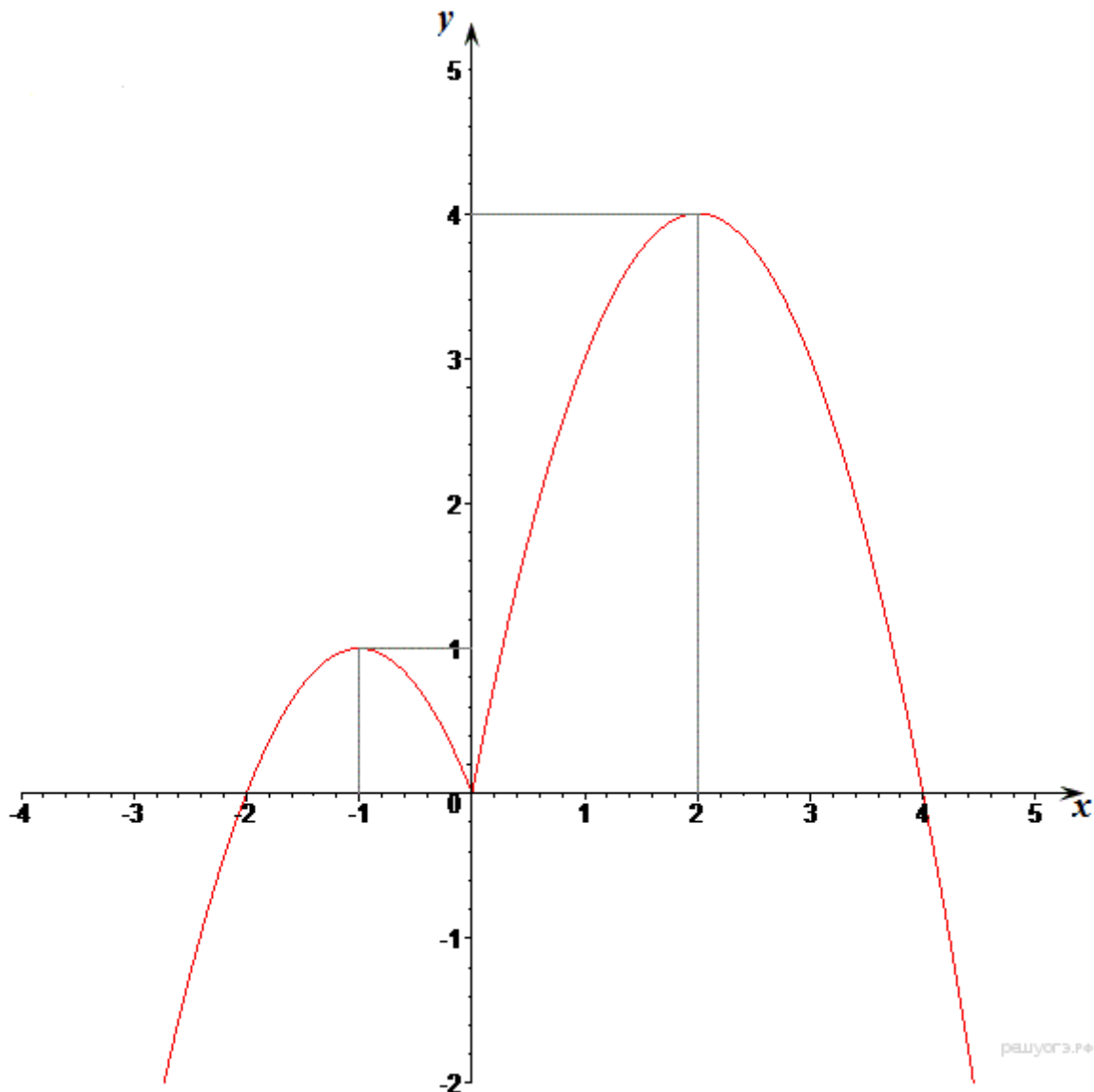
10. Постройте график функции $y = x + 3|x| - x^2$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что график функции можно представить следующим образом:

$$y = \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{при } x < 0, \\ -x^2 + 4x, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = c$ имеет с графиком функции ровно три общие точки при $c = 0$ и $c = 1$.

Ответ: 0; 1.

11. Постройте график функции

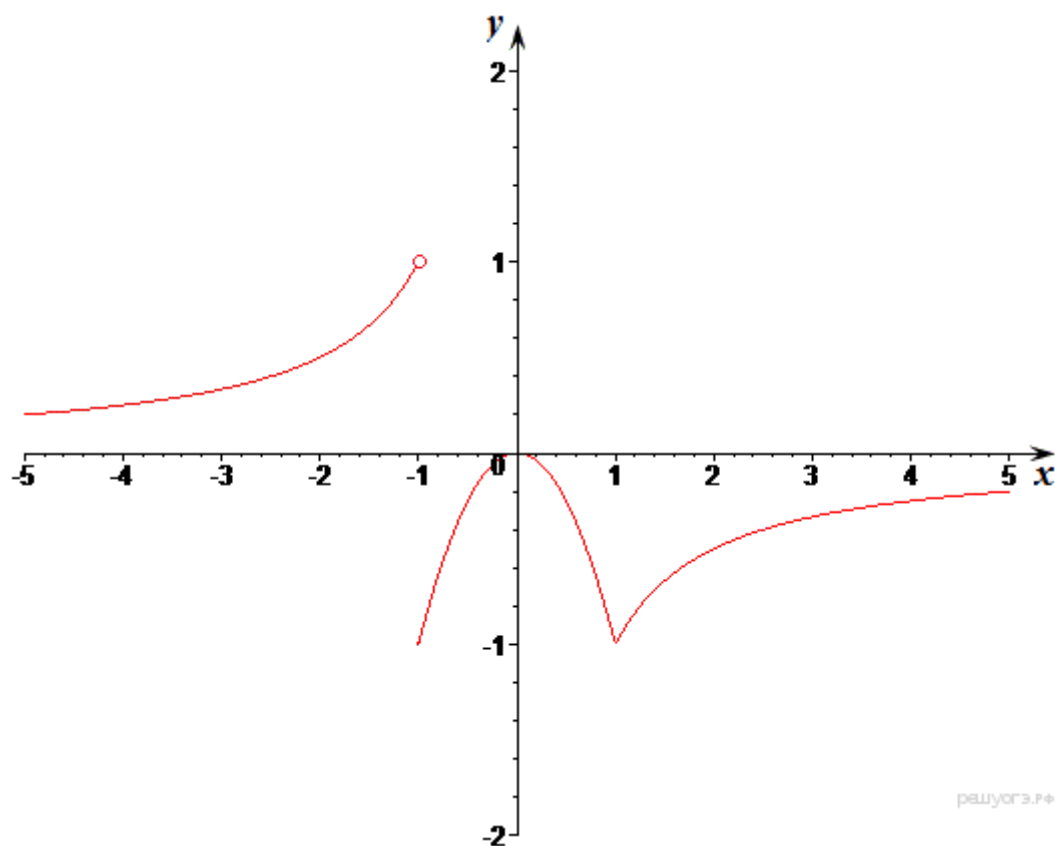
$$y = \begin{cases} -x^2, & |x| \leq 1, \\ -\frac{1}{x}, & |x| > 1. \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ будет иметь с графиком единственную общую точку.

Решение.

Построим график функции (см. рисунок).

$$y = \begin{cases} -x^2, & |x| \leq 1, \\ -\frac{1}{x}, & |x| > 1. \end{cases}$$



Из графика видно, что прямая $y = c$ будет иметь с графиком функции единственную точку пересечения при c принадлежащем множеству $[0; 1)$.

Ответ: $[0; 1)$.

12. Постройте график функции

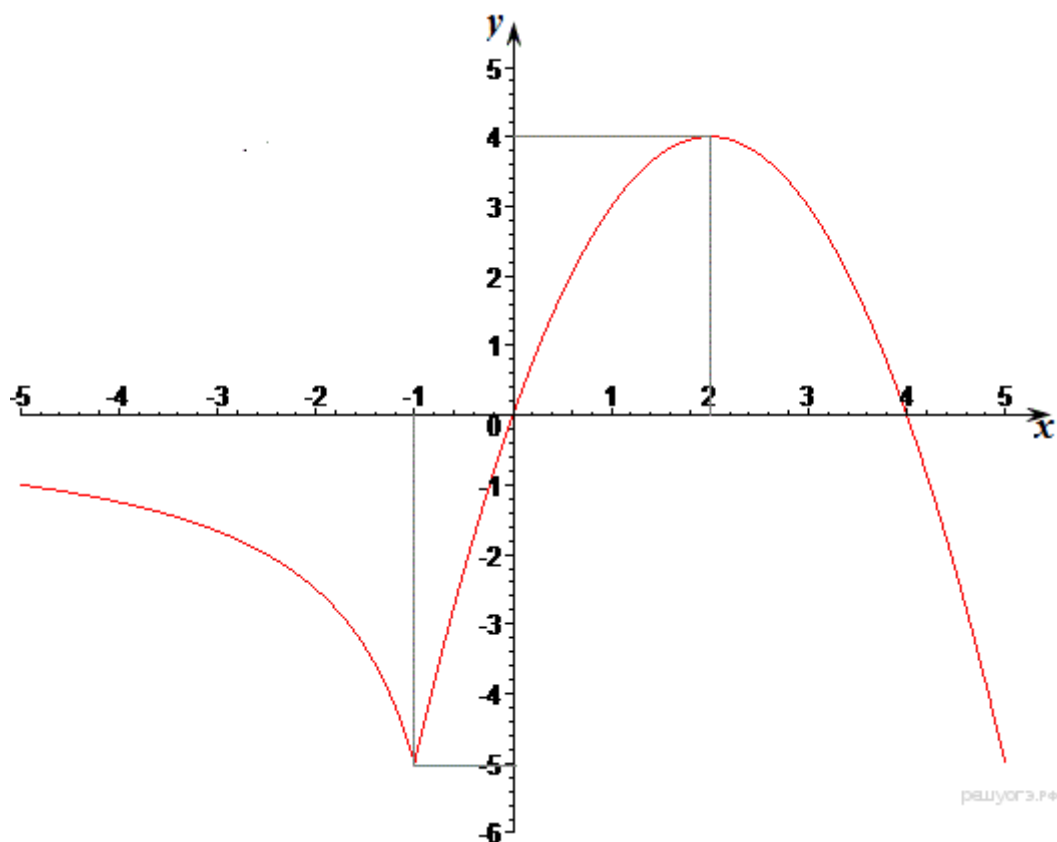
$$y = \begin{cases} \frac{5}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ -x^2 + 4x, & \text{если } x > -1. \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ будет пересекать построенный график в трёх точках.

Решение.

Построим график функции (см. рисунок).

$$y = \begin{cases} \frac{5}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ -x^2 + 4x, & \text{если } x > -1. \end{cases}$$



Из графика видно, что прямая $y = c$ будет иметь с графиком функции ровно три точки пересечения при c принадлежащем множеству: $(-5; 0)$.

Ответ: $(-5; 0)$.

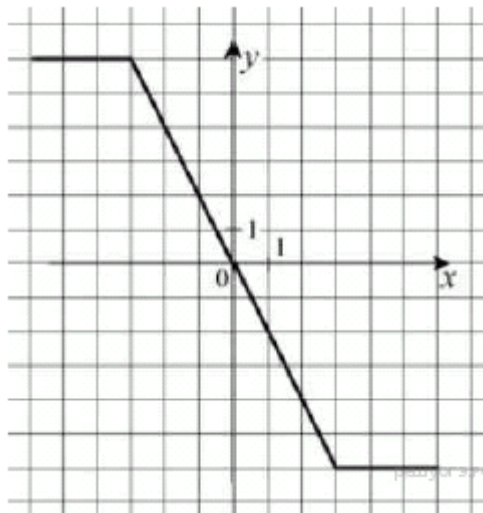
13. Постройте график функции $y = |x - 3| - |x + 3|$ и найдите все значения k , при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Решение.

Раскрывая модули, получаем, что

$$y = \begin{cases} -6, x \geq 3, \\ -2x, -3 < x < 3, \\ 6, x \leq -3. \end{cases}$$

График изображён на рисунке.



Прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $k \in (-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$.

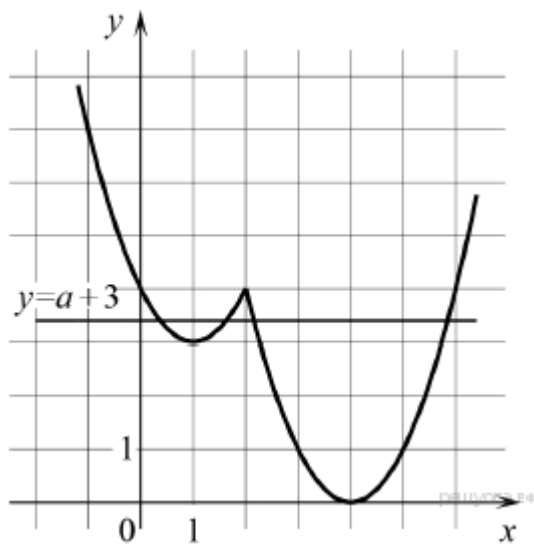
Ответ: $k \in (-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$.

14. Постройте график функции $y = x^2 - 5x + 10 - 3|x - 2|$ и найдите все значения a , при которых он имеет ровно три общие точки с прямой $y = a + 3$

Решение.

Построим график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 4, & x < 2, \\ x^2 - 8x + 16, & x \geq 2. \end{cases}$$



Прямая $y = a + 3$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $a = 0$ и $a = 1$.

Ответ: 0; 1.

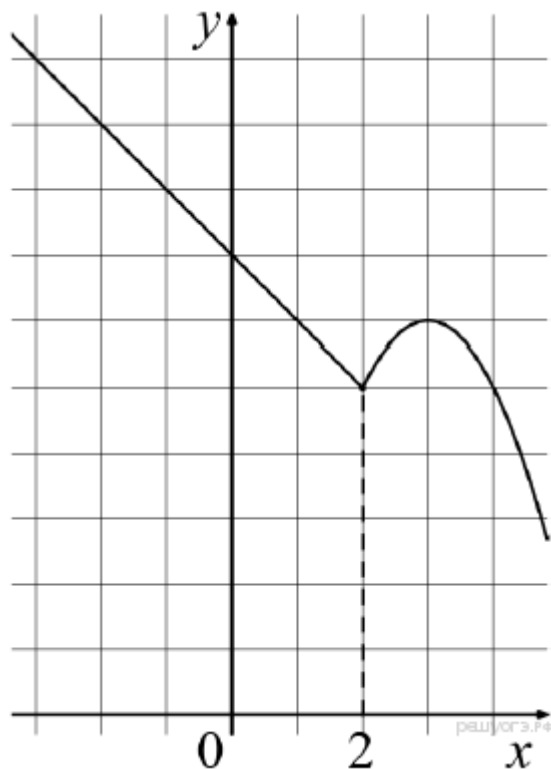
15. Постройте график функции

$$\begin{cases} -x^2 + 6x - 3, & \text{если } x \geq 2, \\ -x + 7, & \text{если } x < 2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = -x + 7$ при $x < 2$ и график функции $y = -x^2 + 6x - 3$ при $x \geq 2$.



Прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки при $t = 5$ и $t = 6$.

Ответ: 5; 6.

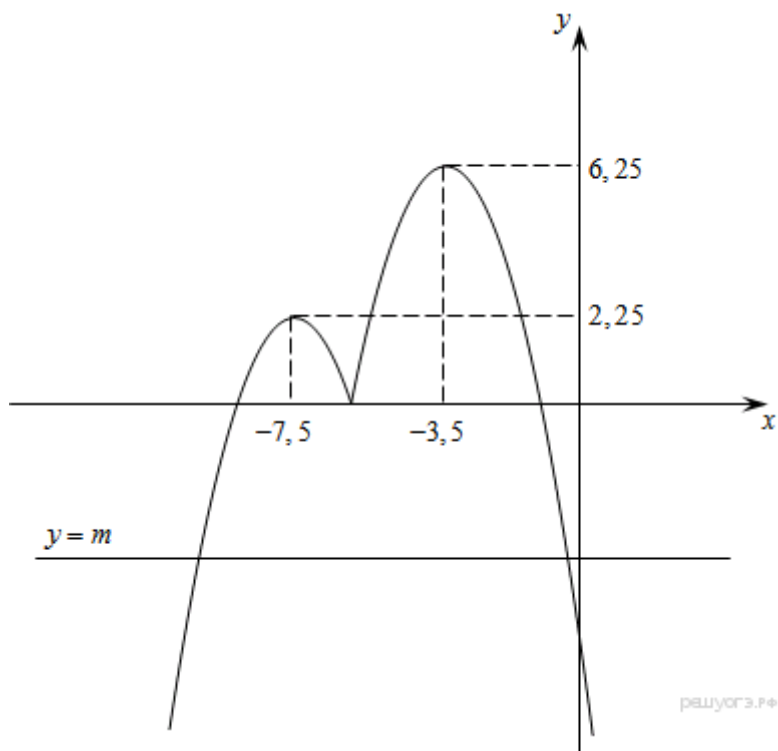
16. Постройте график функции $y = 4|x + 6| - x^2 - 11x - 30$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y = \begin{cases} -x^2 - 15x - 54, & \text{при } x < -6, \\ -x^2 - 7x - 6, & \text{при } x \geq -6. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = t$ имеет с графиком функции ровно три общие точки при $t = 0$, и $t = 2,25$.

Ответ: 0; 2,25.

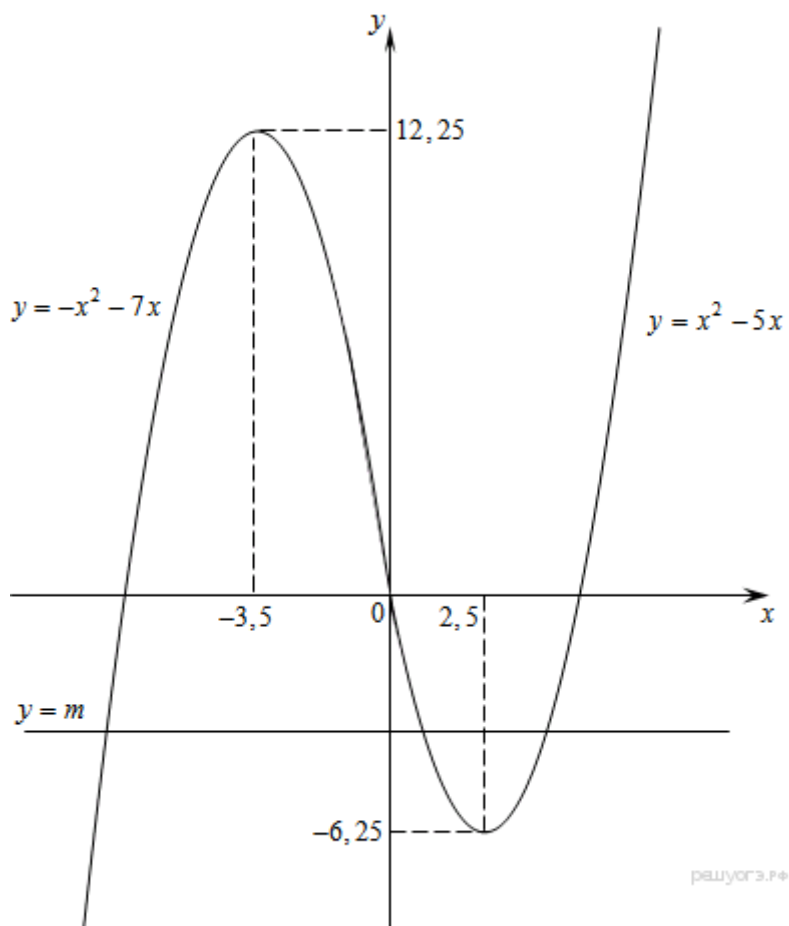
17. Постройте график функции $y = |x|(x+1) - 6x$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y = \begin{cases} -x^2 - 7x, & \text{при } x < 0, \\ x^2 - 5x, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно две общие точки при $m = -6,25$ и $m = 12,25$.

Ответ: $-6,25; 12,25$.

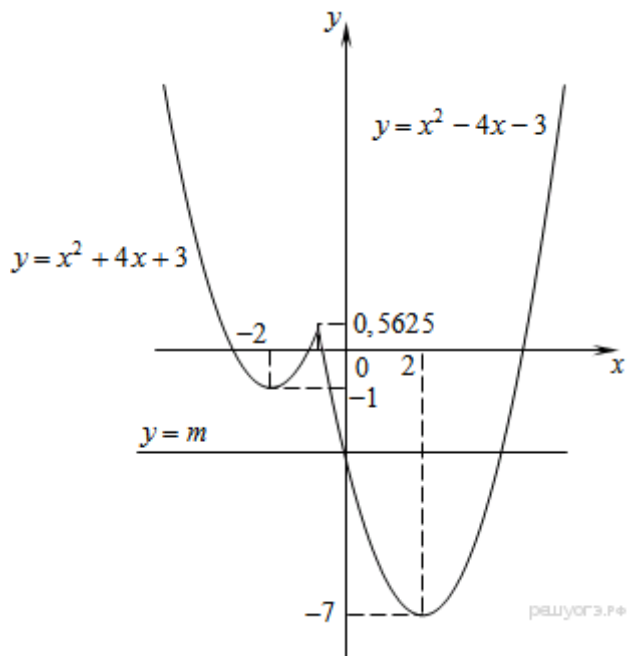
18. Постройте график функции $y = x^2 - |4x + 3|$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & \text{при } x < -\frac{3}{4} \\ x^2 - 4x - 3, & \text{при } x \geq -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно три общие точки при $m = -1$ и $m = 0,5625$.

Ответ: $-1; 0,5625$.

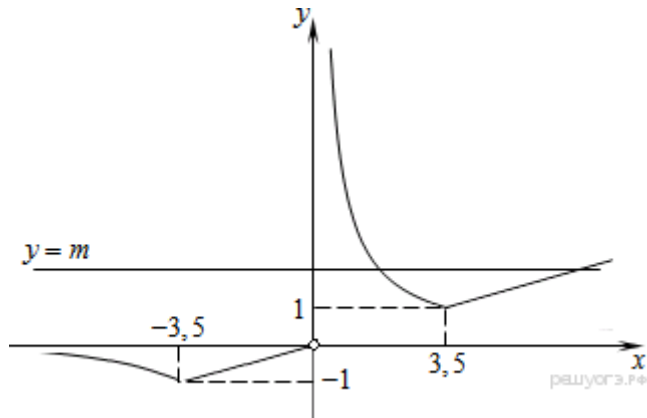
19. Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \right| + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y = \begin{cases} \frac{3,5}{x}, & \text{при } x \leq -3,5 \text{ и } 0 < x < 3,5, \\ \frac{x}{3,5}, & \text{при } -3,5 < x < 0 \text{ и } x \geq 3,5. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = t$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $t = -1$ и $t = 1$.

Ответ: $-1; 1$.

20. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 3x)|x|}{x + 3}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

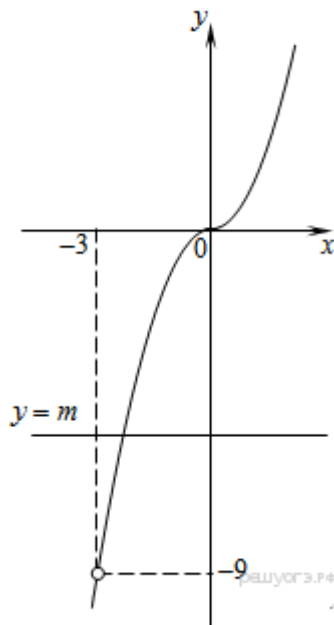
Решение.

Раскрывая модуль и упрощая, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y = \begin{cases} -x^2, & \text{при } x < 0 \\ x^2, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

При этом на графике функции нужно выколоть точку $(-3; -9)$, поскольку при упрощении мы сокращали выражение $x + 3$, стоящее в знаменателе.

Этот график изображён на рисунке:



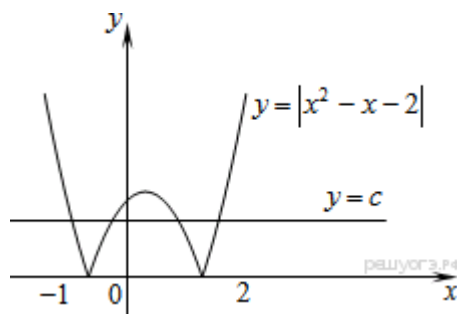
Из графика видно, что прямая $y = m$ не имеет с графиком функции ни одной общей точки при $m = -9$.

Ответ: -9 .

21. Постройте график функции $y = |x^2 - x - 2|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

График данной функции — это график параболы $y = x^2 - x - 2$, отрицательная часть которого отражена относительно оси Ox . Этот график изображён на рисунке:



Прямая, параллельная оси абсцисс задаётся формулой $y = c$, где c — постоянная. Из графика видно, что прямая $y = c$ может иметь с графиком функции не более четырёх общих точек.

Ответ: 4.

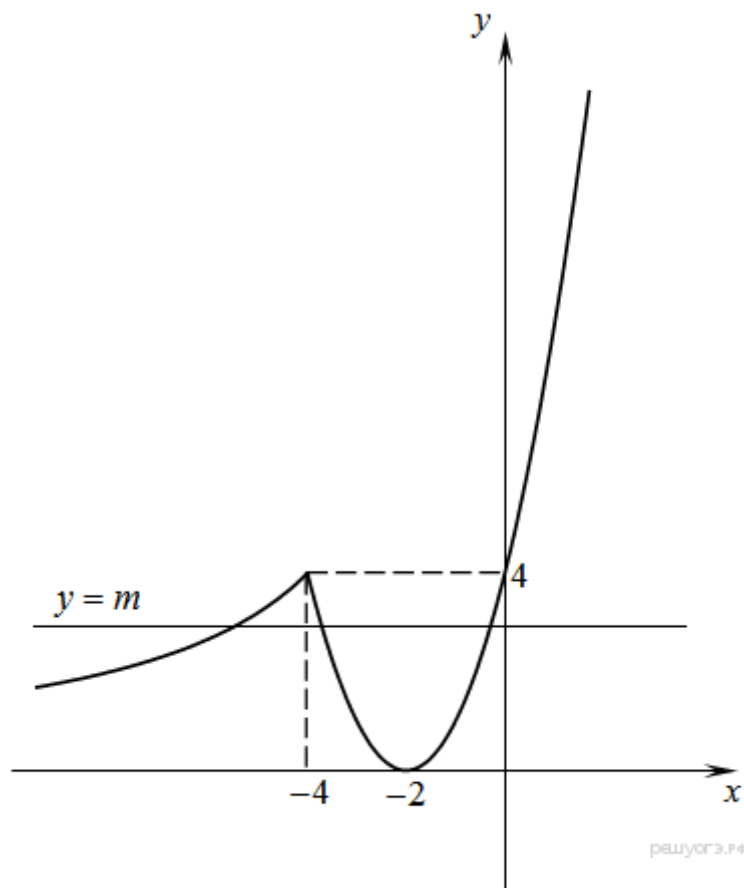
22. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, & \text{если } x \geq -4, \\ -\frac{16}{x}, & \text{если } x < -4. \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение.

Изобразим график на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции одну или две общие точки при любом m принадлежащем множеству $\{0\} \cup [4; +\infty)$.

Ответ: $\{0\} \cup [4; +\infty)$.

23. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 5, & \text{если } x \geq 1, \\ x + 1, & \text{если } x < 1, \end{cases}$$

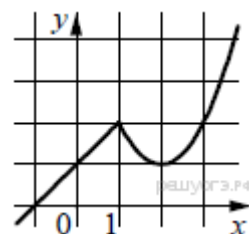
и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = x + 1$ при $x < 1$ и график функции $y = x^2 - 4x + 5$ при $x \geq 1$.

Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершину параболы или через точку $(1; 2)$. Получаем, что $m = 1$ или $m = 2$.

Ответ: 1; 2.



24. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x + 13, & \text{если } x \geq 2, \\ 2,5x, & \text{если } x < 2, \end{cases}$$

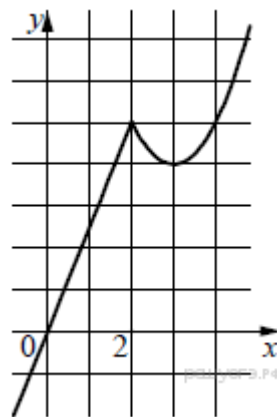
и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = 2,5x$ при $x < 2$ и график функции $y = x^2 - 6x + 13$ при $x \geq 2$.

Прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки при $t = 4$ и при $t = 5$.

Ответ: 4; 5.



25. Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{3} - \frac{3}{x} \right| + \frac{x}{3} + \frac{3}{x} \right)$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Значение выражения $\frac{x}{3} - \frac{3}{x}$ неотрицательно при $-3 \leq x < 0$ и $x \geq 3$, а при $x < -3$ и $0 < x < 3$ значение этого выражения отрицательно. Построим график функции $y = \frac{x}{3}$ при $-3 < 0$ и $x \geq 3$ и график функции $y = \frac{3}{x}$ при $x < -3$ и $0 < x < 3$. Прямая $y = t$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $t = 1$ и $t = -1$.



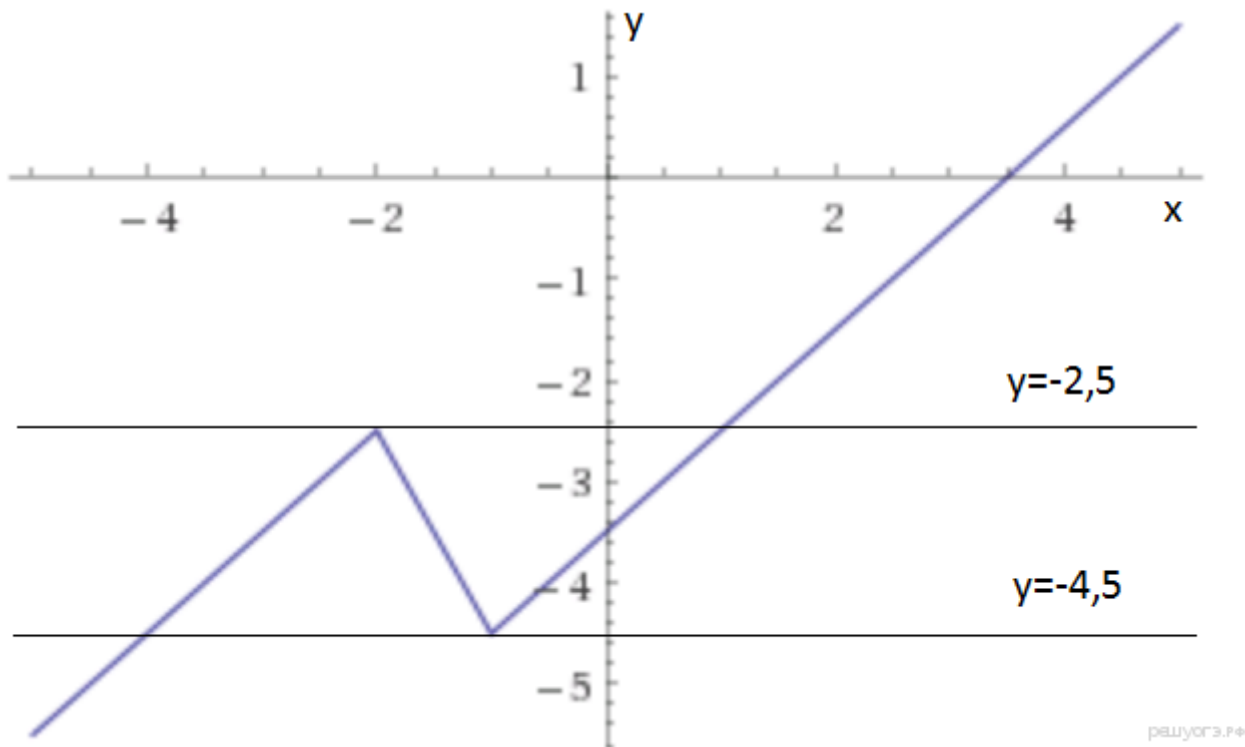
26. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x - 0,5, & \text{если } x < -2, \\ -2x - 6,5, & \text{если } -2 \leq x \leq -1, \\ x - 3,5, & \text{если } x > -1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

График функции состоит из двух лучей и отрезка.



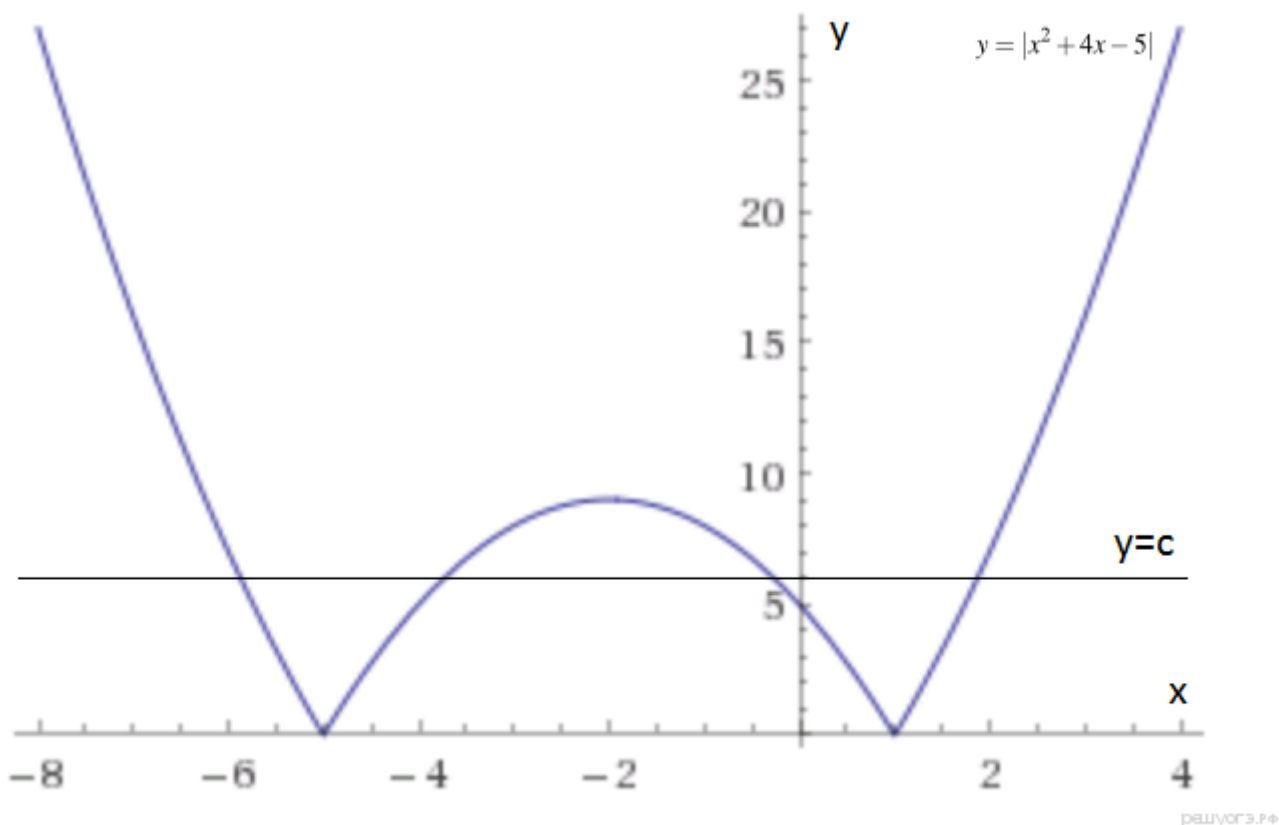
На рисунке видно, что график имеет ровно две общих точки с горизонтальными прямыми $y = -2,5$ и $y = -4,5$.

Ответ: $-4,5; -2,5$.

27. Постройте график функции $y = |x^2 + 4x - 5|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

График данной функции — это график параболы $y = x^2 + 4x - 5$, отрицательная часть которого отражена относительно оси Ox . Этот график изображён на рисунке:



Прямая, параллельная оси абсцисс задаётся формулой $y = c$, где c — постоянная. Из графика видно, что прямая $y = c$ может иметь с графиком функции не более четырёх общих точек.

Ответ: 4.

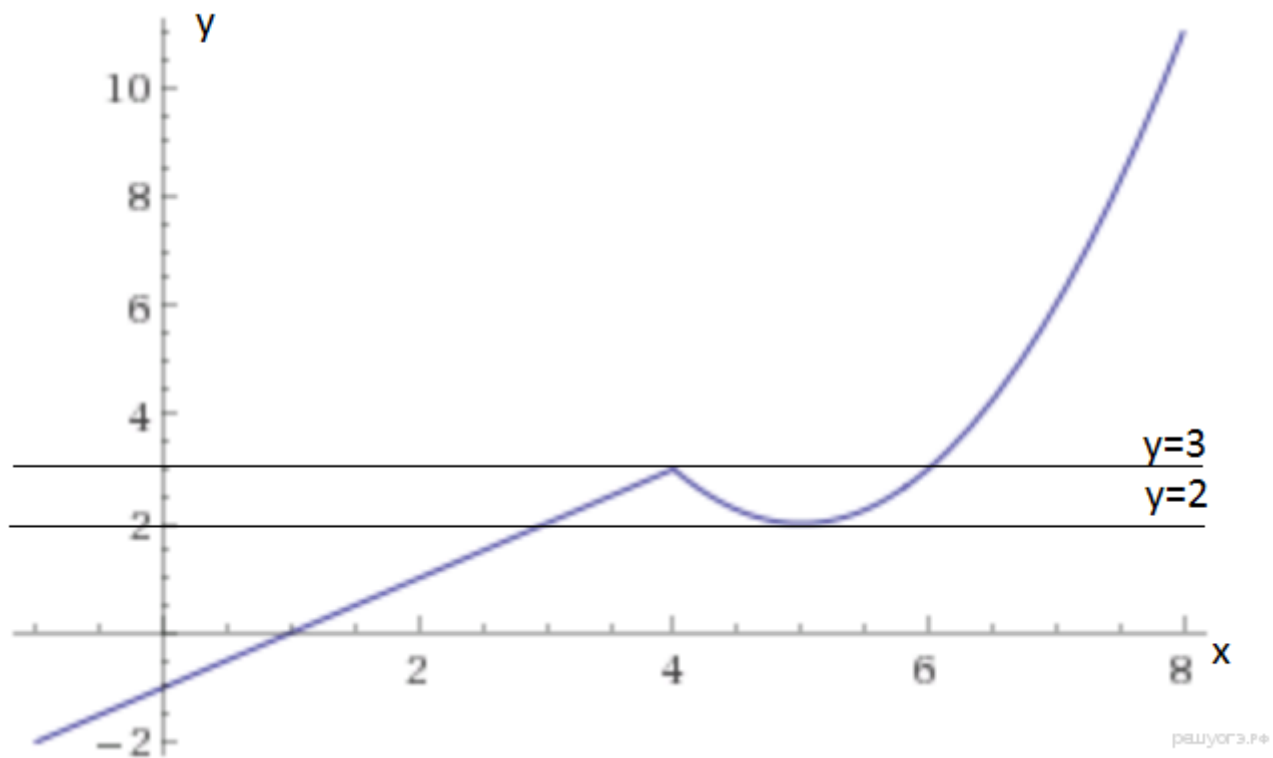
28. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 10x + 27, & x \geq 4, \\ x - 1, & x < 4. \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = x - 1$ при $x < 4$ и график функции $y = x^2 - 10x + 27$ при $x \geq 4$.



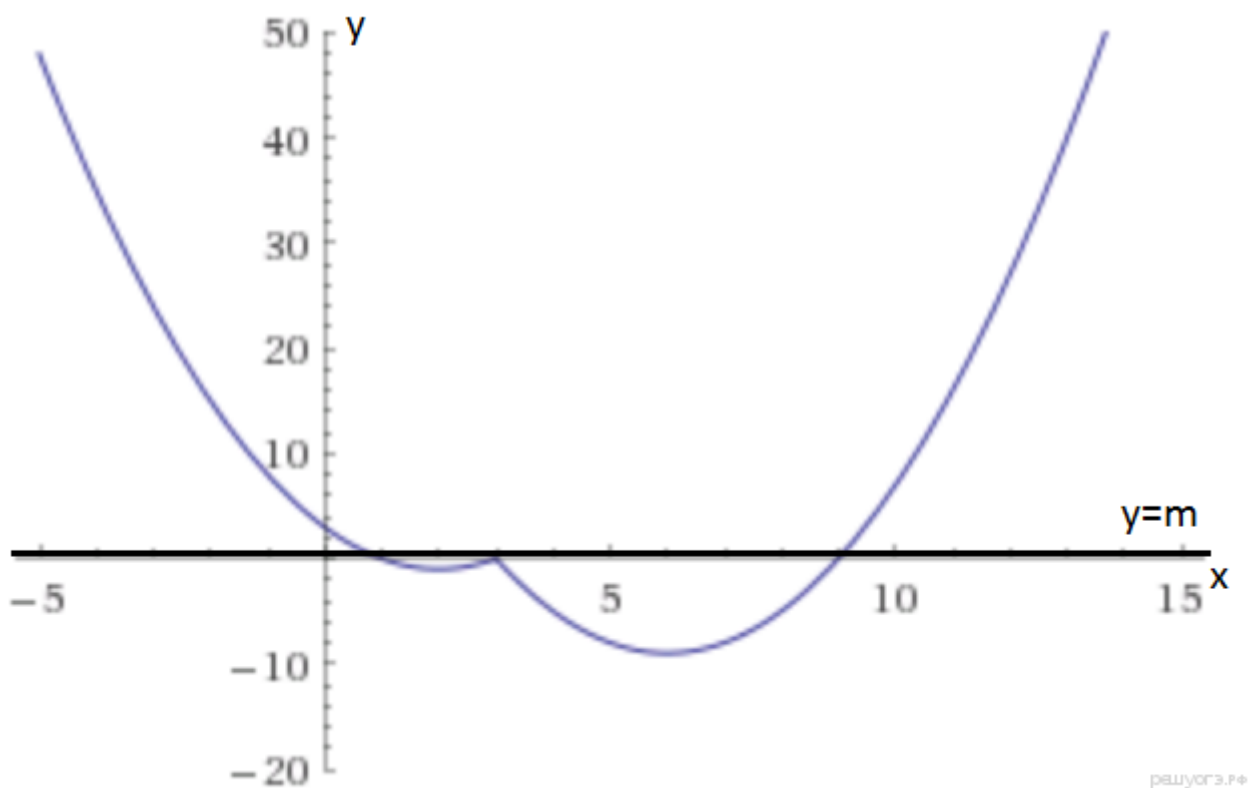
Прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки при $t = 2$ и $t = 3$.

29. Постройте график функции $y = x^2 - 8x - 4|x - 3| + 15$ и найдите значения t , при которых прямая $y = t$ имеет с ним ровно три общие точки.

Решение.

Построим график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 12x + 27, & x \geq 3, \\ x^2 - 4x + 3, & x < 3. \end{cases}$$



решуегэ.ру

Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $a = 0$ и $a = -1$.

Ответ: 0; -1.

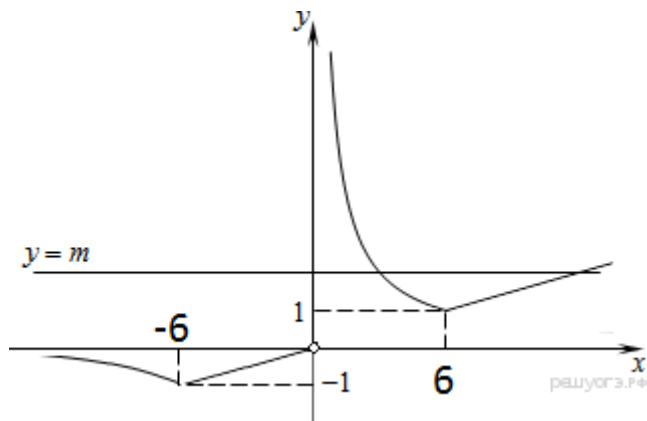
30. Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{6} - \frac{6}{x} \right| + \frac{x}{6} + \frac{6}{x} \right)$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y = \begin{cases} \frac{6}{x}, & \text{при } x \leq -6 \text{ и } 0 < x < 6, \\ \frac{x}{6}, & \text{при } -6 < x < 0 \text{ и } x \geq 6. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $m = -1$ и $m = 1$.

Ответ: -1 ; 1 .

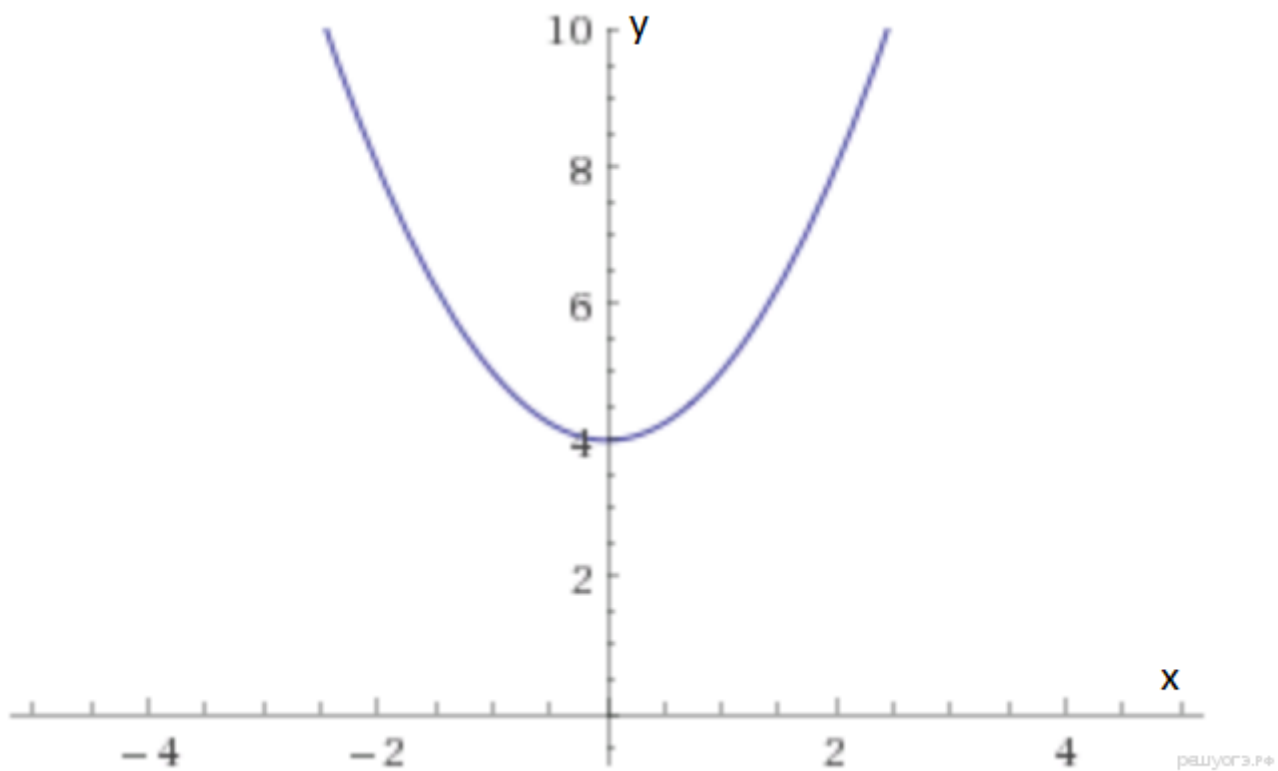
31. Найдите p и постройте график функции $y = x^2 + p$, если известно, что прямая $y = 4x$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Функция $y = x^2 + p$ представляет собой параболу, следовательно, с прямой $y = 4x$ парабола имеет только одну общую точку, если дискриминант квадратного уравнения равен 0.

$$\begin{aligned}x^2 + p &= 4x \\x^2 - 4x + p &= 0 \\16 - 4p &= 0 \Leftrightarrow p = 4\end{aligned}$$

Построим график функции $x^2 + 4$



Ответ: 4