## Разные задачи

**1.** Найдите все значения $a$, при которых неравенство $x^2+(2a+4)x+8a+1\le 0$ не имеет решений.

**Решение.**

График функции $y=x^2+(2a+4)x+8a+1$ — парабола, ветви которой направленны вверх. Значит, данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, если эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трёхчлена $x^2+(2a+4)x+8a+1$ должен быть отрицателен.

Имеем $D_1=(a+2)^2-(8a+1)=a^2-4a+3<0$.

Ответ: $1 < a < 3$; другая возможная форма ответа: $a\in(1;3)$.

**2.** Найдите наименьшее значение выражения и значения x и y, при которых оно достигается $|6x+5y+7|+|2x+3y+1|$.

**Решение.**

Сумма $|6x+5y+7|+|2x+3y+1|$ принимает наименьшее значение, равное 0, только в том случае, когда обе слагаемых одновременно равны 0. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}6x+5y+7=0,\\2x+3y+1=0.\end{cases}$$

Решим её:

$$\begin{cases}6x+5y+7=0,\\6x+9y+3=0;\end{cases}\quad\begin{cases}4y-4=0,\\6x+9y+3=0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=1,\\6x+12=0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=1,\\x=-2.\end{cases}$$

Ответ: 0; (-2;1).

**3.** Найдите наименьшее значение выражения $(5x-4y+3)^2+(3x-y-1)^2$ и значения $x$ и $y$, при которых оно достигается.

**Решение.**

При любых значениях $x$ и $y$ имеем $(5x-4y+3)^2+(3x-y-1)^2\ge 0$. Значение, равное 0, достигается только в том случае, когда $5x-4y+3$ и $3x-y-1$ равны нулю одновременно.
Составим систему уравнений

$$\begin{cases}5x-4y+3=0;\\3x-y-1=0.\end{cases}$$

Решив её, получим $x=1,\ y=2$.
Таким образом, наименьшее значение выражения равно 0, оно достигается при $x=1,\ y=2$.
Ответ: 0, при $x=1,\ y=2$.

**4.** Первая прямая проходит через точки $(0;\ 4,5)$ и $(3;\ 6)$. Вторая прямая проходит через точки $(1;\ 2)$ и $(-4;\ 7)$. Найдите координаты общей точки этих двух прямых.

**Решение.**

Уравнение прямой $y = kx + b$. Подставляя координаты первой пары точек, получаем систему:

$$\begin{cases} 4,5 = k \cdot 0 + b, \\ 6 = k \cdot 3 + b; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 4,5, \\ 3k = 1,5; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 4,5, \\ k = 0,5. \end{cases}$$

Значит, уравнение первой прямой $y = 0,5x + 4,5$.
Аналогично найдем уравнение второй прямой:

$$\begin{cases} 2 = k \cdot 1 + b, \\ 7 = k \cdot (-4) + b; \end{cases} \quad \begin{cases} k + b = 2, \\ -4k + b = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 5k = -5, \\ k + b = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} k = -1, \\ b = 3. \end{cases}$$

Уравнение второй прямой $y = 3 - x$.
Чтобы найти координаты общей точки, решим систему:

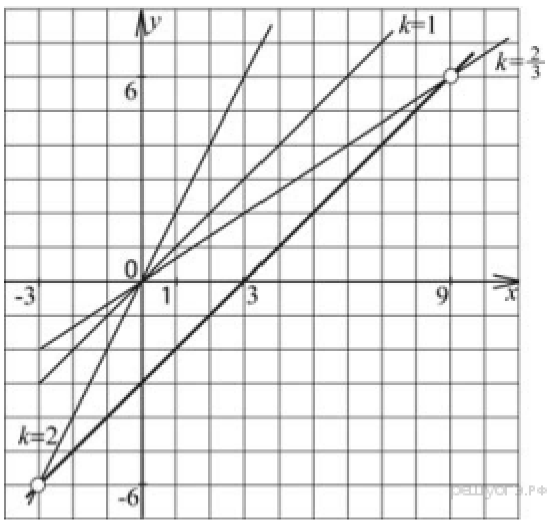
$$\begin{cases} y = 0,5x + 4,5, \\ y = 3 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 - x = 0,5x + 4,5, \\ y = 3 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} -1,5x = 1,5, \\ y = 3 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 4. \end{cases}$$

Ответ: $(-1;\ 4)$.

**5.** Постройте график функции $y = \dfrac{(x-9)(x^2-9)}{x^2-6x-27}$ и определите, при каких значениях $k$ построенный график не будет иметь общих точек с прямой $y = kx$.

**Решение.**

Преобразуем функцию: $y = \dfrac{(x-9)(x-3)(x+3)}{(x-9)(x+3)} = x - 3$ при $x \neq -3$ и $x \neq 9$. График — прямая $y = x - 3$ без двух точек $(-3;\ -6)$ и (9; \ 6). Прямая $y = kx$ не будет иметь с построенной прямой общих точек, если она будет ей параллельна, т. е. при $k = 1$, и если она будет проходить через выколотые точки. Через первую из этих точек прямая $y = kx$ проходит, если $k = 2$, а через вторую — если $k = \dfrac{2}{3}$.




Ответ: $\dfrac{2}{3};\ 1;\ 2$.

**6.** Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{x^3-y}{x^2+1} - \dfrac{x^2y-x}{x^2+1}$, если $x$ и $y$ связаны соотношением $y = x^2 + x - 4$.

**Решение.**

Преобразуем выражение:

$$\frac{x^3-y}{x^2+1}-\frac{x^2y-x}{x^2+1}=\frac{x^3-y-x^2y+x}{x^2+1}=\frac{(x-y)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x-y.$$

С учётом дополнительного условия выражение принимает вид

$$x-x^2-x+4=4-x^2.$$

Полученное выражение не превосходит 4 и достигает наибольшего значения 4 при $x=0$.

Ответ: 4.

**7.** При каких значениях $m$ вершины парабол $y=-x^2+4mx-m$ и $y=x^2+2mx-2$ расположены по одну сторону от оси $x$?

**Решение.**

Координата $x$ вершины параболы определяется по формуле $x_в = -\frac{b}{2a}$. Координата $y_в$ вершины находится подстановкой $x_в$ в уравнение параболы. Вершины парабол будут находится по одну сторону от оси $x$, если координаты их вершин одновременно больше или меньше нуля. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} -\left(-\frac{4m}{2}\right)^2+8m^2-m>0, \\ \left(-\frac{2m}{2}\right)^2-2m^2-2>0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -\left(-\frac{4m}{2}\right)^2+8m^2-m<0, \\ \left(-\frac{2m}{2}\right)^2-2m^2-2<0. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} -\left(-\frac{4m}{2}\right)^2+8m^2-m>0, \\ \left(-\frac{2m}{2}\right)^2-2m^2-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-m>0, \\ -m^2-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(4m-1)>0, \\ -m^2-2>0. \end{cases}$$

Второе уравнение данной системы не имеет решений, левая часть меньше нуля при любых значениях $m$. Следовательно и вся система не имеет решений.

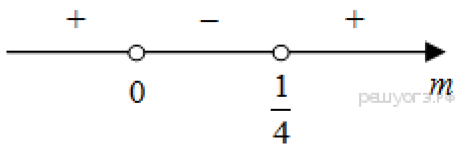
Решим вторую систему, преобразования в ней аналогичны первой, поэтому можем сразу записать:

$$\begin{cases} m(4m-1)<0, \\ -m^2-2<0. \end{cases}$$

В этой системе второе неравенство, напротив, верно при любых $m$. Таким образом, задача сводится к решению неравенства:

$$m(4m-1)<0 \Leftrightarrow 4m\left(m-\frac{1}{4}\right)<0.$$

Произведение меньше нуля в том случае, когда сомножители имеют разный знак (см. рисунок). Таким образом, решение второй системы неравенств:




$$0<m<\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$.

**Примечание.**

Координату $y_в$ параболы можно найти по формуле $y_в = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

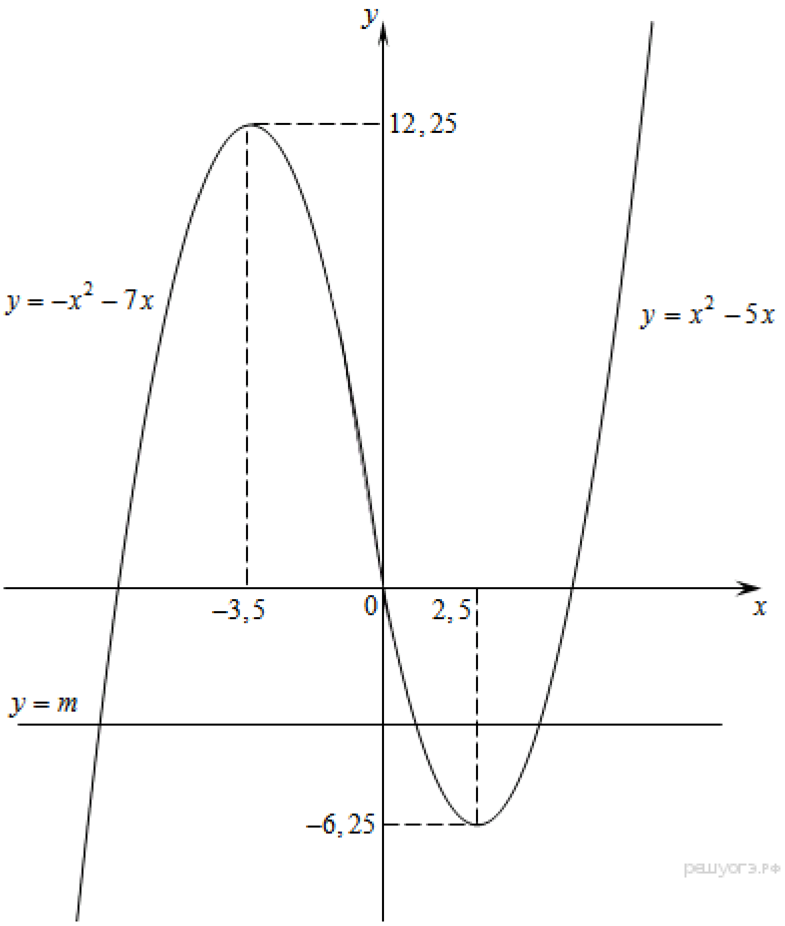
**8.** Постройте график функции $y=|x|x+|x|-6x$ и определите, при каких значениях $m$ прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

**Решение.**

Раскрывая модуль, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y=\begin{cases} -x^2-7x, \text{ при } x<0, \\ x^2-5x, \text{ при} x\geq 0. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:




Из графика видно, что прямая $y=m$ имеет с графиком функции
- ровно две общие точки при $m=-6{,}25$ и $m=12{,}25.$;
- три общие точки при $-6{,}25<m<12{,}25$
- ровно одну общую точку при $m<-6{,}25$ и $m>12{,}25.$

Ответ: m<−6,25; m>12,25.

**9.** Прямая $y = 2x + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = 5$ в точке с положительной абсциссой. Определите координаты точки касания.

**Решение.**

Прямая касается окружности, если система уравнений

$$\begin{cases} y = 2x + b, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

имеет только одно решение. Подставляя выражение для $y$ из первого уравнения во второе, получим:

$$x^2 + (2x + b)^2 = 5 \Leftrightarrow 5x^2 + 4bx + b^2 - 5 = 0.$$

Данное квадратное уравнение должно иметь единственное решение, поэтому дискриминант должен быт равен нулю:

$$16b^2 - 20(b^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow 4b^2 = 100 \Leftrightarrow b^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -5, \\ b = 5. \end{array}\right.$$

Найдём координаты точки касасния. При $b = 5$ второе уравнение системы принимает вид:

$$5x^2 + 20x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Точка касания имеет отрицательную абсциссу, поэтому корень $b = 5$ не подходит по условию задачи.

При $b = -5$ второе уравнение системы принимает вид:

$$5x^2 - 20x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Подставляя $x$ и $b$ в первое уравнение системы, получаем $y = 2 \cdot 2 - 5 = -1$. Координаты точки касания (2; −1).

Ответ: (2; −1).