

Четырёхугольники

1. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 18, а периметр равен 56. Найдите площадь трапеции.

Решение.

Трапеция равнобедренная, значит,

$$AH = \frac{AB - DC}{2} = 5 \text{ и } AD = \frac{P_{ABCD} - (AB + DC)}{2} = 15.$$

Тогда,

$$S = \frac{AB + DC}{2} \cdot DH = \frac{AB + DC}{2} \cdot \sqrt{AD^2 - AH^2} = 13 \cdot 10\sqrt{2} = 130\sqrt{2}.$$

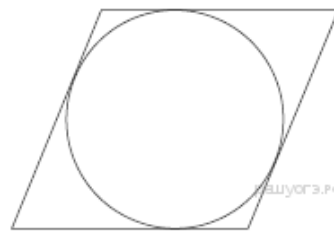
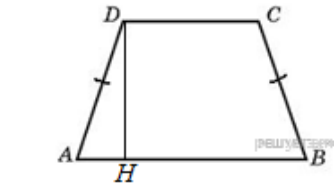
Ответ: $S = 130\sqrt{2}$.

2. В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 8.

Решение.

Поскольку в данный параллелограмм можно вписать окружность, суммы его противоположных сторон равны. Так как противоположные стороны также равны, получаем, что все стороны данного параллелограмма равны, а значит, этот четырехугольник является ромбом. Следовательно, его периметр равен $8 \cdot 4 = 32$.

Ответ: 32.



3. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 12$ и $CH = 3$. Найдите высоту ромба.

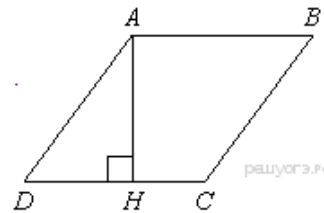
Решение.

Поскольку $ABCD$ — ромб, $AD = DC = DH + HC = 15$.

Треугольник ADH прямоугольный, поэтому:

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 9.$$

Ответ: 9.



4. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 12$ и $CH = 1$. Найдите высоту ромба.

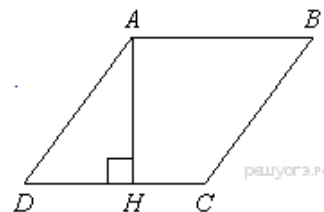
Решение.

Поскольку $ABCD$ — ромб, $AD = DC = DH + HC = 13$.

Треугольник ADH прямоугольный, поэтому:

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 5.$$

Ответ: 5.



5. Периметр прямоугольника равен 56, а диагональ равна 27. Найдите площадь этого прямоугольника.

Решение.

Пусть одна из сторон прямоугольника равна a . Тогда другая сторона равна $28 - a$, а площадь $a(28 - a)$. По теореме Пифагора:

$$a^2 + (28 - a)^2 = 27^2; \quad a^2 + 2a(28 - a) + (28 - a)^2 = 2a(28 - a) + 27^2;$$

$$28^2 = 2a(28 - a) + 27^2; \quad a(28 - a) = \frac{28^2 - 27^2}{2} = 27,5.$$

Значит, искомая площадь равна 27,5.

Ответ: 27,5.

6. Прямая, параллельная основаниям MP и NK трапеции $MNKP$, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает её боковые стороны MN и KP в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB , если $MP = 40$ см, $NK = 24$ см.

Решение.

1) $\triangle MOP \sim \triangle KON$ по двум углам:

а) $\angle NOK = \angle MOP$ как вертикальные;

б) $\angle PMO = \angle NKO$ как внутренние накрест лежащие углы при $NK \parallel MP$ и секущей MK .

$$\frac{NO}{PO} = \frac{KO}{MO} = \frac{NK}{MP} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

$$KO = \frac{3}{5}MO; \quad NO = \frac{3}{5}PO$$

2) $\triangle AMO \sim \triangle NMK$ по двум углам:

а) $\angle M$ — общий;

б) $\angle MAO = \angle MNK$ как соответственные при $AO \parallel NK$ и секущей MN .

$$\frac{AO}{NK} = \frac{MO}{MK} = \frac{MO}{MO + KO} = \frac{MO}{MO + \frac{3}{5}MO} = \frac{5MO}{8MO} = \frac{5}{8}.$$

$$AO = \frac{5}{8}NK = 15 \text{ см.}$$

$$3) \text{ Аналогично } BO = \frac{5}{8}NK = 15 \text{ см.}$$

$$4) AB = 30 \text{ см.}$$

Ответ: 30 см.

7. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 16 см^2 и 9 см^2 . Найдите площадь трапеции.

Решение.

По условию $S_{\triangle AOD} \neq S_{\triangle BOC}$, поэтому AD и BC являются не боковыми сторонами, а основаниями трапеции. Тогда треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, а отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k . Поэтому $k = \frac{4}{3} = \frac{AO}{OC}$. Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведённую из вершины B , отношение их площадей равно отношению их оснований,

$$\text{т. е. } \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CBO}} = \frac{AO}{OC} = \frac{4}{3}. \quad \text{Значит,}$$

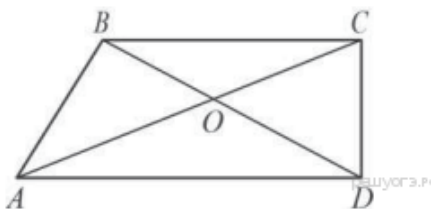
$$S_{\triangle ABO} = \frac{4}{3}S_{\triangle CBO} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12.$$

Площади треугольников ABD и ACD равны, так как эти треугольники имеют общее основание AD и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции, следовательно

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COD}.$$

$$\text{Поэтому и } S_{\triangle COD} = 12; \quad S_{ABCD} = 9 + 16 + 12 + 12 = 49 \text{ см}^2.$$

Ответ: 49 см^2 .

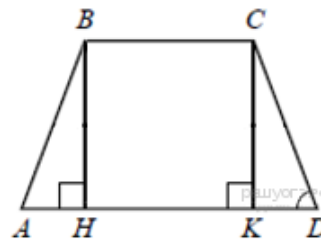


8. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD . Угол ADC равен 60° , сторона AB равна 2. Найдите площадь трапеции.

Решение.

Опустим перпендикуляры BH и CK на большее основания AD . По условию $\angle ADC = 60^\circ$, тогда $\angle DCK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Катет, лежащий напротив угла в 30° , равен половине гипотенузы, тогда $KD = \frac{CD}{2}$.

Так как $AD = 2CD$ по условию, а $HK = x$, то $AH = \frac{CD}{2}$. Треугольники ABH и DCK равны по двум катетам, таким образом, трапеция $ABCD$ — равнобедренная. Таким образом, $AB = 2$, $AD = 4$, $BH = \sqrt{3}$. Площадь трапеции равна полусумме оснований на высоту, имеем:



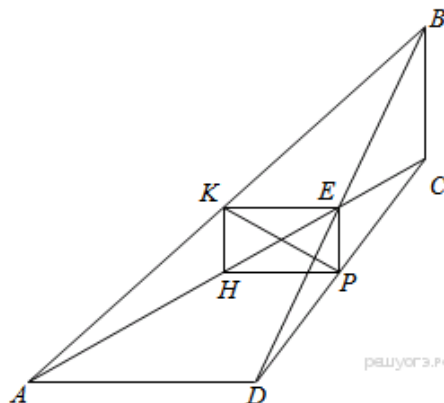
$$S = \frac{4+2}{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Ответ: $S = 3\sqrt{3}$.

9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD , равна одному метру. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD .

Решение.

Пусть точка K — середина AB , точка P — середина CD , точка H — середина диагонали AC , точка E — середина диагонали BD . Тогда KH — средняя линия треугольника ABC , поэтому KH параллельно BC и $KH = \frac{BC}{2}$. Аналогично получаем: KE — средняя линия треугольника ABD , поэтому KE параллельно AD и $KE = \frac{AD}{2}$; PH — средняя линия треугольника DAC , поэтому PH параллельно AD и $PH = \frac{AD}{2}$; PE — средняя линия треугольника BDC , поэтому PE параллельно BC и $PE = \frac{BC}{2}$. Отсюда заключаем, что в четырёхугольнике $KHPE$ стороны попарно параллельны и попарно равны, поэтому $KHPE$ — параллелограмм. А так как KH параллельно BC , KE параллельно AD , а BC перпендикулярно AD , то и KH перпендикулярно KE . Поэтому $KHPE$ — прямоугольник. А так как диагонали прямоугольника равны, то $HE = KP = 1$ метру.



Ответ: 1 метр.

10. Каждое основание AD и BC трапеции $ABCD$ продолжено в обе стороны. Биссектрисы внешних углов A и B этой трапеции пересекаются в точке K , биссектрисы внешних углов C и D пересекаются в точке E . Найдите периметр трапеции $ABCD$, если длина отрезка KE равна 28.

Решение.

Углы OBA и RAB — односторонние при параллельных прямых AD и BC и секущей AB . Значит их сумма равна 180° .

BK — биссектриса угла OBA ;

$$\angle KBA = \frac{1}{2} \angle OBA.$$

AK — биссектриса угла RAB ;

$$\angle KAB = \frac{1}{2} \angle RAB.$$

Тогда сумма углов KAB и KBA равна 90° , значит треугольник KBA — прямоугольный. Аналогично, треугольник CED — прямоугольный. Точки K и E — точки пересечения биссектрис внешних углов трапеции $ABCD$, значит, K и E — равноудалены от параллельных прямых AD и BC . (Точка K равноудалена от сторон угла B OB и AB , и равноудалена от сторон угла A AB и RA , т. к. лежит на биссектрисах соответствующих углов).

Таким образом, прямая KE параллельна прямым AD и BC , и по теореме Фалеса точки M и N , середины сторон AB и CD и MN — средняя линия трапеции (по определению).

Из прямоугольного треугольника KBA , $KN = \frac{1}{2} AB$ (KN — медиана, проведенная к гипотенузе).

Из прямоугольного треугольника CDE , $EM = \frac{1}{2} CD$ (ME — медиана, проведенная к гипотенузе).

$$P_{ABCD} = AB + AD + BC + CD = 2KN + 2NM + 2ME = 2KE$$

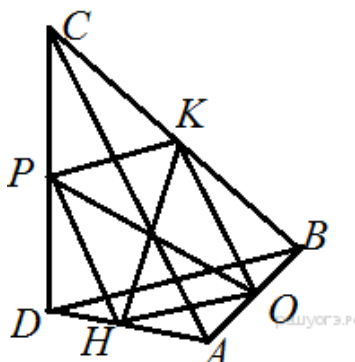
Значит, периметр трапеции $ABCD$ равен 56.

Ответ: 56.

11. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника с диагоналями 8 и 5, если отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, равны.

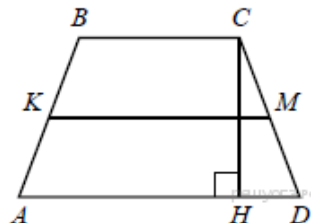
Решение.

Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, O — середина стороны AB , K — середина стороны BC , P — середина стороны CD , H — середина стороны DA . Проведём диагонали AC и BD и отрезки OK , KP , PH и HO , последовательно соединяющие середины сторон четырёхугольника. Тогда, по свойству средней линии треугольника, отрезки OK и PH параллельны диагонали AC и равны её половине, а отрезки KP и HO параллельны диагонали BD и равны её половине. Поэтому $OKPH$ — параллелограмм. А так как, по условию задачи, его диагонали KH и OP равны, то $OKPH$ — прямоугольник, и угол OKP — прямой. Отсюда следует, что и угол между диагоналями AC и BD тоже прямой, и, следовательно, площадь четырёхугольника $ABCD$ будет равна половине произведения его диагоналей, то есть $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$.



Ответ: 20.

12. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны, CH — высота, проведённая к большему основанию AD . Найдите длину отрезка HD , если средняя линия KM трапеции равна 16, а меньшее основание BC равно 4.

**Решение.**

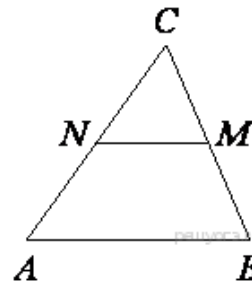
Так как $AB = CD$, то трапеция является равнобедренной. Опустим перпендикуляр BL из точки B на большее основание AD . Прямоугольные треугольники ABL и CHD равны по гипотенузе и прилежащему острому углу, поэтому $AL = HD$. Средняя линия равна полусумме оснований:

$$KM = \frac{1}{2}(BC + AD) \Leftrightarrow AD = 2KM - BC \Leftrightarrow AD = 28.$$

$$\text{Так как } AL = HD, \text{ имеем: } AD = 2HD + BC, \text{ значит, } HD = \frac{AD - BC}{2} = 12.$$

Ответ: $HD = 12$.

13. В треугольнике ABC отмечены середины M и N сторон BC и AC соответственно. Площадь треугольника CNM равна 57. Найдите площадь четырёхугольника $ABMN$.



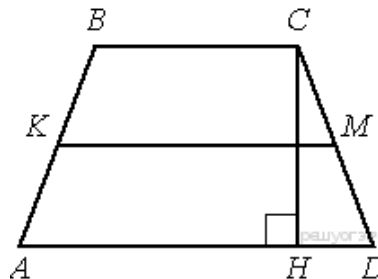
Решение.

Поскольку MN — средняя линия треугольника ABC , $MN \parallel AB$. Рассмотрим треугольники ABC и CNM , углы CNM и CAB равны как соответствующие углы при параллельных прямых, угол C — общий, следовательно, эти треугольники подобны. Откуда коэффициент подобия $k = \frac{AC}{NC} = \frac{BC}{CM} = \frac{AB}{NM} = 2$. Площади подобных фигур соотносятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому $S_{ABC} = k^2 S_{CNM} = 4 \cdot 57 = 228$. Найдём площадь четырёхугольника $ANMB$:

$$S_{ANMB} = S_{ABC} - S_{CNM} = 228 - 57 = 171.$$

Ответ: 171.

14. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны, CH — высота, проведённая к большему основанию AD . Найдите длину отрезка HD , если средняя линия KM трапеции равна 16, а меньшее основание BC равно 4.



Решение.

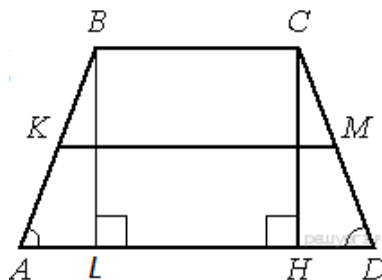
В трапеции средняя линия равна полусумме оснований, поэтому можем найти большее основание AD , зная KM и BC :

$$KM = \frac{AD + BC}{2} \Leftrightarrow AD = 2KM - BC = 2 \cdot 16 - 4 = 28.$$

Проведём в трапеции вторую высоту BL . Трапеция равнобедренная, поэтому $\angle A = \angle D$. Рассмотрим два треугольника: ABL и CHD , они прямоугольные, имеют равные углы и AB равно CD , следовательно, эти треугольники равны. Таким образом, равны отрезки AL и HD .

Также рассмотрим четырёхугольник $LBCH$, все углы в нём — прямые, следовательно, это прямоугольник, значит, $BC = LH$.

Теперь найдём длину отрезка HD :



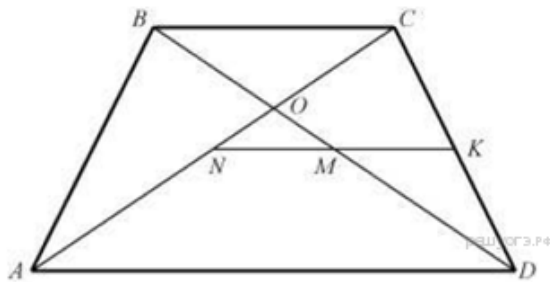
$$AD = AL + LH + HD \Leftrightarrow AD = 2HD + LH \Leftrightarrow HD = \frac{AD - BC}{2} \Leftrightarrow \frac{28 - 4}{2} = 12.$$

Ответ: 12.

15. Основания трапеции равны 16 и 34. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 16$ и $AD = 34$. Обозначим середину диагонали AC через N , середину диагонали BD через M , а середину стороны CD через K .



Тогда NK — средняя линия треугольника ACD , MK — средняя линия треугольника BCD . Значит, точки N , M и K лежат на одной прямой, и $NM = NK - MK = 9$.

Ответ: 9.

16. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону BC в точке E . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $BE = 7$, $EC = 3$, а $\angle ABC = 150^\circ$.

Решение.

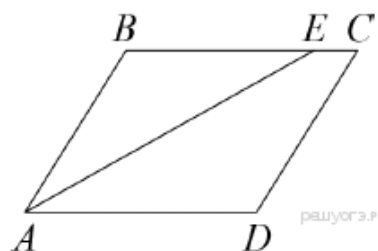
Накрест лежащие углы BEA и EAD равны, AE — биссектриса угла BAD , следовательно,

$$\angle BEA = \angle EAD = \angle BAE.$$

Значит, треугольник BEA равнобедренный и $AB = BE = 7$.

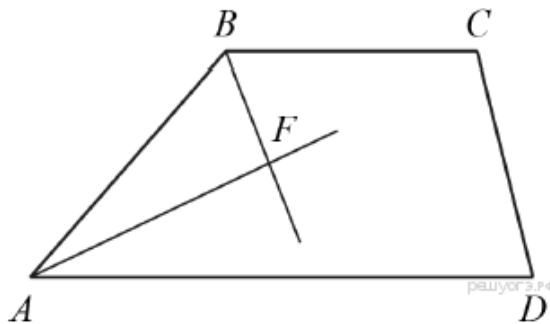
По формуле площади параллелограмма находим

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = 7 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 35$$



Ответ: 35.

17. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 10$.

Решение.

Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° , значит,

$$\angle ABF + \angle BAF = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle BAD) = 90^\circ.$$

Получаем, что треугольник ABF прямоугольный с прямым углом F . По теореме Пифагора находим AB :

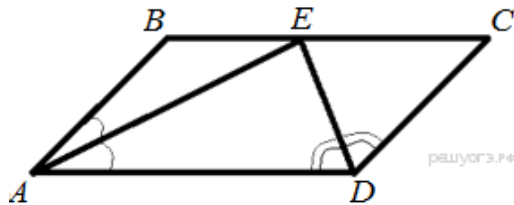
$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26.$$

Ответ: 26.

18. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC . Найдите AB , если $BC = 34$.

Решение.

По определению параллелограмма $BC \parallel AD$, AE — секущая при параллельных прямых, следовательно, углы $\angle BEA$ и $\angle EAD$ равны как накрест лежащие. Поскольку $\angle BEA = \angle BAE$, треугольник ABE — равнобедренный, откуда $AB = BE$. Аналогично, треугольник CED — равнобедренный и $EC = CD$. Стороны AB и CD равны, как противоположные стороны параллелограмма, следовательно:



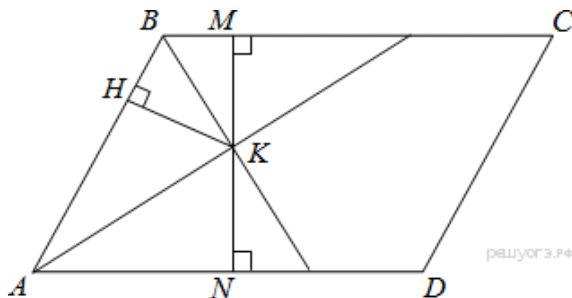
$$AB = BE = EC = CD = \frac{BC}{2} = \frac{34}{2} = 17.$$

Ответ: 17.

19. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K . Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 19$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 7.

Решение.

Проведём через точку пересечения биссектрис высоту. Введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольники AHK и AKN , они прямоугольные, углы $\angle HAK$ и $\angle KAN$ равны, сторона AK — общая, следовательно, треугольники равны, откуда $KN = KH = 7$. Аналогично, равны треугольники BKN и BKM , откуда $MK = KN = 7$. Найдём площадь параллелограмма как произведение основания на высоту:



$$S = AD \cdot MN = AD \cdot (MK + KN) = 19 \cdot 14 = 266.$$

Ответ: 266.

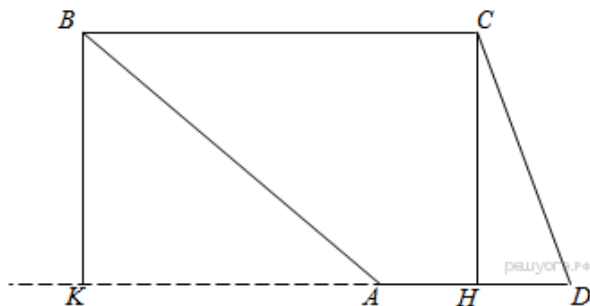
20. Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 120° , а $CD = 25$.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Проведём высоты CH и BK . В трапеции сумма смежных углов при боковой стороне равна 180° , поэтому $\angle ADC = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Из прямоугольного треугольника CHD найдём сторону CH :

$$CH = CD \sin \angle ADC = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12,5\sqrt{3}.$$

Углы ABC и BAK равны как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Высоты CH и BK равны. Из прямоугольного треугольника ABK найдём AB :



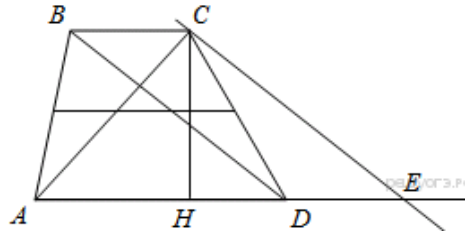
$$AB = \frac{BK}{\sin \angle BAK} = \frac{AK}{\frac{1}{2}} = 25\sqrt{3}.$$

Ответ: $25\sqrt{3}$.

21. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 15 и 7, а средняя линия равна 10.

Решение.

Пусть $AC = 7$, $BD = 15$, $m = 10$ — длина средней линии. Проведём высоту CH и проведём прямую CE , параллельную BD . Рассмотрим четырёхугольник $BCDE$: $BC \parallel DE$, $BD \parallel CE$, следовательно, $BCDE$ — параллелограмм, откуда $DE = BC$, $BD = CE = 15$. Рассмотрим треугольник ACE , $AE = AD + DE = AD + BC = 2m = 20$. Пусть p — полупериметр треугольника ACE . Найдём площадь треугольника ACE по формуле Герона:



$$S_{ACE} = \sqrt{p(p-AC)(p-CE)(p-AE)} = \sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)} = \sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42.$$

Выразим площадь треугольника ACE как произведение основания AE на высоту CH , откуда найдём CH :

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} AE \cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{2S_{ACE}}{AE} \Leftrightarrow CH = 4,2.$$

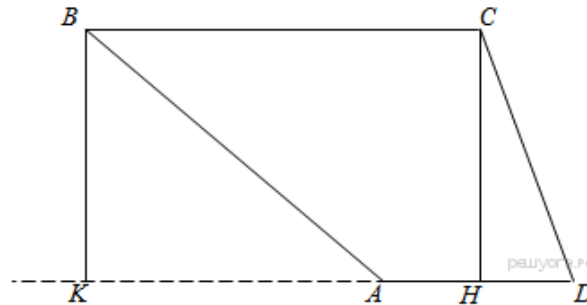
Площадь трапеции равна произведению высоты на полусумму длин оснований:
 $\frac{AD+BC}{2} \cdot CH = m \cdot CH = 10 \cdot 4,2 = 42.$

Ответ: 42.

22. Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 150° , а $CD = 33$.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Проведём высоты CH и BK . В трапеции сумма смежных углов при боковой стороне равна 180° , поэтому $\angle ADC = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Из прямоугольного треугольника CHD найдём сторону CH :



$$CH = CD \sin \angle ADC = 33 \cdot \frac{1}{2} = 16,5.$$

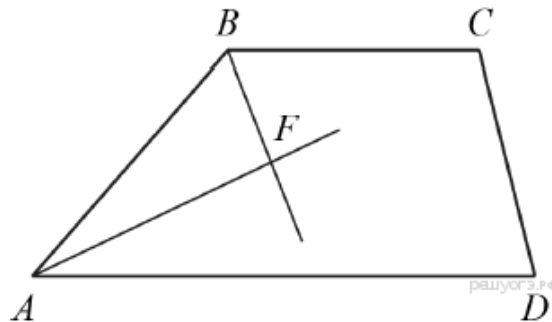
Углы ABC и BAK равны как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Высоты CH и BK равны. Из прямоугольного треугольника ABK найдём AB :

$$AB = \frac{BK}{\sin \angle BAK} = \frac{16,5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{33\sqrt{3}}{3} = 11\sqrt{3}.$$

Ответ: $11\sqrt{3}$.

23. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 20$, $BF = 15$.

Решение.



Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° , значит,

$$\angle ABF + \angle BAF = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAD) = 90^\circ.$$

Получаем, что треугольник ABF прямоугольный с прямым углом F . По теореме Пифагора найдем AB :

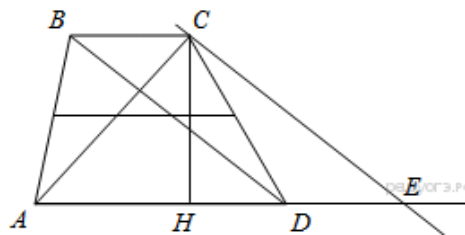
$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25.$$

Ответ: 25.

24. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 16 и 12, а средняя линия равна 10.

Решение.

Пусть $AC = 12$, $BD = 16$, $m = 10$ — длина средней линии. Проведём высоту CH и проведём прямую CE , параллельную BD . Рассмотрим четырёхугольник $BCED$: $BC \parallel DE$, $BD \parallel CE$, следовательно, $BCED$ — параллелограмм, откуда $DE = BC$, $BD = CE = 16$. Рассмотрим треугольник ACE , $AE = AD + DE = AD + BC = 2m = 20$.



Пусть p — полупериметр треугольника ACE . Найдём площадь треугольника ACE по формуле Герона:

$$S_{ACE} = \sqrt{p(p-AC)(p-CE)(p-AE)} = \sqrt{24(24-12)(24-16)(24-20)} = \sqrt{24 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 4} = 96$$

Выразим площадь треугольника ACE как произведение основания AE на высоту CH , откуда найдём CH :

$$S_{ACE} = \frac{1}{2}AE \cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{2S_{ACE}}{AE} \Leftrightarrow CH = 9,6.$$

Площадь трапеции равна произведению высоты на полусумму длин оснований:

$$\frac{AD+BC}{2} \cdot CH = m \cdot CH = 10 \cdot 9,6 = 96.$$

Ответ: 96.

25. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K . Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 5$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 10.

Решение.

Проведём через точку пересечения биссектрис высоту. Введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольники AHK и AKN , они прямоугольные, углы HAK и KAN равны, сторона AK — общая, следовательно, треугольники равны, откуда $KN = KH = 10$. Аналогично, равны треугольники BKH и BKM , откуда $MK = KH = 10$. Найдём площадь параллелограмма как произведение основания на высоту:

$$S = AD \cdot MN = AD \cdot (MK + KN) = 5 \cdot 20 = 100.$$

Ответ: 100.

