

Параболы

1. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Разложим числитель дроби на множители:

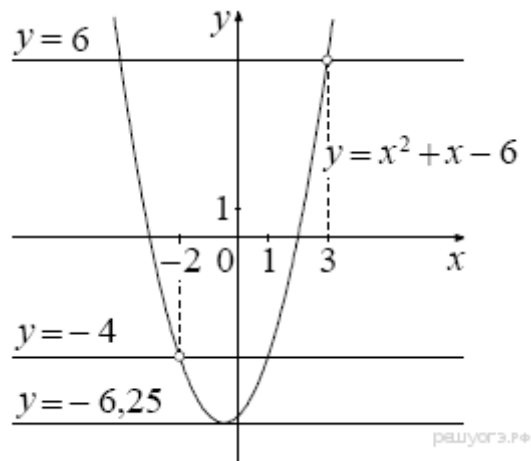
$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

При $x \neq -2$ и $x \neq 3$ функция принимает вид:

$$y = (x-2)(x+3) = x^2 + x - 6,$$

её график — парабола с выколотыми точками $(-2; -4)$ и $(3; 6)$.

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5; -6,25)$.



Поэтому $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.

2. При каком значении p прямая $y = -2x + p$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p .

Решение.

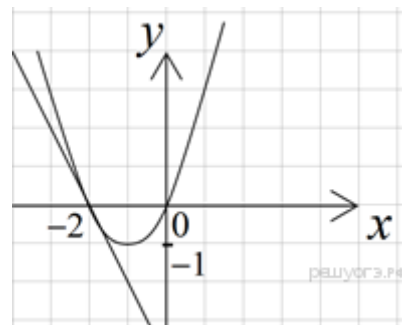
График функции изображён на рисунке.

Запишем условие общей точки:

$$-2x + p = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 + 4x - p = 0.$$

Прямая $y = -2x + p$ будет иметь с параболой единственную общую точку при условии, что дискриминант полученного квадратного уравнения равен нулю: $16 + 4p = 0$, откуда $p = -4$. Подставив значение параметра в уравнение, находим $x = -2$, $y = 0$.

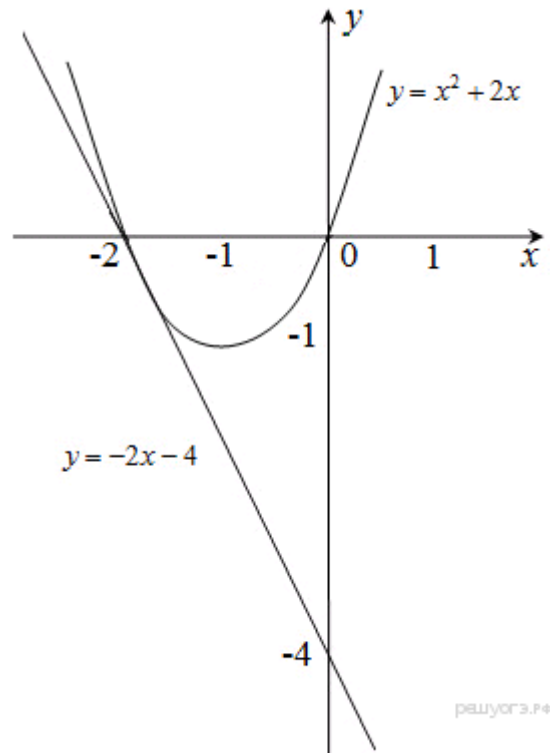
Ответ: $p = -4$, координата точки: $(-2; 0)$.



3. При каких отрицательных значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки и постройте данные графики в одной системе координат.

Решение.

Для того, чтобы прямая и парабола имели одну общую точку необходимо, чтобы дискриминант равнялся нулю. Дискриминант равен: $(2-k)^2 - 16$. Он обращается в ноль при $k = -2$ или $k = 6$. По условию необходимо отрицательное k , таким образом, $k = -2$. Построим графики функций:



Найдем точку пересечения параболы с прямой:

$$-2x - 4 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x = -2, \text{ таким образом } y = 0.$$

Ответ: При $k = -2$; Парабола пересекает прямую в точке $(-2; 0)$.

4. Известно, что парабола проходит через точку $B(-1; -\frac{1}{4})$ и её вершина находится в начале координат. Найдите уравнение этой параболы и вычислите, в каких точках она пересекает прямую $y = -16$.

Решение.

Уравнения параболы, вершина которой находится в начале координат: $y = ax^2$. Парабола проходит через точку B , поэтому $-\frac{1}{4} = a \cdot (-1)^2$, откуда $a = -\frac{1}{4}$. Уравнение параболы: $y = -\frac{1}{4}x^2$. Абсциссы точек пересечения с прямой $y = -16$ найдем из уравнения $-\frac{1}{4}x^2 = -16$; $x_1 = 8$, $x_2 = -8$.

Ответ: $-\frac{1}{4}x^2$, $(8; -16)$, $(-8; -16)$.

5. Парабола проходит через точки $K(0; -5)$, $L(3; 10)$, $M(-3; -2)$. Найдите координаты её вершины.

Решение.

Одна из возможных форм записи уравнения параболы в общем виде выглядит так:
 $y = ax^2 + bx + c$. Координата x вершины параболы находится по формуле $x_B = -\frac{b}{2a}$. Координату y вершины параболы найдётся подстановкой x_B в уравнение параболы. Таким образом, задача сводится к нахождению коэффициентов a, b и c . Подставив координаты точек, через которые проходит парабола, в уравнение параболы и получим систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} c = -5, \\ 9a + 3b + c = 10, \\ 9a - 3b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5, \\ 9a + 3b + c = 10, \\ 18a - 10 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5, \\ b = 2, \\ a = 1. \end{cases}$$

Найдём координаты вершины:

$$\begin{aligned} x_B &= -\frac{2}{2} = -1, \\ y_B &= 1 - 2 - 5 = -6. \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; -6)$.

6. При каких значениях p вершины парабол $y = -x^2 + 2px + 3$ и $y = x^2 - 6px + p$ расположены по разные стороны от оси x ?

Решение.

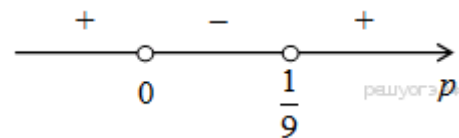
Координата x вершины параболы определяется по формуле $x_B = -\frac{b}{2a}$. Координата y_B вершины находится подстановкой x_B в уравнение параболы. Вершины парабол будут находиться по разные стороны от оси x , если координаты их вершин имеют разные знаки. Вспомнив, что два сомножителя имеют разный знак тогда и только тогда, когда их произведение отрицательно, составим и решим неравенство:

$$(-p^2 + 2p^2 + 3)(9p^2 - 18p^2 + p) < 0 \Leftrightarrow (p^2 + 3)(-9p^2 + p) < 0.$$

Заметим, что первый множитель всегда больше нуля, поэтому на него можно разделить.

$$-9p \left(p - \frac{1}{9} \right) < 0 \Leftrightarrow p \left(p - \frac{1}{9} \right) > 0.$$

Произведение двух сомножителей будет больше нуля, если сомножители имеют одинаковый знак (см. рисунок). Таким образом, получаем ответ:



$$\begin{cases} p < 0, \\ p > \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{9}; \infty\right)$.

Примечание.

Координату y_B параболы также можно найти по формуле $y_B = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

7. При каких значениях p вершины парабол $y = x^2 - 2px - 1$ и $y = -x^2 + 4px + p$ расположены по разные стороны от оси x ?

Решение.

Абсцисса вершины параболы определяется по формуле $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$. Для данных парабол это точки p и $2p$.

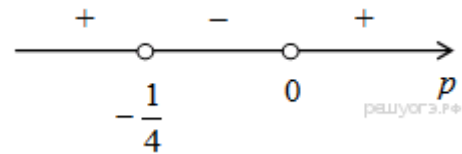
Ордината $y_{\text{в}}$ вершины находится подстановкой $x_{\text{в}}$ в уравнение параболы. Для данных парабол получаем: $p^2 - 2p^2 - 1 = -(p^2 + 1)$ и $-4p^2 + 8p^2 + p = 4p^2 + p$.

Вершины парабол находятся по разные стороны от оси абсцисс, если ординаты их вершин имеют разные знаки.

Два множителя имеют разные знаки тогда и только тогда, когда их произведение отрицательно. Тем самым, требуется решить неравенство $-(p^2 + 1)(4p^2 + p) < 0$. Заметим, что первый множитель меньше нуля при всех значениях p , поэтому на него можно разделить, изменив знак неравенства на противоположный. Имеем:

$$-(p^2 + 1)(4p^2 + p) < 0 \Leftrightarrow 4p^2 + p > 0 \Leftrightarrow 4p \left(p + \frac{1}{4} \right) > 0.$$

Произведение двух сомножителей больше нуля, если они имеют один и тот же знак (см. рис.). Таким образом, получаем ответ:



$$\begin{cases} p < -\frac{1}{4}, \\ p > 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup (0; \infty)$.

Примечание.

Ординату вершины параболы также можно найти по формуле $y_{\text{в}} = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

8. При каких значениях m вершины парабол $y = -x^2 - 6mx + m$ и $y = x^2 - 4mx - 2$ расположены по одну сторону от оси x ?

Решение.

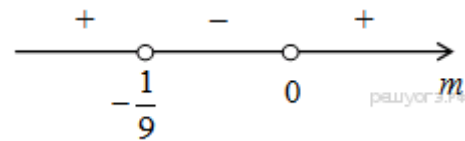
Координата x вершины параболы определяется по формуле $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$. Координата $y_{\text{в}}$ вершины находится подстановкой $x_{\text{в}}$ в уравнение параболы. Вершины парабол будут находиться по одну сторону от оси x , если координаты их вершин имеют одинаковые знаки. Вспомнив, что два сомножителя имеют одинаковый знак тогда и только тогда, когда их произведение положительно, составим и решим неравенство:

$$(-9m^2 + 18m^2 + m)(4m^2 - 8m^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow (9m^2 + m)(-4m^2 - 2) > 0.$$

Заметим, что второй множитель всегда меньше нуля, поэтому на него можно разделить.

$$9m \left(m + \frac{1}{9} \right) < 0 \Leftrightarrow m \left(m + \frac{1}{9} \right) < 0.$$

Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак (см. рисунок). Таким образом, получаем ответ:



$$-\frac{1}{9} < m < 0.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{9}; 0\right)$.

Примечание.

Координату $y_{\text{в}}$ параболы также можно найти по формуле $y_{\text{в}} = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

9. При каких значениях m вершины парабол $y = x^2 - 4mx + m$ и $y = -x^2 + 8mx + 4$ расположены по одну сторону от оси x ?

Решение.

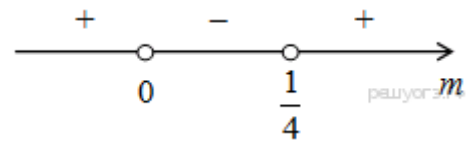
Координата x вершины параболы определяется по формуле $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$. Координата $y_{\text{в}}$ вершины находится подстановкой $x_{\text{в}}$ в уравнение параболы. Вершины парабол будут находиться по одну сторону от оси x , если координаты их вершин имеют одинаковые знаки. Вспомнив, что два сомножителя имеют одинаковый знак тогда и только тогда, когда их произведение положительно, составим и решим неравенство:

$$(4m^2 - 8m^2 + m)(-16m^2 + 32m^2 + 4) > 0 \Leftrightarrow (-4m^2 + m)(16m^2 + 4) > 0.$$

Заметим, что второй множитель всегда больше нуля, поэтому на него можно разделить.

$$-4m \left(m - \frac{1}{4} \right) > 0 \Leftrightarrow m \left(m - \frac{1}{4} \right) < 0.$$

Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак (см. рисунок). Таким образом, получаем ответ:



$$0 < m < \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{4} \right)$.

Примечание.

Координату $y_{\text{в}}$ параболы также можно найти по формуле $y_{\text{в}} = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

10. Известно, что графики функций $y = x^2 + p$ и $y = -2x - 2$ имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки. Постройте графики заданных функций в одной системе координат.

Решение.

Найдём абсциссы точек пересечения:

$$x^2 + p = -2x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + p + 2 = 0.$$

Графики функций, будут иметь ровно одну точку пересечения, если это уравнение имеет ровно одно решение. То есть, если дискриминант этого квадратного уравнения будет равен нулю.

$$4 - 4(p + 2) = 0 \Leftrightarrow p = -1.$$

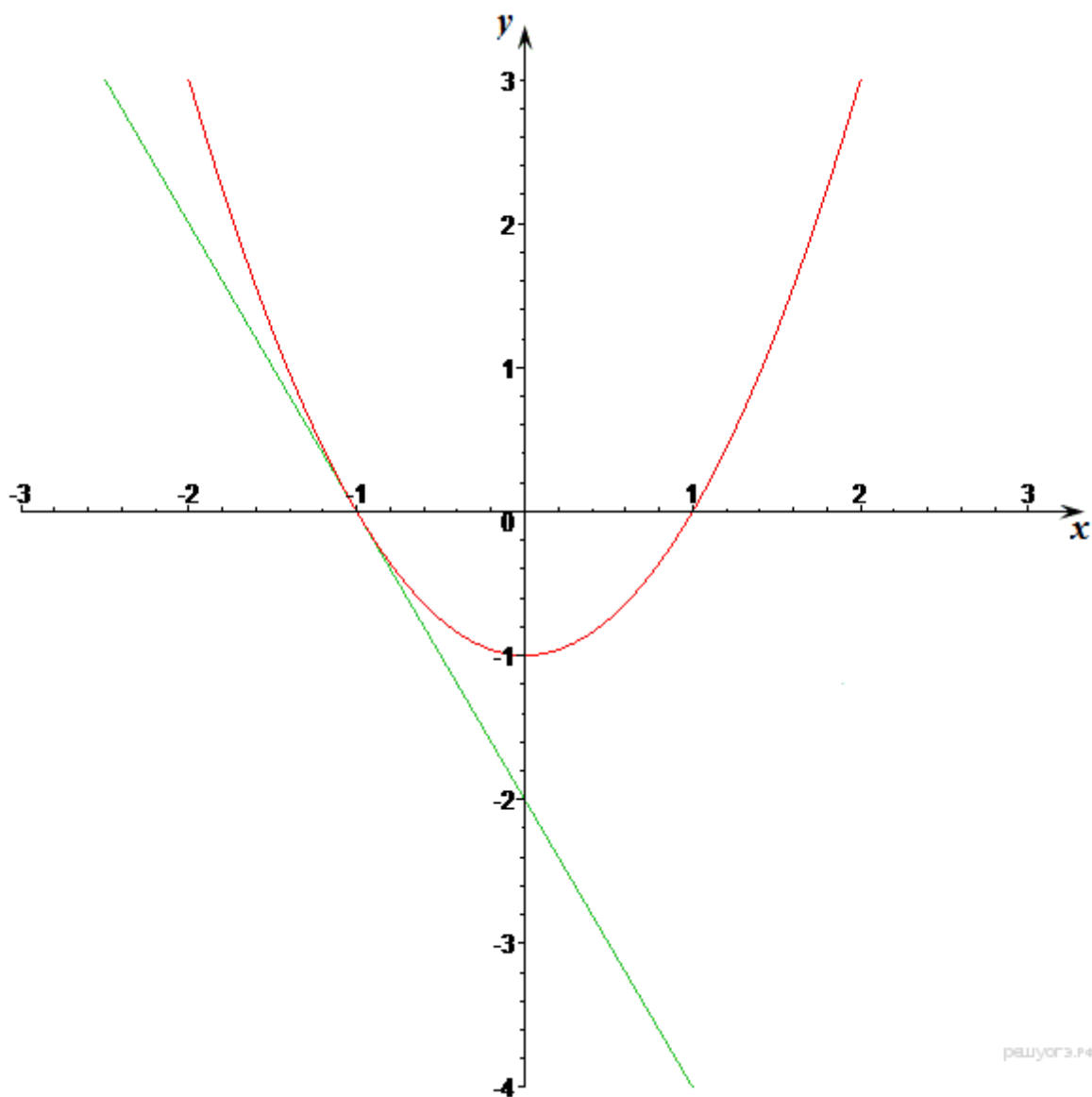
Подставив параметр p в уравнение, найдём x координату точки пересечения этих функций:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Координата y находится отсюда же путём подстановки координаты x в любое из уравнений, например, во второе:

$$y = -2 \cdot (-1) - 2 = 0.$$

Теперь, зная p , можем построить графики обеих функций (см. рисунок).



Ответ: $(-1; 0)$.

11. При каком значении p прямая $y = 2x + p$ имеет с параболой $y = x^2 - 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p .

Решение.

Найдём абсциссы точек пересечения:

$$2x + p = x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x - p = 0.$$

Графики функций, будут иметь ровно одну точку пересечения, если это уравнение имеет ровно одно решение. То есть, если дискриминант этого квадратного уравнения будет равен нулю.

$$16 + 4p = 0 \Leftrightarrow p = -4.$$

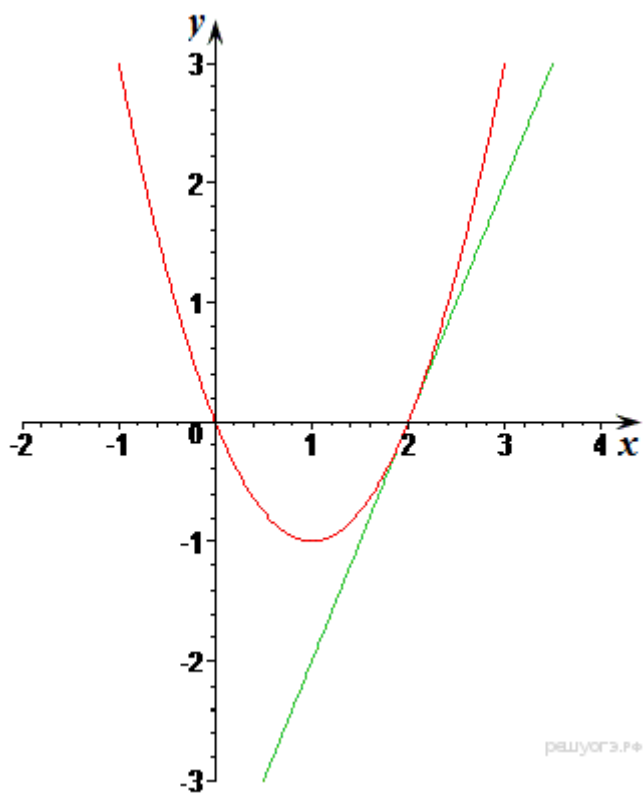
Подставив параметр p в уравнение, найдём x координату точки пересечения этих функций:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Координата y находится путём подстановки координаты x в любое из уравнений, например, в первое:

$$y = 2 \cdot 2 - 4 = 0.$$

Теперь, зная p , можем построить графики обеих функций (см. рисунок).



Ответ: (2; 0).

12. При каких положительных значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2 - 3x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки и построьте данные графики в одной системе координат.

Решение.

Найдём абсциссы точек пересечения:

$$x^2 - 3x = kx - 4 \Leftrightarrow x^2 - (3+k)x + 4 = 0.$$

Графики функций, будут иметь ровно одну точку пересечения, если это уравнение имеет ровно одно решение. То есть, если дискриминант этого квадратного уравнения будет равен нулю.

$$(3+k)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3+k = -4, \\ 3+k = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -7, \\ k = 1. \end{cases}$$

По условию $k > 0$, поэтому нам подходит значение $k = 1$.

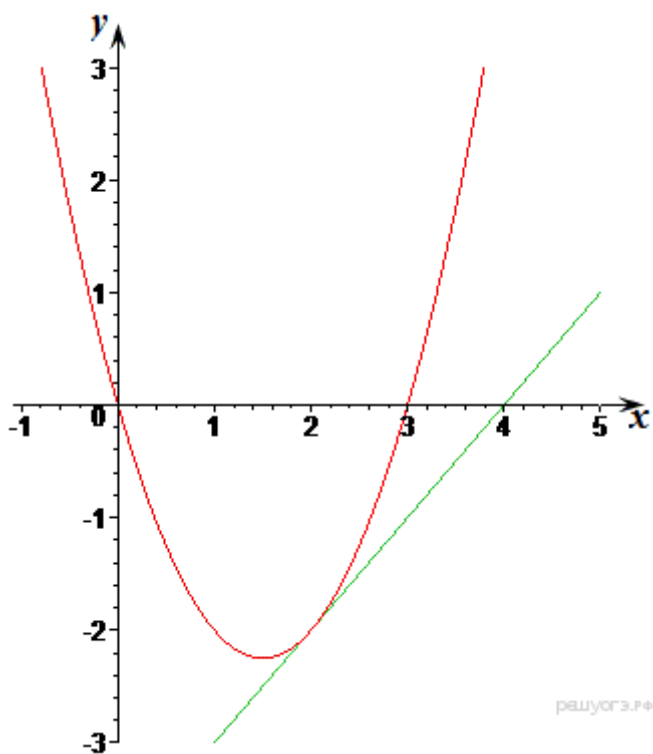
Подставив параметр k в уравнение, найдём x координату точки пересечения этих функций:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Координата y находится путём подстановки координаты x в любое из уравнений, например, в первое:

$$y = 2 - 4 = -2.$$

Теперь, зная k , можем построить графики обеих функций (см. рисунок).



Ответ: $k = 1$, координаты точки: $(2; -2)$.

13. Постройте график функции $y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

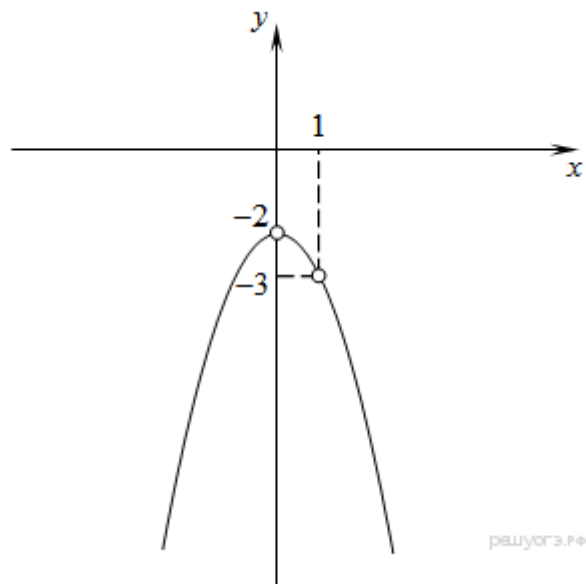
Решение.

Упростим выражение:

$$y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x} = -2 - \frac{x^3(x-1)}{x(x-1)} = -2 - x^2.$$

Таким образом, получили, что график нашей функции сводится к графику функции $y = -x^2 - 2$ с выколотыми точками $(0; -2)$ и $(1; -3)$. Построим график функции (см. рисунок).

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = t$ имеет с графиком функции ровно две общие точки при t принадлежащем промежутку $(-\infty; -3) \cup (-3; -2)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -2)$.

14. Постройте график функции $y = \frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1}$ И определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

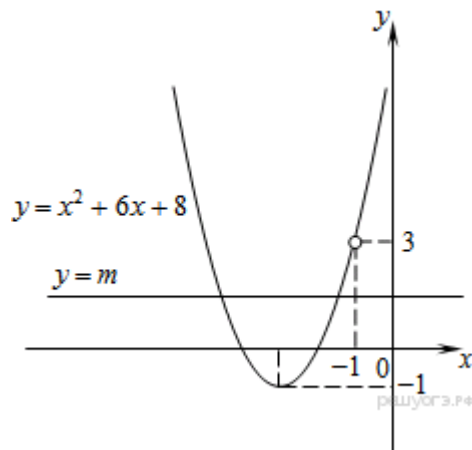
Решение.

Упростим выражение:

$$y = \frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1} = \frac{(x+4)(x+1)(x+2)}{x+1} = x^2 + 6x + 8.$$

График функции сводится к графику параболы $y = x^2 + 6x + 8$ с выколотой точкой $(-1; 3)$.

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $m = -1$ и $m = 3$.

Ответ: $-1; 3$.

15. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 7x + 12)(x^2 - x - 2)}{x^2 + 5x + 4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

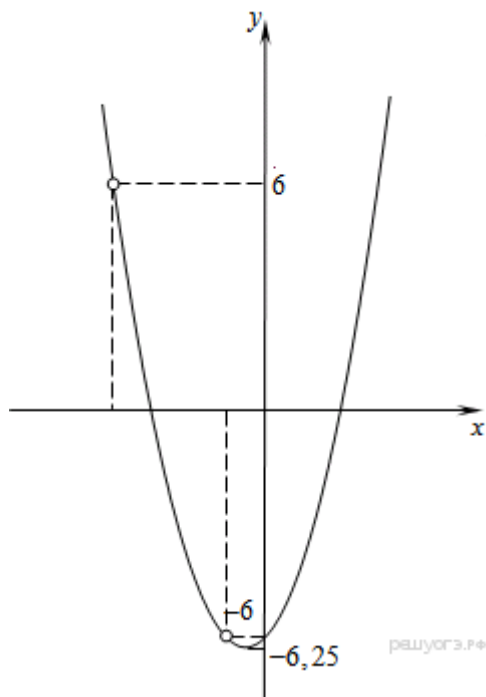
Решение.

Преобразуем выражение:

$$y = \frac{(x^2 + 7x + 12)(x^2 - x - 2)}{x^2 + 5x + 4} = \frac{(x + 3)(x + 4)(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x + 4)} = x^2 + x - 6.$$

График исходной функции сводится к графику параболы $y = x^2 + x - 6$ с выколотыми точками $(-1; -6)$, $(-4; 6)$.

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = t$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при t равном $-6,25$; -6 ; 6 .

Ответ: $-6,25$; -6 ; 6 .

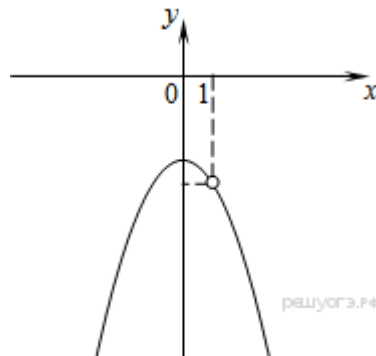
16. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 2,25)(x - 1)}{1 - x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Упростим выражение:

$$y = \frac{(x^2 + 2,25)(x - 1)}{1 - x} = -x^2 - 2,25$$

График исходной функции сводится к графику параболы $y = -x^2 - 2,25$ с выколотой точкой $(1; -3,25)$. Этот график изображён на рисунке:



Чтобы прямая $y = kx$ имела с построенным графиком одну общую точку, нужно чтобы или прямая $y = kx$ была касательной к графику $y = -x^2 - 2,25$ (и точка касания не равна 1), или прямая $y = kx$ пересекает график $y = -x^2 - 2,25$ в точке $x = 1$ и в какой-то второй точке.

Случай касания реализуется когда дискриминант квадратного уравнения $-x^2 - 2,25 = kx$ равен нулю.

$$k^2 - 9 = 0$$

$$k = \pm 3$$

При этом если $k = -3$, точка касания $x = 1,5$, а если $k = 3$, точка касания $x = -1,5$.

Для рассмотрения второго случая подставим $x = 1$ в уравнение $-x^2 - 2,25 = kx$. получим $k = -3,25$. При этом дискриминант этого уравнения будет больше нуля, значит еще одно решение точно есть.

Ответ: -3,25; -3; 3.

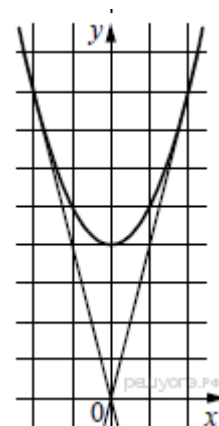
17. Найдите все значения k , при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение.

Построим график функции $y = x^2 + 4$.

Прямая $y = kx$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку, если уравнение $x^2 + 4 = kx$ имеет один корень. Дискриминант этого уравнения равен $k^2 - 16$, и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k = -4$ или $k = 4$.

Ответ: -4; 4.



18. Постройте график функции $y = \frac{(0,5x^2 - 2x)|x|}{x - 4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

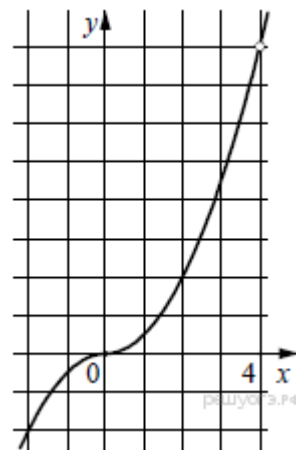
Решение.

Преобразуем выражение $\frac{(0,5x^2 - 2x)|x|}{x - 4} = 0,5x|x|$ при условии, что $x \neq 4$.

Построим график функции $y = -0,5x^2$ при $x < 0$ и график функции $y = 0,5x^2$ при $0 \leq x < 4$ и $x > 4$.

Прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $t = 8$.

Ответ: 8.



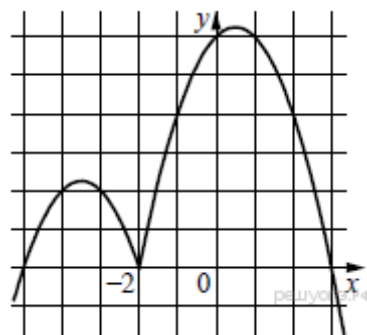
19. Постройте график функции $y = 4|x + 2| - x^2 - 3x - 2$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = -x^2 - 7x - 10$ при $x < -2$ и график функции $y = -x^2 + x + 6$ при $x \geq -2$.

Прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки, если она проходит через вершину первой параболы и пересекает вторую или если она проходит через точку $(-2; 0)$. Получаем, что $t = 0$ и $t = 2,25$.

Ответ: 0; 2,25.



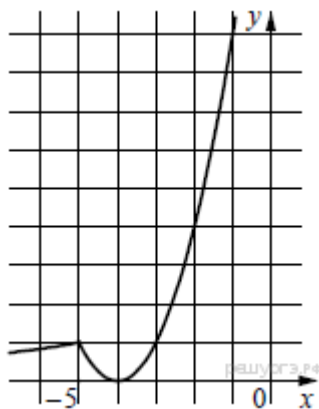
20. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 8x + 16, & \text{если } x \geq -5, \\ -\frac{5}{x}, & \text{если } x < -5, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = -\frac{5}{x}$ при $x < -5$ и график функции $y = x^2 + 8x + 16$ при $x \geq -5$.



Прямая $y = t$ имеет с графиком одну или две общие точки при $t = 0$ и при $t \geq 1$.

Ответ: 0; $[1; +\infty)$

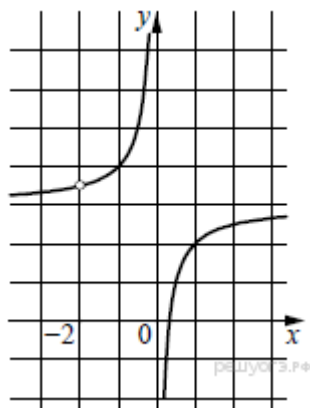
21. Постройте график функции

$$y = 3 - \frac{x + 2}{x^2 + 2x}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

Преобразуем выражение $3 - \frac{x+2}{x^2+2x} = 3 - \frac{1}{x}$ при условии, что $x \neq -2$. Построим график:



Прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $m = 3$ и $m = \frac{7}{2}$.

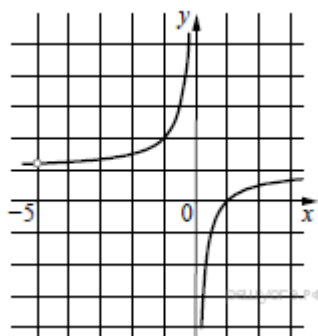
Ответ: $3; \frac{7}{2}$.

22. Постройте график функции $y = 1 - \frac{x+5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

Преобразуем выражение: $1 - \frac{x+5}{x^2+5x} = 1 - \frac{1}{x}$ при условии, что $x \neq -5$.

Построим график:



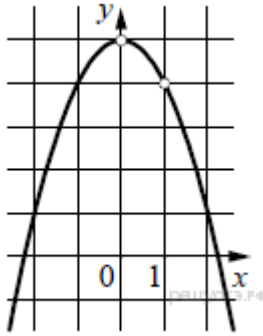
Прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $m = 1$ и $m = \frac{6}{5}$.

Ответ: $1; \frac{6}{5}$.

23. Постройте график функции $y = 5 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Преобразуем выражение: $5 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x} = 5 - x^2$ при условии, что $x \neq 1$ и $x \neq 0$. Построим график:



Прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки при $t < 4$ и при $4 < t < 5$.

Ответ: $(-\infty, 4)$; $(4, 5)$.

24. Постройте график функции $y = \frac{(0,75x^2 - 0,75x)|x|}{x - 1}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

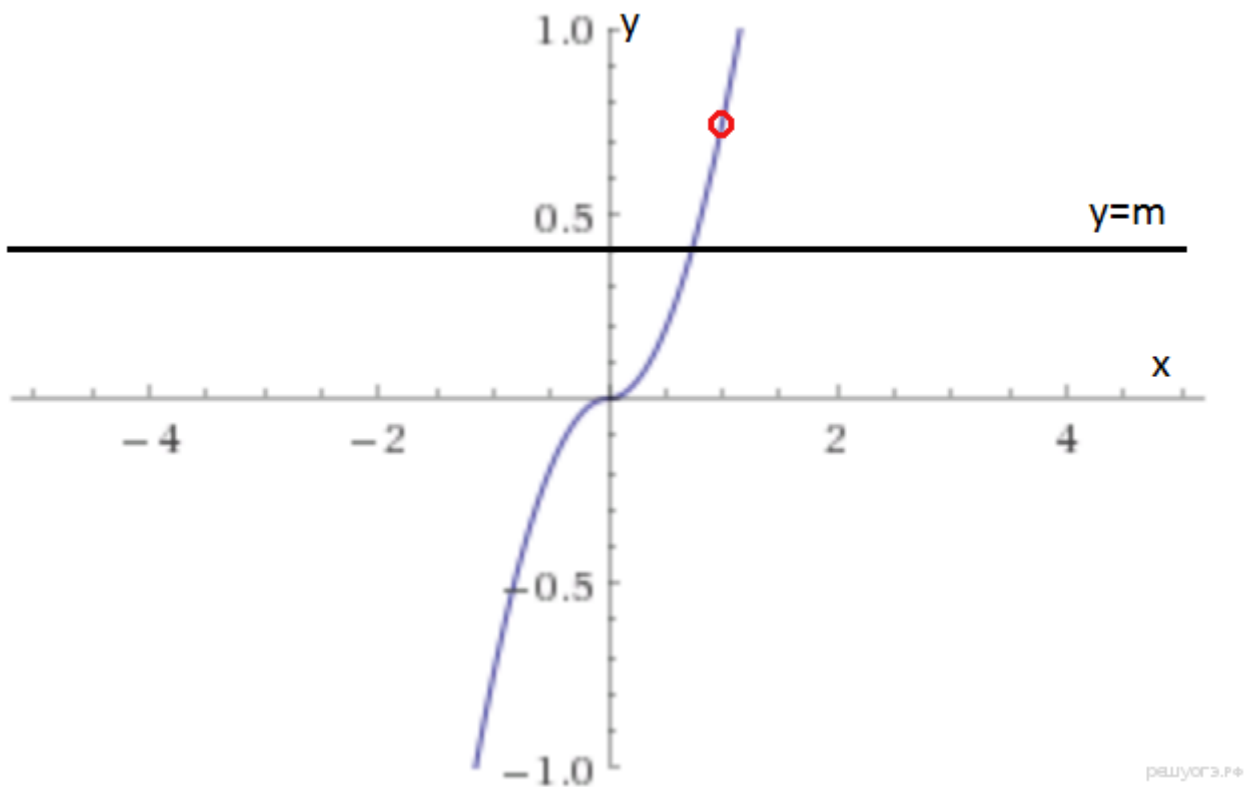
Решение.

Раскрывая модуль и упрощая, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y = \begin{cases} 0,75x^2, & \text{при } x \geq 0 \\ -0,75x^2, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

При этом на графике функции нужно выколоть точку $(1; 0,75)$, поскольку при упрощении мы сокращали выражение $x - 1$, стоящее в знаменателе.

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = t$ не имеет с графиком функции ни одной общей точки при $t = 0,75$.

Ответ: 0,75.

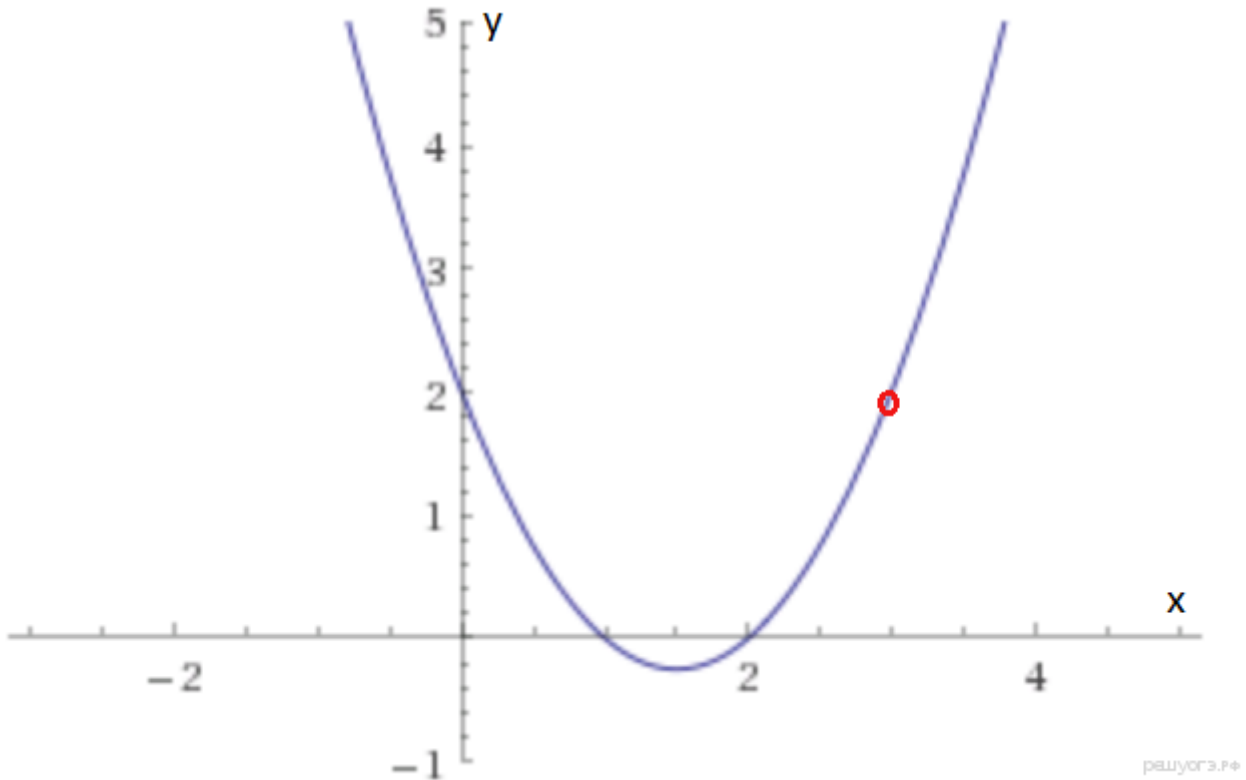
25. Постройте график функции $y = \frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x-3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку

Решение.

Упростим выражение:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x-3} = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

График исходной функции сводится к графику параболы $y = x^2 - 3x + 2$ с выколотой точкой $(3; 2)$. Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком одну общую точку, если $y = 2$ или $y = -0,25$

Ответ: -0,25; 2